

Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Cuarta Edición, 2009/2010

TRABAJO: De las 2D a las 4D

FINALISTA EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

- o Antonio Mejías Gil
- o Víctor Luque Padilla
- o Asier Castillo Verona

TUTOR:

- o Emanuel Sánchez Moreno

CENTRO: Colegio Padre Manyanet (Alcobendas, Madrid)

AUTÓNOMA 40 años



Índice

1. OBJETIVOS	PÁG. 3
2. ANTECEDENTES 2D	PÁG. 4
2.1. DEFINICIÓN GRADOS DE LIBERTAD	
2.2. CÓNICAS	
3. RESULTADOS	PÁG. 10
3.1 SUPERFICIES TRIDIMENSIONALES	
3.2. ECUACIONES TETRADIMENSIONALES	
4. CONCLUSIONES	PÁG. 20
Y CONTINÚA...	
5. BIBLIOGRAFÍA	PÁG. 22
6. ANEXOS	
FICHEROS CON VIDEOS	

1. Objetivos

El objetivo que nos hemos propuesto con este trabajo era el de poder hacer una transición desde las gráficas de dos dimensiones (con ejes x e y) hacia modelos de mayor número de dimensiones.

Partiendo de las curvas cónicas en 2D, pasar a la tercera dimensión, añadiendo una nueva a los objetos bidimensionales (teniendo así x , y y z), y por último llegar a la realidad de nuestro universo (que podemos percibir): 4 dimensiones.

Lo hemos enfocado desde un punto de vista bastante clásico: las 2D y 3D serán espaciales, y la cuarta será el tiempo, aunque hay muchas otras posibilidades.

Pretendíamos así entender un poco mejor las 4 dimensiones, que tan poco intuitivas resultan al principio, construyendo nuestras propias bases teóricas a partir de las curvas cónicas investigadas por los matemáticos griegos. Así, basándonos en sus teorías y ecuaciones, hemos ido desarrollando, o justificando, los resultados para más dimensiones.

Hemos usado varios programas para realizar el trabajo: Por un lado, el *GeoGebra* para las cónicas; por otro, con *Archim* hemos representado las 3D (en vista de que *Derive* nos daba muchos problemas); para las 4D hemos hecho varias secciones de cada vídeo en diferentes t , y las hemos unido usando el programa *Windows Movie Maker*.

2. Antecedentes

2.1. Definición de Grados de Libertad

Los grados de libertad de una función representan las dimensiones que dicha función atravesara.

Si tenemos cero grados de libertad nos encontramos con un universo adimensional en el que solo cabe un punto.

Si tenemos un grado de libertad, quiere decir que el universo tiene una dimensión y por lo tanto la superficie a representar seria una recta. Un punto perteneciente a este universo solo podría moverse de izquierda a derecha.

En el caso de que tuviéramos dos grados de libertad, nos encontraríamos con un universo bidimensional ocupado por un plano en el que los puntos y rectas se podrían mover de izquierda a derecha pero también de arriba a abajo.

En un universo en el que tuviéramos tres grados de libertad, tendríamos tres dimensiones. Este universo estaría ocupado por “un espacio tridimensional” y en el los planos, las rectas y los puntos podrían moverse de izquierda a derecha, de arriba a abajo y de atrás a adelante.

Teniendo en cuenta que una recta es una sucesión infinita de puntos, un plano es una sucesión infinita de rectas y “un espacio tridimensional” es una sucesión infinita de planos. Podemos definir “un espacio tetradimensional” como una sucesión infinita de “espacios tridimensionales”. Este universo estaría regido por cuatro grados de libertad y los puntos, planos, y “espacios tridimensionales” podrían moverse de derecha a izquierda, de arriba a abajo, de atrás a adelante y además se moverían en el tiempo de antes a después.

Si proyectamos un objeto de x dimensiones sobre un universo de $x-1$ dimensiones, el objeto pierde una de sus dimensiones. Por ejemplo: si proyectamos un cubo de tres dimensiones sobre un plano de dos dimensiones, el cubo pierde una dimensión y se convierte en un cuadrado, perdiendo a su vez un grado de libertad. A su vez si proyectamos un plano de dos dimensiones en un universo de una dimensión, el plano se convierte en una recta, pero una sucesión infinita de esa recta daría como resultado ese plano del que provenía, recuperando el grado de libertad perdido. Así mismo un objeto de cuatro dimensiones proyectado en un universo de tres dimensiones seria un objeto tridimensional que ya no se movería en el tiempo o por el contrario un objeto bidimensional que seguiría moviéndose en el tiempo.

