

Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Séptima Edición, 2012/2013

TRABAJO: Matemáticas para la sociedad:
La elección social

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

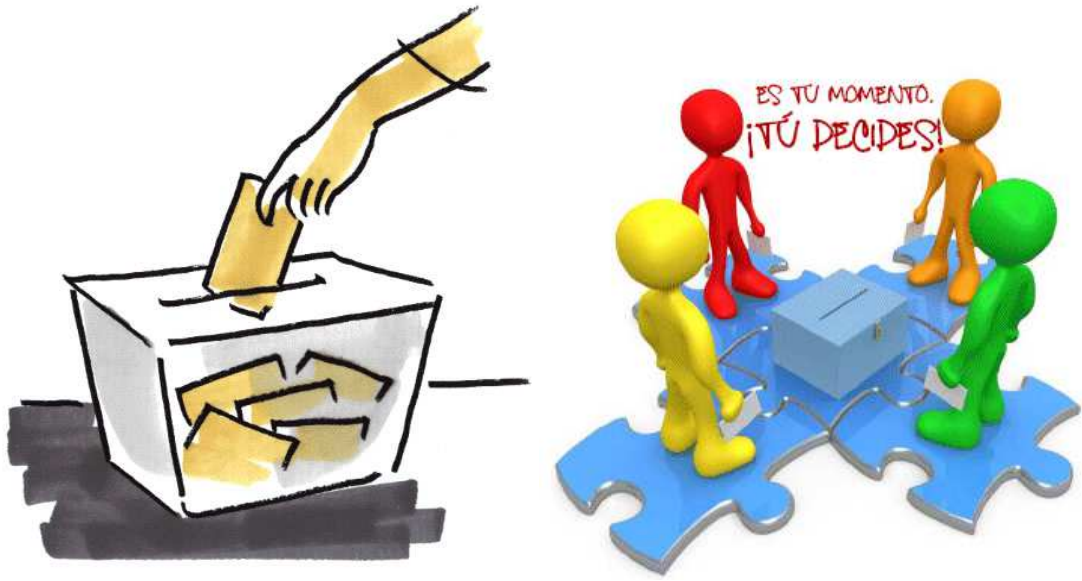
- o Elena Claver Hernández
- o José Polo Gómez
- o Teresa Vilaplana de Trías
- o Antonio Javier Villanueva Pino

TUTOR:

- o Rafael González Márquez

CENTRO: IES Martínez Montañés (Sevilla)





Matemáticas para la sociedad: La elección social

Realizado por:

TEJA



Índice

<u>1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES.....</u>	<u>3</u>
<u>2. ¿POR QUÉ HEMOS ESCOGIDO ESTE TEMA?.....</u>	<u>3</u>
<u>3. OBJETIVOS.....</u>	<u>4</u>
<u>4. RESULTADOS.....</u>	<u>4</u>
<u>4.1. Sistemas de un solo ganador.....</u>	<u>4</u>
4.1.1. Principios a considerar en el análisis.....	4
4.1.2. Voto uninominal.....	5
4.1.3. Voto de aprobación.....	6
4.1.4. Voto preferencial	6
4.1.4.a. Posiciones medias.....	6
4.1.4.b. Posiciones medianas.....	10
4.1.4.c. Método de comparaciones.....	12
4.1.5. Criterio de coincidencia máxima.....	12
<u>4.2. Sistemas de reparto de escaños.....</u>	<u>13</u>
4.2.1. Método de circunscripciones.....	13
4.2.2. Método de Hare-Niemeyer.....	13
4.2.3. Fórmula Imperiali.....	14
4.2.4. Cociente Droop.....	15
4.2.5. Método del resto mayor.....	16
4.2.6. Sistema D'Hondt.....	16
4.2.7. Método Sainte-Laguë.....	16
4.2.8. Método TEJA.....	18
<u>5. CONCLUSIÓN.....</u>	<u>19</u>
<u>6. BIBLIOGRAFÍA.....</u>	<u>20</u>
<u>7. ANEXOS.....</u>	<u>20</u>

1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

A lo largo de toda la historia, el hombre se ha visto obligado a vivir en sociedad y a tomar decisiones que no le afectan únicamente como individuo, sino también como grupo, ya sea una tribu, una polis o una nación. Para ello el ser humano ha formado asambleas, ha impuesto líderes que decidían por todos ellos, hasta llegar al sistema democrático actual en el que todo el mundo participa en la elección del o los representantes que dirigirán su sociedad.

Sin embargo, todavía no hemos llegado al sistema perfecto, puesto que la primera pregunta que se plantea es ¿cómo puede elegirse a una serie de personas que representen real y rigurosamente a una gran cantidad de gente como la que existe en un país? Esta pregunta no tiene una respuesta obvia, y como vemos se han puesto en práctica diferentes métodos dependiendo del momento histórico o de la situación geográfica.

Nuestro trabajo pretende estudiar estos diversos métodos de elección que existen en el mundo, y compararlos entre sí, tratando de responder de la mejor forma posible a la pregunta que acabamos de plantear, es decir, ¿qué métodos de elección son realmente justos y cumplen de forma objetiva su función? ¿Qué métodos electorales permiten que el reparto de escaños resultante de unas elecciones se ajuste realmente a la opinión de la población?

2. ¿POR QUÉ HEMOS ESCOGIDO ESTE TEMA?

La razón por la que hemos elegido este tema es, entre otras, por la mala situación política, económica y social, que vive España actualmente, a causa de una sucesión de malas políticas de actuación. Como este es un tema que nos afecta directamente, puesto que aunque todavía menores de edad, seguimos siendo ciudadanos de este país, hemos intentado abordarlo de la mejor forma que se nos ha ocurrido, que consiste en comprobar si realmente la voluntad de los votantes se ha visto reflejada en la constitución del Congreso de los Diputados.

Con relación a esto, hemos de añadir que el método electoral aplicado en España nos parece muy injusto, razón por la cual hemos tratado de demostrarlo con un estudio objetivo. Esto es muy evidente cuando vemos que en el Congreso español, la representación de un partido como Izquierda Unida es menor que la de Convergencia i Unió, y la de UPyD igual a la de Amaiur, pese a que poseen un mayor número de votos. Esto es debido a la aplicación de circunscripciones a la hora de realizar las votaciones, que causan un gran perjuicio a los partidos minoritarios en relación con los dos partidos mayoritarios de España (PP y PSOE) y regionales.

Por todo lo que acabamos de explicar, no creemos que los ciudadanos estén realmente representados en el Congreso, debido al mal reparto de sus votos. Esto es de vital importancia, ya que, a fin de cuentas, es la base de todo nuestro sistema democrático actual, donde la soberanía reside en todos los ciudadanos, y estos la ejercen mediante la elección de una serie de diputados que serán portavoces de su opinión en el Congreso. Sin embargo, si como estamos indicando, esta representación es falsa, se está pervirtiendo la esencia misma del sistema, ya que estaría negando sus principios básicos.

De igual forma, consideramos que a la hora de votar, es necesario estar correctamente informado del método que se va a emplear para contabilizar los votos, para poder juzgar objetivamente si estamos de acuerdo o no con él, y entender por tanto el recuento final de la votación. Así, uno es consciente de las alternativas que existen a la realidad que estamos viviendo, y podemos comparar nuestro sistema con el resto de posibilidades, para darnos cuentas de sus ventajas e inconvenientes.

3. OBJETIVOS

Por todo lo anterior, los objetivos de este trabajo son:

- Estudiar los distintos métodos de elección que existen y llegar a una conclusión acerca de su efectividad teniendo en cuenta sus diferentes características. De esta forma, podremos afirmar si unas determinadas elecciones son justas y si realmente la opción electa es la más preferida por los votantes, así como si el reparto de los escaños en las cámaras legislativas se ajusta a la voluntad de los ciudadanos.
- Desarrollar un nuevo método que consiga un reparto más justo de escaños, que no favorezca más a algunos partidos que a otros.

Para ello, hemos dividido el trabajo en dos secciones: aquella que contempla el modo de votar y el recuento de votos para erigir una sola opción ganadora, y aquella que trata el modo de repartir los escaños a los diferentes partidos en función de los votos obtenidos.

4. RESULTADOS

4.1. Sistemas de un solo ganador

4.1.1. Principios a considerar en el análisis

En primer lugar, antes de empezar a trabajar los diferentes métodos, hemos considerado conveniente introducir una serie de conceptos para poder usarlos con una mayor facilidad a lo largo del trabajo, sin tener que detenernos a explicarlos. Estas serán las principales variables con las que juzgaremos la efectividad de los métodos de un solo ganador, indicando los sistemas que cumplen un mayor número de ellas.

Principio clásico de mayoría: El principio clásico de mayoría enuncia que la opción preferida por una mayoría de votantes debe ser la ganadora.

Principio clásico de mayoría (bis): Este principio, enunciado por nosotros, indica que la opción menos preferida por una mayoría de votantes no debe ser la ganadora. Lo hemos adoptado, principalmente, para comprobar si en un método electoral puede darse la “paradoja de Borda”, que consiste en que se considere ganadora una opción que tenga más detractores que partidarios.

Principio de mayoría según Condorcet: Este principio, que recibe su nombre del matemático Condorcet (el cual estudió los métodos electorales con gran profundidad) enuncia que una opción que es preferida por una mayoría de votantes en comparación con las demás, debe de ser la ganadora. El problema es que es relativamente sencillo que se de una circunstancia conocida como “paradoja de Condorcet” y que consiste principalmente en que, generalmente, pueden darse circuitos cerrados (ciclos de Condorcet), en los que entre unos partidos a , b y c , a gana ante b y pierde ante c , pero igualmente b vence a c en una comparación, sin que pueda definirse cuál de estos tres partidos es colocado por encima del otro. Este problema será solucionado en el método de comparaciones.

Robustez: Es una cualidad de los métodos electorales que consiste en que no se dejan influir por estrategias de voto.

Independencia de alternativas irrelevantes: Es una cualidad de los métodos electorales que consiste en que si se eliminan una o varias opciones, el resultado escogido no varía. Sin embargo, este es un principio extremadamente exigente, que incluso llega a ser incompatible con el principio clásico de mayoría, por lo cual no vamos a trabajar con él, pese a dejar constancia de su existencia.

Independencia local de alternativas irrelevantes: Este principio, muy parecido al anterior, trata de precisar su campo de actuación, puesto que no contempla todas las opciones disponibles, sino únicamente las que se encuentran por encima o por debajo de un determinado listón.

Independencia respecto a clones: Es una cualidad que tienen los métodos electorales que consiste en que si una opción ganadora se divide en varias opciones muy parecidas, el resultado seguirá siendo una de estas opciones. Sin embargo, esta es una característica que cumplen todos los métodos a excepción de los dos primeros, por lo cual no la vamos a trabajar en profundidad.

4.1.2. Voto uninominal

El voto uninominal es, posiblemente, el más conocido de los métodos de elección, y el que en más ocasiones se pone en práctica durante la vida cotidiana. Consiste, simple y llanamente, en que cada votante cuenta con un único voto que entrega a su opción predilecta, siendo ganadora la que más cantidad de votos obtenga. Este método, tan evidente y justo en apariencia, es fácilmente cuestionable, como vamos a ver a continuación.

Este método, como es evidente, cumple el principio clásico de mayoría, ya que el método de votación consiste precisamente en eso: decir la opción predilecta y escoger la ganadora. Es uno de los métodos más simples y rápidos que existen, y esto es también una importante ventaja, ya que la gente es capaz de aceptar el resultado de la votación puesto que entienden como se ha llegado a esa conclusión y la toman por cierta.

Sin embargo, este método no cumple ningún otro de los principios que enunciamos inicialmente, por lo que puede dar lugar a situaciones que pueden ser calificadas de injustas.

En primer lugar, no cumple el principio de mayoría bis, lo que puede dar lugar que una opción que es rechazada por la mayoría de los votantes sea la ganadora. Pongamos por caso que tenemos tres opciones: *A*, *B* y *C*. Un 40% de ellos votaría a favor de *A*, y el 60% restante se repartiría equitativamente entre *B* y *C*. En un primer momento consideraríamos a *A* como la opción ganadora, y esto nos parecería justo; sin embargo, puede darse que tanto los votantes de *B* como *C* prefieran cualquier otra opción en lugar de *A*, siendo así una mayoría de votantes. Por lo cual, nos encontraríamos ante un callejón sin salida. Aquí, como vemos, tenemos un claro ejemplo de una paradoja de la Borda, a la que este método es susceptible.

De igual forma, tampoco cumple el principio de Condorcet, porque como hemos visto en el ejemplo anterior, se consideraría ganadora una opción que no solo no es preferida a cualquier otra en comparación con las demás, sino que es la *menos* preferida. De igual forma este método no tiene robustez, porque como podemos ver en nuestro día a día con asiduidad, se da la estrategia del *voto útil*, que consiste en dar el voto a un partido que no es el predilecto, pero que es más probable que gane a otro que no se desea en el puesto. Como se ha podido comprobar, esta situación viene provocada por la paradoja de Borda.

A continuación podemos observar que tampoco tiene independencia local frente a alternativas irrelevantes. Esta es la razón por la que algunos países, como por ejemplo Francia, tengan lo que se conoce como "*segundas vueltas*", ya que si se aíslan los dos partidos que han obtenido mayor cantidad de votos, y se celebran unas segundas votaciones, puede que el partido que haya sido ganador en un principio pase a quedar segundo. De igual forma, esto también es producido por la paradoja de Borda. En esas segundas vueltas, puede darse el caso que aquellos votantes que hubieran votado a partidos que han sido eliminados, prefieren el que había quedado aparentemente segundo,

ya que preferían cualquier otro a ese que en teoría es conocido como “ganador”.