Este hecho de que de una proyección se den dos resultados diferentes tiene su motivo en la perdida de simetría del objeto en cuestión, por lo que se daría en cualquier objeto no simétrico.

Cada ecuación quita, por tanto, un grado de libertad al sistema. Por eso para resolver un sistema con n variables (n grados de libertad), necesitamos n ecuaciones, que reducirán la libertad a 0: el punto en que se cruzan todas las superficies, esto es, en el que se cumplen todas las ecuaciones.

2.2. Cónicas

Historia

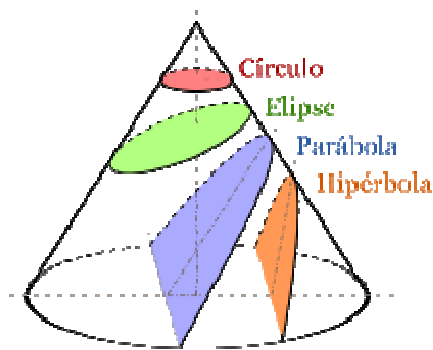
Su descubridor fue el matemático griego **Menecmo** (350 a.C.) y otro matemático griego, **Apolonio**, (262-190 a.C.), el primero en estudiarlas y encontrar una propiedad plana que definía a cada una de estas curvas y las clasificó en tres tipos: **elipses**, **parábolas** e **hipérbolas**.

- Las **elipses** se obtienen cortando una superficie cónica por un plano que no se encuentre paralelo a ninguna generatriz.
- Las **parábolas** son las curvas obtenidas de cortar una superficie cónica por un plano paralelo a una generatriz.
- Las **hipérbolas** se obtienen al cortar una superficie cónica por un plano que es paralelo a la generatriz de la base y la generatriz de una arista.

Las propiedades más útiles que descubrió Apolonio sobre las cónicas son sus propiedades de **reflexión**, es decir, si se construyen espejos con forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen unos espejos tal que si son expuestos a una fuente de luz en uno de sus focos, la luz se concentra en el otro.

En el siglo XVI el matemático **René Descartes** (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la llamada **Geometría Analítica**. Con esto se pueden presentar las curvas cónicas por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y .

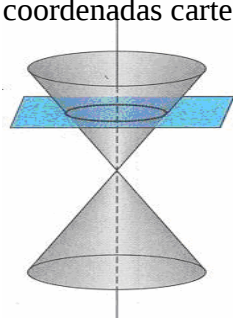
Sin lugar a duda las cónicas son las curvas más importantes que la geometría ofrece a la física.



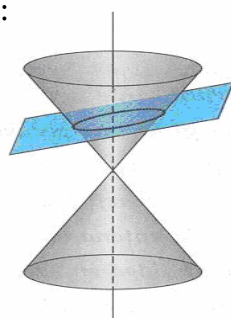
Obtención

Las cónicas se obtienen al cortar la superficie de un cono con un plano (que no pase por el vértice). Describen los movimientos celestes y de las partículas, son estructuras ideales para la arquitectura, se usan en telecomunicaciones...

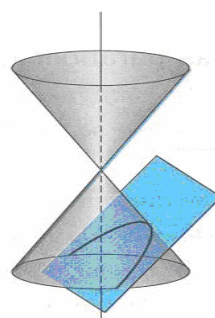
Son cuatro, cada una tiene sus propiedades, y una ecuación que la dibuja en las coordenadas cartesianas:



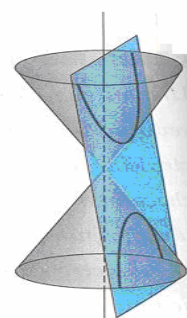
Circunferencia



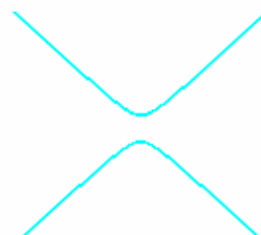
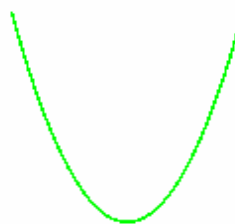
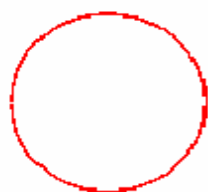
Elipse