Finalmente, apuntar que este método tampoco tiene independencia respecto a clones, lo que convierte este dato en una importante estrategia política. Es usual que para acabar con la oposición, un sector trate de dividir a otro sector que prefiere una opción diferente, ya que si esta se escinde en dos opciones distintas, una opción que podría haber sido ganadora, pasa a convertirse en la última. Pongamos como ejemplo que un partido de izquierdas tiene un 60% de los votos, pero el partido de derechas logra enemistar a los miembros del partido, provocando que se escindan en otros dos partidos diferentes, uno con un 35% de los votos, y otro con el 25%... es obvio lo que ocurriría en la votación.

Por lo tanto, podemos comprobar que este método, pese a ser tan común puede dar lugar a multitud de situaciones que es preferibles evitar, sin embargo, a gran parte de la gente no se le ocurre otra alternativa a lo que parece ser el sistema de voto por excelencia. A continuación, por tanto, vamos a ver otros sistemas y analizarlos de igual forma.

4.1.3. Voto de aprobación

El voto de aprobación es un sistema electoral que consiste en que cada votante otorga un único voto a cada opción que considera aceptable. Al igual que en el caso anterior, la opción que haya obtenido una mayor cantidad de votos se considera la ganadora. Esto se realizaría mediante el uso de 0 (para las opciones que no se consideran) y 1 (para las que se aprueban), y la opción con mayor puntuación sería la ganadora.

El principal problema de este método es su escasísima robustez, que lo haría convertirse con facilidad en un voto uninominal. Para lograr que su opción favorita sea la ganadora, es probable que mucha gente marque únicamente esa opción como “aceptable” incluso cuando pudiera aprobar otras. Esto nos llevaría a las mismas circunstancias que ya hemos tratado anteriormente, además de que esto es una inequívoca señal de su escasa robustez.

Además, incluso si estudiáramos este método sin atender a su probable falsificación, nos seguiríamos encontrando con multitud de problemas. En primer lugar y más importante, seguiría sin eliminar la paradoja de Borda, ya que podría darse la situación de que encontramos 5 opciones: A, B, C, D, y E. A es preferida por el 40% de los votantes, B por el 35%, C por el 20%, D por el 15% y E por el 15%. Según esto, A debería ser la opción ganadora porque es aceptable por una mayoría de electores, pero seguiría teniendo más detractores que votantes.

Lo único que varía en relación al voto uninominal es que en este caso sí que tiene independencia de alternativas irrelevantes, debido a que aunque se eliminara algún partido en el caso anterior, las puntuaciones del resto no variarían (siempre y cuando los votantes no realizaran estrategias de voto).

4.1.4. Voto preferencial

4.1.4.a. Posiciones medias

Este sistema, llevado a cabo por los grupos *Proportional Representation Society of Australia* y *Electoral Reform Society* en el Reino Unido, consiste en asignar un número a cada una de las opciones posibles para indicar el orden de preferencia, siendo 1 la mayor puntuación posible, y la mínima, el número total de opciones. Después se realiza una media aritmética entre las puntuaciones que se han otorgado a cada posibilidad, siendo ganadora aquella que tenga el menor número.

En este método puede darse la posibilidad de que los votantes no estén obligados a asignar un número a todas las opciones, así como que otorguen el mismo a varias de ellas.

Sin embargo, para obtener una mejor visión de sus características los hemos estudiado desde la perspectiva de que todos los votantes establecen un orden completo y sin empates.

En primer lugar, y aunque para la mayor parte de la gente esto suponga una injusticia, no cumple el principio de mayoría absoluta, considerado como el más básico e infalible. Un ejemplo de esto lo podemos ver en la siguiente tabla.

Anexo 1. Mayoría uninominal para posiciones medias. Elaboración propia

Aquí, pese a ser a quien posee la puntuación más alta (el 1 en este caso) por una mayoría de votantes, sería elegido b , pues su media de puntuaciones es menor. Sin embargo es esta misma cualidad la que le permite cumplir el principio de mayoría bis, pues como este mismo caso señala, la opción que posee una mayor cantidad de detractores no es la ganadora. De cualquier forma, para demostrar que esto no se ha dado en un hecho casual, hemos llegado a cabo las siguientes demostraciones:

En ambos casos hemos empleado la misma terminología, n para los votantes y m para los partidos, y en ambos casos hemos supuesto que $n > m$. Lo primero que debemos hacer es calcular la puntuación máxima existente, para lo cual sumaremos todas las puntuaciones que puede otorgar un votante (es decir, de 1 a m) y lo multiplicaremos por el número total de votantes.

Para un número de votantes par

Si tenemos en cuenta que debe de haber $2n$ votantes (para obtener así un número par) y m partidos, las puntuaciones que se obtienen deben variar de 1 (siendo esta la mejor puntuación) a m (que sería la peor). En esta situación, si tomamos un partido A , el cual tendría la máxima puntuación por parte de la mitad de votantes menos uno, pero también

$$\sum \text{puntuaciones de votantes} = \frac{(m+1)m}{2} \cdot 2n = (m+1)nm = nm^2 + nm$$

estaría puesto en última posición por el resto (siendo este el caso más extremo que se puede encontrar), es decir, si fuera el partido no preferido, obtendríamos que su máxima puntuación total sería la siguiente:

$$a = \left(\frac{2n}{2} + 1\right)m + \left(\frac{2n}{2} - 1\right)1 = nm + n + m - 1$$

En función de esto, las puntuaciones del resto de partidos deberían ser la suma de las puntuaciones de los votantes menos la del partido A :

$$\begin{aligned} \sum - a &= \sum \text{puntuaciones resto de partidos} \\ nm^2 + nm - (nm + n + m - 1) &= nm^2 - n - m + 1 = n(m^2 - 1) - (m - 1) = n(m - 1)(m + 1) - (m - 1) \\ &= (m - 1)(n(m + 1) - 1) \end{aligned}$$

En el peor de los casos, de igual forma, la mínima puntuación que podrían obtener el resto de partidos sería si se diera el caso de que todos obtuvieran la misma puntuación. Esto es debido a que si se dieran dos partidos cualesquiera (B y C), tal que $B+C=x$, siendo x un

valor constante, que en este caso es el obtenido en la anterior operación, al disminuir B aumenta C para mantener esta cifra constante, por lo que la mínima puntuación se daría cuando $B=C$. Por tanto, si dividiéramos el resultado de la fórmula anterior entre $m-1$, es decir, el número de partidos que tienen la misma puntuación, ya que no contamos el partido A , obtendríamos $(n(m+1)-1)$.

$$(n(m+1)-1) = n(m+1) - 1 = nm + n - 1 < nm + m + n - 1$$

Al desarrollar esta fórmula obtenemos el resultado final $nm+n-1$, que representa la puntuación obtenida por cualquiera del resto de partidos con excepción del partido A . Como vemos, este número es menor que el resultado del susodicho partido, lo que significa que A nunca podría ser ganador en esta situación (recordemos que 1 es el máximo valor, y por tanto, aquel que tenga una menor puntuación es el ganador). De esta forma vemos que se cumple el principio de mayoría bis.