Parábola



Hipérbola



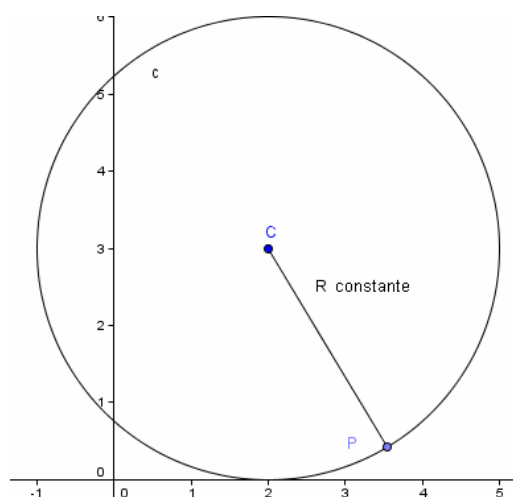
Circunferencia:

Se obtiene cuando el plano secante es paralelo a la base del cono, y es la curva que encierra un círculo.

Se define como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan del centro (que es otro punto). La distancia que guarda cada punto con el centro es el radio.

Es decir, es el conjunto de todos los puntos P tal que

$$PC = R$$



Siendo R constante, el radio, C el centro, y PC la distancia de P a C

La ecuación que traza una circunferencia en las coordenadas cartesianas es:

$$(x - a)^2 + (x - b)^2 = r^2$$

Donde (a, b) es la coordenada del centro y r el radio.

Elipse:

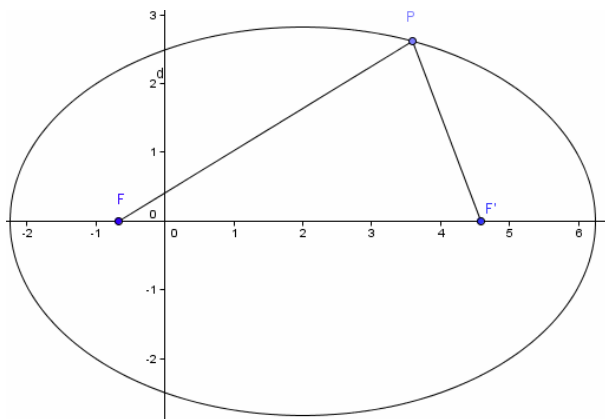
Resulta de seccionar el cono con un plano que no corte la base ni sea paralelo a ella.

Está formada por todos los puntos cuya su distancia a un foco + su distancia al otro foco es una constante.

Es decir, es el conjunto de todos los P tal que

$$PF + PF' = k$$

Siendo k constante, F y F' los dos focos, y PF y PF' las distancias a estos.



La ecuación de la elipse en los ejes cartesianos:

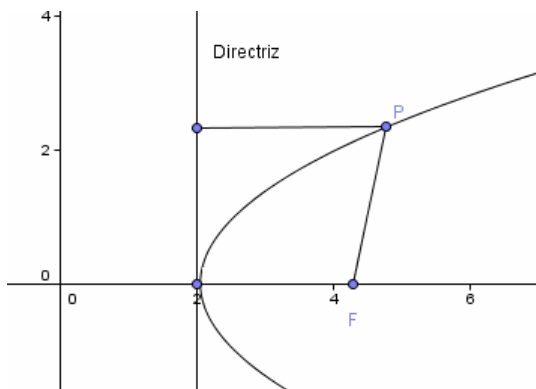
$$\left(\frac{x-a}{s}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{t}\right)^2 = k$$

Siendo (a, b) la coordenada en la cual está centrada la elipse, y s y t los semiejes horizontal y vertical respectivamente (los semiejes son la mitad de los diámetros)

Se puede ver la circunferencia cuyos focos son el mismo punto.

Parábola:

La obtenemos al seccionar el cono con un plano que corta a la base, y cuya inclinación está entre 0° y la inclinación de la generatriz



La componen todos los puntos cuya distancia a un foco y cuya menor distancia a una línea (directriz, D) es la misma.