Para un número de votantes impar

En esta situación, el proceso es exactamente que en el caso anterior, y simplemente cambian ligeramente las fórmulas empleadas, aunque con idénticos resultados. La suma de las votaciones de todos los votantes sería

$$\sum i \frac{(1+m)m}{2} \cdot (2n+1) = \frac{(m^2+m)(2n+1)}{2} = \frac{2nm^2 + 2nm + m^2 + m}{2}$$

A continuación viene la puntuación del partido A así como la del resto de partidos y la comparación, con idénticos resultados a los anteriores:

$$a = (n+1)m + n = nm + n + m$$

$$\begin{aligned} \sum \text{puntuación del resto de partidos} &= \frac{2nm^2 + 2nm + m^2 + m}{2} - \frac{2nm + 2m + 2n}{2} = \frac{2nm^2 - 2n + m^2 - m}{2} \\ &\frac{2n(m+1)(m-1)}{2} + \frac{(m-1)m}{2} = \frac{(m-1)(2n(m+1)+m)}{2} \rightarrow \frac{2nm + 2n + 2m}{2} > \frac{2nm + 2n + m}{2} \end{aligned}$$

Este método, sin embargo, tampoco cumple el principio de mayoría según Condorcet, como podemos ver fácilmente a continuación: Imaginemos que tenemos 7 partidos ($a-g$) y cinco votantes ($A-E$), que realizan la siguiente votación.

Anexo 2. Principio de mayoría según Condorcet para posiciones medias. Fuente externa.

Es obvio que el ganador sería el partido b , ya que tiene la puntuación más alta, lo que además sirve de ejemplo para el principio que acabamos de demostrar, ya que el partido a , el cual tendría la mayoría en una votación uninominal, no puede ser nombrado ya que es rechazado por una mayoría de votantes. Esto podría hacernos creer que, por tanto, es el partido b el que es preferido a otro por una mayoría de electores.

Sin embargo, si realizamos un recuento de las veces que cada partido ha sido preferido por encima de otro, obtendríamos la siguiente tabla, a la cual nos referiremos como matriz de

Llull: en ella, los partidos que se encuentran a la izquierda, son comparados con cada uno de los que viene indicado en la fila superior, apuntando el número de votantes que lo han preferido sobre este en la anterior votación.

Anexo 3. Matriz de Llull para posiciones medias. Fuente externa.

Sabiendo que únicamente hay cinco votantes, aquellos partidos que hayan superado a otros en tres o más ocasiones son preferidos a ellos por una mayoría de votantes, y de acuerdo con ello, sería el partido **d**, no el **b**, aquel que debería ser el ganador si aplicáramos el principio de mayoría según Condorcet.

Este método tampoco tendría una gran robustez, puesto que sería fácil otorgarle la mínima puntuación a un partido que sepamos que tiene una gran popularidad, aunque realmente no fuera esa nuestra ordenación normal, consiguiendo disminuir su media de forma drástica.

De igual forma, tampoco cumple el principio de alternativas irrelevantes, puesto que si en el ejemplo anterior únicamente tratáramos con los partidos **b**, **c**, y **d**, pero mantuviéramos el orden de referencias, obtendríamos los siguientes resultados:

Anexo 4. Independencia local de alternativas irrelevantes para posiciones medias. Fuente externa.

Así, como en el caso de mayoría según Condorcet, también sería **d** el ganador. Por todos estos motivos, podríamos considerar que este método no es uno de los más adecuados. Sin embargo, con un ligero retoque, podemos llegar al siguiente método, que presenta muchas más ventajas.

4.1.4.b. Posiciones medianas

El método de posiciones medianas es igual que el método anterior con una mínima diferencia: en lugar de hallar la media de las puntuaciones otorgadas a un partido, obtendríamos su posición mediana. Este cambio, en apariencia carente de importancia, modifica totalmente las características que puede tener el método.

A diferencia del caso anterior, en esta ocasión si se cumple el método clásico de mayoría, como vamos a demostrar a continuación: Imaginemos que tenemos m partidos (lo que daría lugar a que las puntuaciones variaran entre un 1, siendo esta la máxima, y m , la mínima) y $2n$ votantes (para que sea par) o $2n + 1$ (impar).

Si nos pusiéramos en la más extrema de las situaciones posibles, en el caso de que el número de votantes fuera par, la mayoría de votantes, es decir $n+1$ le otorgarían la primera posición, y el resto ($n-1$) la última, es decir, m . Para hallar la mediana, sería necesario dividir a_n y a_{n+1} (las posiciones que han otorgado los votantes n y $n+1$). Como ambos habrían marcado un 1, esta sería su mediana, lo que le convertiría automáticamente en el ganador.

En el caso de que fuera un número impar de votantes, $2n+1$, sería todavía más sencillo, puesto que $n+1$ votantes lo pondrían en primer lugar, y $n-1$ en el puesto m . Como la mediana estaría en la posición n , de este modo también obtendría la primera posición.

De igual forma, utilizando la misma demostración, también podemos llegar a la conclusión de que se cumple el principio de mayoría bis. En un caso extremo, al igual que el caso anterior, el partido sería colocado en la posición m por una mayoría de personas ($n+1$) y dependiendo de si fuera par o impar, se obtendrían las medianas en función de a_n y a_{n+1} o a_n respectivamente, siendo en ambos casos la mediana m .

Otra ventaja que tiene este método, y que posiblemente pueda ser la más importante que posea, es su elevada robustez, de la que carecen el resto de procedimientos que hemos tratado anteriormente y que vamos a presentar. Esto es difícil de afirmar puesto que es una cualidad más subjetiva que objetiva, y lo cierto es que este método tampoco tiene la máxima robustez, sin embargo, esta es mayor que la del resto, puesto que al tomar la puntuación intermedia, el resto de puntuaciones se desprecian. Esto provoca que las puntuaciones más extremistas que se colocan con intención de disminuir la puntuación global de un partido no se tengan en cuenta, y no surjan efecto las estrategias de voto.

Las desventajas de este método son que no cumple ni el principio de mayoría según Condorcet, ni tiene independencia respecto a alternativas irrelevantes. Esto primero vamos a demostrarlo con las siguientes tablas:

Anexo 5. Principio de mayoría según Condorcet para posiciones medianas. Elaboración propia.

Anexo 6. Matriz de Llull para posiciones medianas. Elaboración propia.

En el primer caso, atendiendo a las posiciones medianas, **d** debería de ser el ganador, sin embargo, realizando la matriz de Llull llegamos a la conclusión de que si se cumpliera el principio de Condorcet, el ganador debería ser **c**.

En el siguiente ejemplo veremos que tampoco tiene alternativa de independencia a alternativas irrelevantes. Tomemos como ejemplo la siguiente votación:

Anexo 7. Independencia local de alternativas irrelevantes para posiciones medianas. Elaboración propia.

El partido **f** sería el ganador, seguido por el partido **b**. Sin embargo, si realizáramos una votación solo de esos dos partidos y sin alterar el orden de preferencias, descubriríamos que el partido **b** se colocaría por encima del **f**.

Anexo 8. Independencia local de alternativas irrelevantes para posiciones medianas 2. Elaboración propia.

4.1.4.c. Método de comparaciones

Este método, aunque sea la primera vez que nos referimos directamente a él, es uno que ya hemos estado tratando en los ejemplos anteriores, concretamente cuando utilizábamos la matriz de Llull para comparar la cantidad de veces que un partido es colocado por encima de otro. Esta es la esencia de este sistema.

Al igual que en los dos últimos casos, los votantes deben de ordenar todas las opciones en función de preferencia, y después se realiza la matriz para comparar entre sí los distintos resultados y aquel que sea preferido por encima del resto por una mayoría de votantes es el ganador. Esto provoca también que, por definición, cumpla el principio de mayoría según Condorcet.

Esto no provoca que el método no cumpla el principio clásico de mayoría, ya que si un partido tiene una mayoría absoluta, también ganará al resto de partidos en comparación una mayoría de veces. De igual forma, también cumple el principio de mayoría bis por la misma razón, puesto que si es puesto en último lugar por una mayoría de votantes, al compararlo con el resto nunca será capaz de obtener la mayoría.

También cumple el principio de independencia de alternativas irrelevantes, ya que aunque se eliminen un número determinado de partidos, las preferencias del resto de personas no variarán, y por tanto, las comparaciones tampoco.

Así, podemos comprobar que este método es uno de los mejores que hemos trabajado hasta el momento, ya que cumple un alto porcentaje de los principios que hemos propuesto. Su principal inconveniente es su falta de robustez, ya que una votación muy negativa podría alterar en gran medida los órdenes resultantes.

4.1.5. Criterio de coincidencia máxima

Este es un método bastante complejo de realizar, que requiere una larga explicación para entenderlo, por lo que, de entrada, esto se convierte en un inconveniente, ya que puede haber mucha gente que no entienda como se llegan a los resultados, y por tanto, se manifieste en contra. De igual forma, es un método demasiado largo, puesto que para más de 25 elementos sería casi imposible de realizar incluso para una computadora.

En esta ocasión, en lugar de otorgar a cada opción un número en función de nuestra preferencia, directamente se ordenan sin asignarles ningún valor: por ejemplo, p (el orden que establece un votante) $= a > b > c > d$. En función de las votaciones de los votantes, a los que nos referiremos como k , obtendríamos que $p^k = E$, que sería el orden final de los partidos, de forma que el que estuviera en primer lugar sería el elegido.

De esta forma, en un orden E_{xy} en el que se comparan los valores x e y , podría adoptar un valor de, o bien 1 si $E_{xy} = p_{xy}$, o bien 0 si esto no es cierto. A las coincidencias entre p y E las denominaremos $C(p, E)$ y sería igual a $\sum E_{xy}$. Aplicado a los diferentes órdenes p^k , $C(p^k, E) = \sum E_{xy}^k$. E sería el orden resultante siempre y cuando E_{xy}^k obtuviera su máximo valor posible. Dado que no existen k órdenes distintos, es necesario multiplicar el número de personas que tienen esas mismas preferencias con las coincidencias de estas con E_{xy} a la hora de obtener $C(p^k, E) = \sum E_{xy}^k$.

Por definición, se cumplirían tanto el principio de mayoría clásico como el principio de mayoría bis, debido a que si se diera el caso de que $a > b$, c , d , estas serían todas las relaciones que implican a a por lo que siempre será el que tenga más apoyos; esto mismo se cumpliría en el caso contrario, con el principio de mayoría bis. De igual forma, también cumple el principio de Condorcet, al igual que en el método de comparaciones, puesto que se basa literalmente en ellas.

Cumple el principio de independencia respecto a alternativas irrelevantes, debido a que un orden, como el que pusimos en el ejemplo al principio del apartado, puede subdividirse en multitud de pequeños órdenes: $a > b$, $a > c$, $a > d$, $b > c$..., de forma que si elimináramos una de las opciones, eliminaríamos sus subórdenes manteniendo inalterable el resultado final, puesto que el resto de relaciones permanecerían inalterables.

El problema es que se pueden producir ciclos de Condorcet (relaciones intransitivas entre los partidos). Por ello, existe otro método, el **método de ordenación de comparaciones**, que evita que esto se produzca, haciendo prevalecer aquellas relaciones con más apoyos sobre las que enuncian lo contrario (así, si 46 personas piensan que $b > a$, y 54 piensan que $a > b$, entonces $a > b$). Otro de los principales defectos de este sistema, es su llamativa falta de robustez, porque una mínima variación en el orden con intención de perjudicar a un partido, puede variar increíblemente el resultado final.

4.2. Sistemas de reparto de escaños

A continuación vamos a tratar los diferentes métodos de reparto de escaños. Esto generalmente es motivo de crítica en los diferentes países, debido a que generalmente se producen numerosas injusticias (al menos en la visión de la población media). Debido a ello, vamos a tratar de hacer un estudio objetivo de los múltiples sistemas, con la intención de aclarar el asunto y hallar su nivel de efectividad.

Podríamos dividir los sistemas de reparto de escaños en dos tipos: los de cocientes y los de cifra repartidora. En los primeros tenemos los métodos Hare-Niemeyer, Imperiali, y Droop, que se llevan a cabo en Alemania o Italia. Estos se basan en calcular una cifra q que se obtiene al dividir el número de votos válidos entre los escaños. Cada vez que el número de votos de un partido supere q , recibe un puesto. Sin embargo, los restos de votos de cada partido producidos al no volver a alcanzarse q da lugar a que sobren escaños, que se reparten generalmente con el método del resto mayor, alterando las normas de la proporcionalidad, siendo este su principal inconveniente.

En los métodos de cifra repartidora, como el D'Hont (el español) o el Sainte-Lagui nunca sobran escaños, sin embargo, su proporcionalidad depende demasiado del número de estos, dando lugar también a varios "errores".

4.2.1. Método de circunscripciones

Este método es el que se sigue en países como, por ejemplo, Reino Unido, y en el cual se divide el estado en diferentes partes, cada una con un número similar de votantes, cada una de las cuales dará lugar a un parlamentario. El número de circunscripciones es el número de escaños disponibles.

El problema de este método es que como no se realiza la votación a nivel estatal puede darse la situación de que un partido con un número de votos menor a otro, pueda obtener mucha más representación debido a que estos están mucho más localizados.

El sistema electoral de Reino Unido combina el método D'Hont, del que hablaremos posteriormente, con el método de circunscripciones, lo que provoca que a los problemas del susodicho sistema incorpore los que acabamos de ver en este apartado.

4.2.2. Método de Hare-Niemeyer

Como explicamos anteriormente, al ser un método de cocientes, se obtiene un número q al dividir m (el número de votos válidos) entre n (el número de escaños). Imaginemos que tenemos I partidos, uno de ellos, i , obtiene m_i votos, por lo que le corresponden e_i escaños y se generan r_i votos residuales, los cuales no se tienen en consideración.

De esta forma, podemos enunciar que $m_i = q e_i + r_i$; lo cual da lugar a que si dividimos m_i entre q y truncáramos el resultado, obtendríamos el número de escaños que le corresponden al susodicho partido.

El inconveniente de este método, como es claramente evidente, es que al truncar el resultado, se produce un error consistente en el desprecio de ese número de votos, provocando que esos votantes no hayan llegado a tener representación real. El máximo error que se puede producir es de $q-1$ votos, puesto que si se llega a más de q votos, aumenta en uno e_i . Sin embargo, esto puede producirse con todos los partidos, así que para hallar realmente el máximo error, habría que multiplicar este número por el número de candidatos.

Para ilustrar esto, hemos realizado un ejemplo en el que hemos aplicado este método a las elecciones españolas de 2011. Debido a que en ese año hubo 24 millones de votantes y se repartieron 350 escaños, q_E habría sido aproximadamente 70475. En función de esto, llegamos a la conclusión de que pueden desperdiciarse un máximo de 70474 votos por partido. Considerando que hubo cerca de 17 partidos, serían en total 1198058 ciudadanos que no habrían tenido representación en estas elecciones, es decir, prácticamente un 5% de la población española. Para hacer estos cálculos no hemos tenido en cuenta el reparto

de residuos, que como se realiza independientemente de los votos, no alteraría el resultado.

Para repartir los escaños restantes se utiliza el método del resto mayor, que explicaremos en su correspondiente apartado.

4.2.3. Fórmula Imperiali

La fórmula Imperiali es un sistema que se llevaba a cabo en Italia. Al ser otro método de cociente, es muy parecido al que acabamos de ver, con la diferencia de que al calcular q , se suma 2 al número real de escaños. Esto sirve para beneficiar a los partidos mayoritarios, ya que al tener un mayor número de votos, reciben todavía más escaños, mientras que los minoritarios prácticamente no notan esta diferencia.

Imaginemos un partido A, que posee n votos, y un partido B, posee mn votos, siendo m el número de veces que B supera al partido A; y dos cocientes distintos, q_1 y q_2 , siendo este último p veces más pequeño que el primero, es decir

$$q_2 = \frac{q_1}{p}$$

Si aplicáramos los dos cocientes a ambos partidos obtendríamos los siguientes resultados:

$$(q_1) \quad {}^e B_1 = \frac{m \cdot n}{q_1} = m \cdot {}^e A_1; \quad {}^e A_1 = \frac{n}{q_1} \quad (q_2) \quad {}^e B_2 = \frac{m \cdot n}{q_2} = \frac{n \cdot m}{\frac{q_1}{p}} = p \frac{m \cdot n}{q_1} = p \cdot m \cdot {}^e A_1$$

$${}^e A_2 = \frac{n}{q_2} = \frac{n}{\frac{q_1}{p}} = p \frac{n}{q_1} = p \cdot {}^e A_1$$

De esta forma podemos comprobar que en el segundo caso, en el cual el cociente es menor, ambos partidos reciben un mayor número de escaños, sin embargo, al comparar el beneficio de ambos obtenemos lo siguiente:

$$\text{Beneficio de B con } q_2 \text{ respecto a } q_1 = p \cdot m \cdot {}^e A_1 - m \cdot {}^e A_1 = m \cdot {}^e A_1 (p - 1) \text{ escaños}$$

$$\text{Beneficio de A con } q_2 \text{ respecto a } q_1 = p \cdot {}^e A_1 - {}^e A_1 = {}^e A_1 (p - 1) \text{ escaños}$$

Así, el beneficio de B sería m veces mayor que el beneficio de A, lo que demuestra que el sistema favorece a los mayoritarios sobre los minoritarios.

Sin embargo, al reducir q , también se reduce el error máximo respecto al cociente Hare-Niemeyer, reduciendo también el número de escaños sin asignar.

Si aplicáramos este método a España, obtendríamos en esta ocasión que q sería igual a 68182, siendo esta vez el error máximo de 68181 votos, que multiplicado por el número de partidos daría lugar a 1159077, el 4,8% de todos los votantes.

4.2.4. Cociente Droop

Este es el último de los métodos de reparto de escaños por cociente. En esta ocasión, este es igual a Hare-Niemeyer, pero en la fórmula se le suma uno tanto al resultado final, como al número de escaños. Eso nos lleva a desarrollar la fórmula hasta aquí:

$$q = \frac{n+1+m}{n+1} = \frac{m+n+1}{n+1}$$

Si a este resultado le restamos el obtenido en el método Hare-Niemeyer, obtenemos las siguientes conclusiones:

$$q = \frac{m+n+1}{n+1} - \frac{m}{n} = \frac{n(m+n+1) - (n+1)m}{n(n+1)} = \frac{nm + n^2 + n - nm - m}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n - m}{n(n+1)} = \frac{n(n+1) - m}{n(n+1)}$$

Este resultado lo podemos simplificar en el siguiente, que nos demuestra que mientras m sea mayor que n^2+n (lo que ocurre en la mayor parte de los casos), el cociente Droop será menor que el susodicho Hare-Niemeyer, y por la misma razón que hemos demostrado en la fórmula Imperiali, beneficiará más a los mayoritarios:

$$1 - \frac{m}{n(n+1)}$$

4.2.5. Método del resto mayor

Este es un método para el reparto de residuos que se lleva a cabo en el cociente Hare-Niemeyer, la fórmula Imperiali y el cociente Droop, en función de los residuos resultantes.

Representaremos el número de escaños que no han sido obtenidos por cociente mediante la letra k , donde $k = n - \sum e_i$. Estos son repartidos asignándoselos a los k mayores restos r_i .

Este método tiene numerosas contras, ya que se pierde mucha proporcionalidad, sin embargo, se reduce el número de votos que quedan sin representación. Pueden cometerse injusticias como que un partido que solo difiera del anterior en un voto, posea un escaño más. Finalmente, y aunque no suela darse el caso, también puede ocurrir que al redondear se le dé el mismo valor a los $q-1$ votos restantes, que a 1.

4.2.6. Sistema D'Hondt

Este método es, al contrario que los anteriores, un sistema de cifra repartidora, en el cual, una vez realizado el escrutinio, se divide el número de votos de cada partido entre n (el número total de escaños). Tras esto, se ordenan los resultados de las divisiones de todos los partidos de mayor a menor, y se asigna un escaño a los n mayores. El objetivo de esto es que si un partido tiene n votos y e escaños, otro que tenga mn votos debe tener me escaños.

Dados dos partidos, A y B, donde A tiene n votos y B, mn , podemos construir la siguiente tabla:

Anexo 9. Sistema D'Hondt. Elaboración propia.

El principal problema de este método es que es excesivamente dependiente del número de escaños. Como podemos ver en la tabla, un partido B con m veces más votos que A, obtiene $2m-1$ veces más escaños que A, a causa de que solo hay $2m$ escaños. Si fueran, por el contrario, $2m+2$, este tendría m veces más escaños que A, como le corresponde.

Al no cumplirse esto necesariamente, el error puede aumentar hasta cifras bastante alarmantes, tanto como $m-1$ escaños “de más” por parte del partido mayoritario. Lo cual, evidentemente, demuestra que este método beneficia claramente a los partidos mayoritarios sobre los minoritarios.

Por ejemplo, imaginemos que para repartir 99 escaños, el partido A tiene 50 votos, y el B, únicamente uno. Esto provocaría que A, acabara con 98 escaños, frente a 1 por parte de B.

4.2.7. Método Sainte-Laguë

Este método de cifra repartidora se lleva a cabo en países como Noruega o Suecia. En este caso, se divide el número de votos que ha recibido un partido entre 1 más el número de escaños que posee hasta el momento multiplicado por dos. Aquel que tenga la puntuación más alta recibe un escaño hasta que se complete el número de asientos disponibles.

A continuación vamos a introducir un ejemplo, en el que trabajaremos con 5 partidos, 10 escaños, y 50000 votos. Estos serían los resultados:

Anexo 10. Método Sainte-Laguë. Elaboración propia.

Este método beneficia más a los partidos pequeños que el D'Hont, aunque es más equilibrado para todos que este sistema. Si lo aplicáramos a las elecciones españolas de 2011, el resultado de este método sería (sin contar con las circunscripciones) el siguiente:

Anexo 11. Método Sainte-Laguë aplicado a España. Elaboración propia.

De esta comparación se obtiene que el método Saint-Laguë es más representativo que el D'Hondt (en el caso de España y sin divisiones territoriales habría 146185 votantes representados), por lo que desde ese punto de vista es mejor. Sin embargo, el fallo del reparto de escaños del método D'Hondt es la división territorial, que hace que por ejemplo EQUO, con casi 216000 votantes, no tenga ningún escaño en el congreso, mientras que el PNC (con alrededor de 14500 votos) tenga 2 escaños. Aquí podemos ver un ejemplo gráfico de lo que fueron estas elecciones de 2011:

Anexo 12. Resultado de las elecciones democráticas españolas de 2011. Fuente externa.

4.2.8. Método TEJA (nuestro método)

Vistos los numerosos problemas que presentan los diferentes métodos electorales, hemos tratado de crear un nuevo sistema más justo que los anteriores. Lo hemos denominado el método TEJA.

Para poder expresarlo con claridad, hemos decidido definir con p a los partidos que se presentan, v al número de votos, y e al número de escaños. Para hallar el número de escaños que recibe un partido se divide su número de votos entre el total, y se multiplica por el número total de escaños. Esta cifra, prácticamente siempre decimal, se aproxima según una condición, que se define más abajo.

Para llevar a cabo esa condición, vamos a definir tres conceptos: error, error medio, y desviación media del error. El primero de ellos es igual al valor absoluto de la diferencia

entre el número de escaños que recibe un partido y la operación realizada para obtenerlos ($e_i - e \cdot v_i/v$). El segundo es igual a la media de los errores de los diferentes partidos. El último de ellos es la media entre el error medio menos el error de todos los partidos.

Evidentemente, a la hora de calcular el número de escaños que le corresponden a uno de los partidos, es muy improbable que el resultado sea exacto. Debido a ello, a la hora de aproximar, el número debe de acercarse a uno de los dos enteros que le rodean teniendo en cuenta una condición:

El conjunto de aproximaciones realizadas para cada partido será el definitivo si y sólo si, de todas las opciones posibles, su error medio es el más bajo. En caso de que hubiera un empate, sería el definitivo aquél que tuviera la desviación media más baja. En caso de persistir el empate, aquél que tuviera, de entre los errores “particulares” de cada opción, el error más alto, sería descartado. Para ello es necesario probar todas las opciones posibles. Así, el número de opciones en función de p es:

$$\text{para } p \text{ par : } n^\circ \text{ de opciones} = \frac{p!}{(\frac{p}{2})! (\frac{p}{2})!} = \frac{p!}{[(\frac{p}{2})!]^2}$$

$$\text{para } p \text{ impar : } n^\circ \text{ de opciones} = \frac{p!}{(p-\frac{1}{2})! (p-\frac{1}{2})!} = \frac{p!}{([p-\frac{1}{2}]!)^2}$$

Esto es así debido a que si p es par, si en $p/2$ partidos se opta por aproximar hacia arriba, los $p/2$ partidos restantes necesariamente deben aproximarse hacia abajo para que se mantenga el número de escaños preestablecidos, luego ya están determinados, lo que significa que el número de opciones son las combinaciones de p elementos, cogidos de $p/2$ en $p/2$, o sea, $p!/((p/2)!)^2$, y no $p!$.

Si p es impar, por el contrario, si en $p-1/2$ partidos se opta por aproximar hacia arriba, los $p+1/2$ partidos restantes necesariamente deben aproximarse hacia abajo para que se mantenga el número de escaños preestablecido, luego ya están determinados, lo que implica que el número de opciones son las combinaciones de p elementos, cogidos de $p-1/2$ en $p-1/2$, es decir, $p!/(((p-1)/2)!)^2$, y no $p!$.

Dado que, como es evidente, el número de opciones aumenta muy rápidamente, se complica con no muchos partidos. Por eso, en este método se establece un listón consistente en que todos aquellos partidos que no opten a un escaño, es decir, aquellos en

los que $e \frac{v_i}{v} < \frac{1}{2}$, no se tienen en cuenta, así como no se consideran sus votos en el total a la hora de ejecutar el método propiamente dicho: sólo se cuentan los votos de los partidos que superen el listón. Esto puede parecer injusto, pero, al ser partidos que no iban a recibir escaños, estos votos habrían “caído en saco roto” de cualquier otra forma.

Lo que se pretende en el diseño de este método es:

- 1) Que los escaños obtenidos por un partido se acerquen al máximo posible a la fracción de los votos totales obtenida por este partido.
- 2) Reducir el error al máximo.
- 3) Que dentro del error cometido, este sea similar para todos los partidos, sin que se beneficie o perjudique a uno por encima de cualquier otro.

Si lo aplicáramos a las elecciones provinciales de 2011 en Sevilla obtendríamos la siguiente tabla:

Anexo 13. Método TEJA. Elaboración propia.

5. CONCLUSIÓN

Tras realizar este trabajo hemos comprobado que pese a sus numerosos defectos, el método predominante de un solo ganador es el uninominal, puesto que es utilizado a nivel global, posiblemente por su sencillez. Sin embargo, a lo largo de este trabajo hemos presentado una serie de alternativas viables que quizá pudieran sustituirlo.

Respecto a los métodos de reparto de escaños, todos los métodos aquí tratados benefician a los mayoritarios o a los minoritarios, y no hay ningún método que los trate a todos por igual. Debido a ello hemos creado nuestro propio sistema, el método TEJA, que pese a ser en principio un proyecto bastante ambicioso, consideramos sus resultados bastante aceptables.

6. BIBLIOGRAFÍA

- La Gaceta de la RSME, Vol. 13 (2010), Núm. 3, Págs. 471-498, *Votar: No tan fácil como parece, ¡pero podríamos hacerlo mejor!* por Xavier Mora
- Accurate Democracy · Electoral and Legislative Voting Rules, desde 1996. <http://accuratedemocracy.com/>
- Electorama! Y Election Methods Mailing List, desde 1996. <http://electorama.com/>.
- <http://sintesisnialisis.com/2012/10/30/sistemas-electorales-cinc-modelos-comparados/>
- <http://sintesisnialisis.com/2011/11/21/como-quedarian-las-elecciones-con-diferentes-sistemas-electorales/>
- http://www.ife.org.mx/documentos/DECEYEC/sistemas_electorales_y_de_partid.htm
- <http://www.portalelectoral.es/mapas/prueba1.htm>

7. ANEXOS

- *Anexo 1. Mayoría uninominal para posiciones medias. Elaboración propia*

	A	B	C	D	E	Media
a	1	1	1	4	4	2,2
b	2	2	2	2	2	2
c	4	4	4	1	1	2,8
d	3	3	3	3	3	3

- *Anexo 2. Principio de mayoría según Condorcet para posiciones medias. Fuente externa.*

	A	B	C	D	E	Media
a	1	1	7	7	7	4,6
b	4	2	3	3	1	2,6
c	2	6	2	4	2	3,2
d	3	3	1	2	5	2,8
e	6	4	5	6	4	5
f	7	5	6	1	3	4,4

<i>g</i>	5	7	4	5	6	5,4
-----------------	---	---	---	---	---	-----

- Anexo 3. Matriz de Llul para posiciones medias. Fuente externa.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
<i>a</i>	-	2	2	2	2	2	2
<i>b</i>	3	-	3	2	5	4	5
<i>c</i>	3	2	-	2	4	3	5
<i>d</i>	3	3	3	-	4	3	5
<i>e</i>	3	0	1	1	-	3	2
<i>f</i>	3	1	2	2	2	-	3
<i>g</i>	3	0	0	0	3	2	-

- Anexo 4. Independencia local de alternativas irrelevantes para posiciones medias. Fuente externa.

	A	B	C	D	E	Media
<i>b</i>	3	1	3	2	1	2
<i>c</i>	1	3	2	3	2	2,2
<i>d</i>	2	2	1	1	3	1,8

- Anexo 5. Principio de mayoría según Condorcet para posiciones medianas. Elaboración propia.

	A	B	C	D	E	Mediana
<i>a</i>	4	3	1	2	4	3
<i>b</i>	3	4	4	1	1	3
<i>c</i>	1	1	3	3	3	3
<i>d</i>	2	2	2	4	2	2

- Anexo 6. Matriz de Llul para posiciones medianas. Elaboración propia.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	Recuento
<i>a</i>	-	2	2	2	0
<i>b</i>	3	-	2	2	1
<i>c</i>	3	3	-	3	3
<i>d</i>	3	3	2	-	2

- Anexo 7. Independencia local de alternativas irrelevantes para posiciones medianas. Elaboración propia.

	A	B	C	D	E	Mediana
<i>a</i>	5	6	4	3	3	4
<i>b</i>	6	4	3	1	1	3
<i>c</i>	2	2	5	6	6	5
<i>d</i>	4	3	1	4	4	4

<i>e</i>	1	1	6	5	5	5
<i>f</i>	3	5	2	2	2	2

- *Anexo 8. Independencia local de alternativas irrelevantes para posiciones medianas 2. Elaboración propia.*

	A	B	C	D	E	Mediana
<i>b</i>	2	1	2	1	1	1
<i>f</i>	1	2	1	2	2	2

- *Anexo 9. Sistema D'Hondt. Elaboración propia.*

	$x/1$	$x/2$	$x/3$	$\dots$ x/m	$x/m+1$	$\dots$ $x/2m-1$	$x/2m$
A	n	$n/2$	$n/3$	n/m	$n/m+1$	$n/2m-1$	$n/2m$
B	mn	$(m/2)n$	$(m/3)n$	n	$(m/m-1)n$	$(m/2m-1)n$	$n/2$

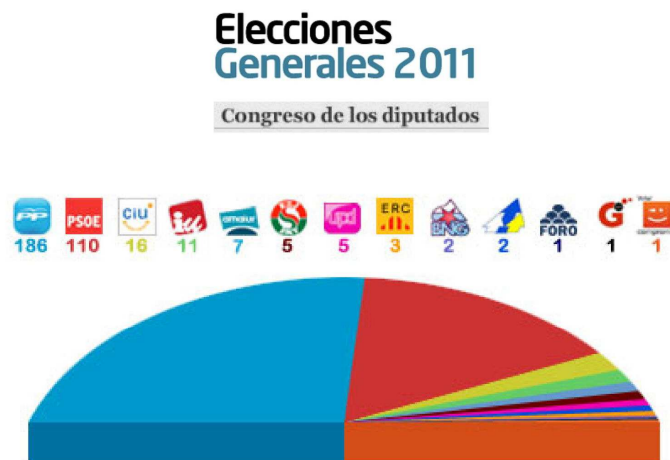
- *Anexo 10. Método Sainte-Laguë. Elaboración propia.*

	$x/1$	$x/3$	$x/5$	$x/7$	$x/9$	Total de escaños
A	22500	7500	4500	3214	2500	5
B	15000	5000	3000	2142	1667	3
C	7000	2333	1400	1000	778	1
D	4000	1333	800	571	444	1
E	1500	500	300	214	167	0

- *Anexo 11. Método Sainte-Laguë aplicado a España. Elaboración propia.*

	Saint-Laguë	D'Hondt sin circunscripciones	D'Hondt con circunscripciones
PP	159	164	186
PSOE	103	105	110
IU	25	25	11
UpyD	17	17	5
CiU	15	15	16
PNV	5	4	5
AMAIUR	5	5	7
ERC	4	3	3
BNG	3	4	4
EQUO	3	3	0
PNC	2	2	2
Compromís-Q	2	3	3
FAC	1	1	1
GBAI	1	0	1
PACMA	1	1	0
Escaños en blanco	1	1	0
PA	1	1	0
PxC	1	0	0
PRC	1	0	0

- Anexo 12. Resultado de las elecciones democráticas españolas de 2011. Fuente externa.



- Anexo 13. Método TEJA. Elaboración propia.

	Método TEJA	Elecciones reales (D'Hondt con circunscripciones)
PSOE	554 (concejales)	663
PP	525	380
IU	205	280
PA	109	104
UPyD	30	4
Los verdes	8	0