Esto es, todos los P tal que

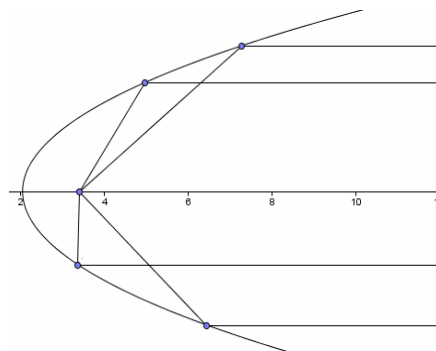
$$PF = PD$$

Su fórmula en las coordenadas cartesianas es:

$$y^2 = 2px$$

En esta, p es la distancia entre el foco y la directriz, aunque hay otras fórmulas más complejas.

La parábola tiene la característica de que cualquier línea perpendicular a la directriz que la interseque será redirigida hacia el foco: Por ello se usa, entre otras cosas, para concentrar rayos de luz en un punto concreto.

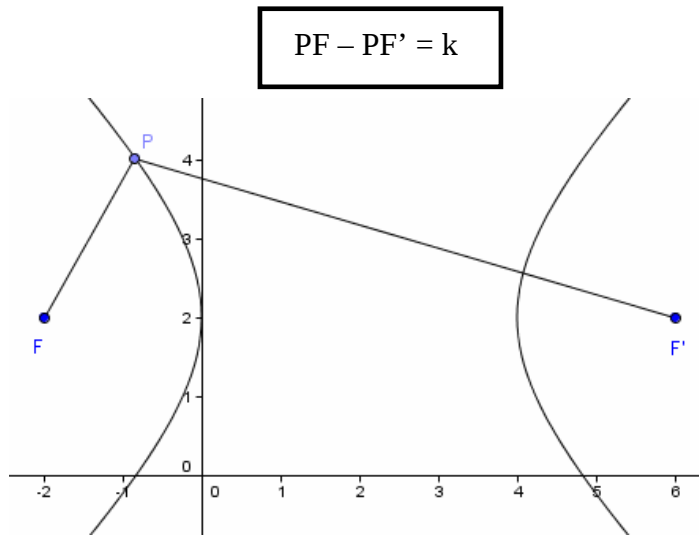


Hipérbola:

Resulta de cortar el cono por un plano cuya inclinación es mayor que la de la generatriz.

Es el conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a dos focos es constante.

Esto es,



Su definición es similar a la de la elipse, y visualmente, se puede ver una relación.

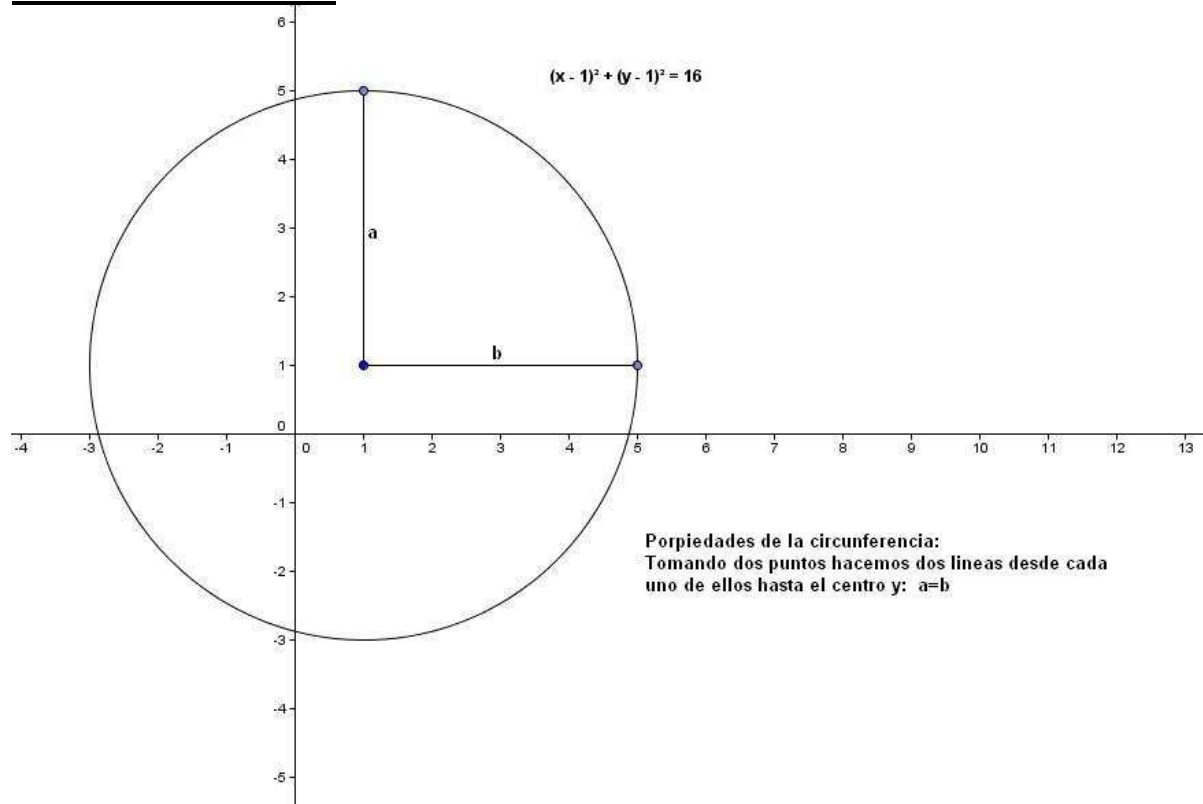
Con respecto a la fórmula que la traza, pues es igual a la de la elipse, pero obviamente se cambia el signo de suma por uno de diferencia:

$$\left(\frac{x-a}{s}\right)^2 - \left(\frac{y-b}{t}\right)^2 = k$$

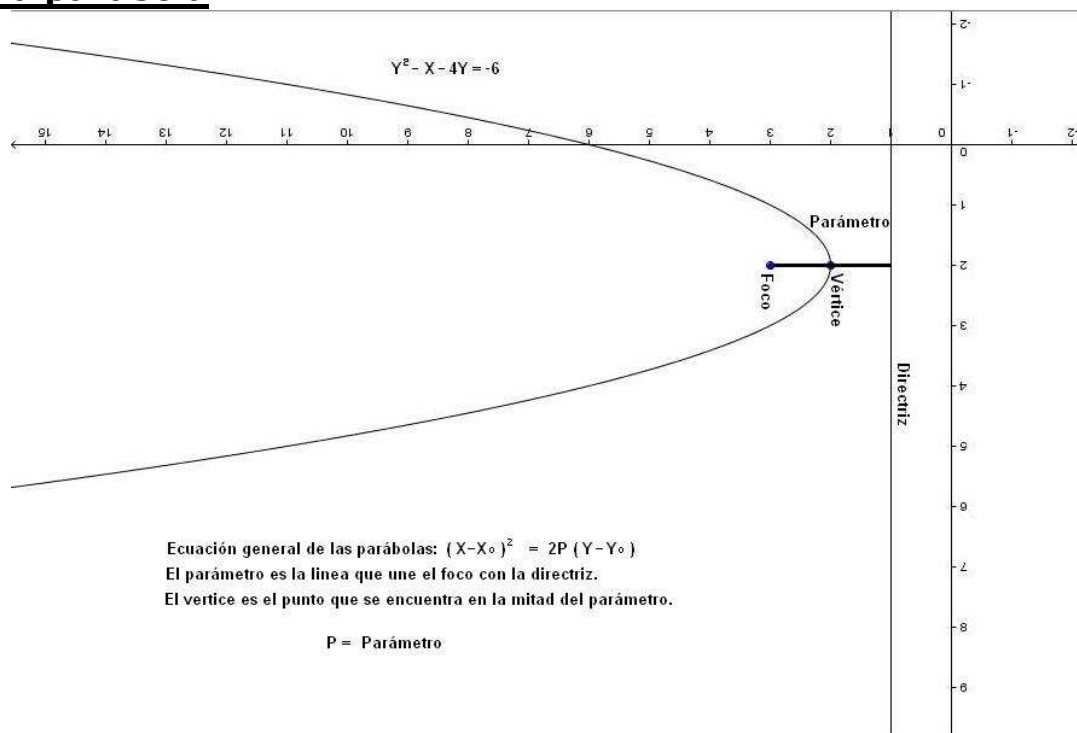
Recordemos que (a, b) es la coordenada central y s y t indican su relación longitud-altura.

Ejemplos de las Cónicas representadas

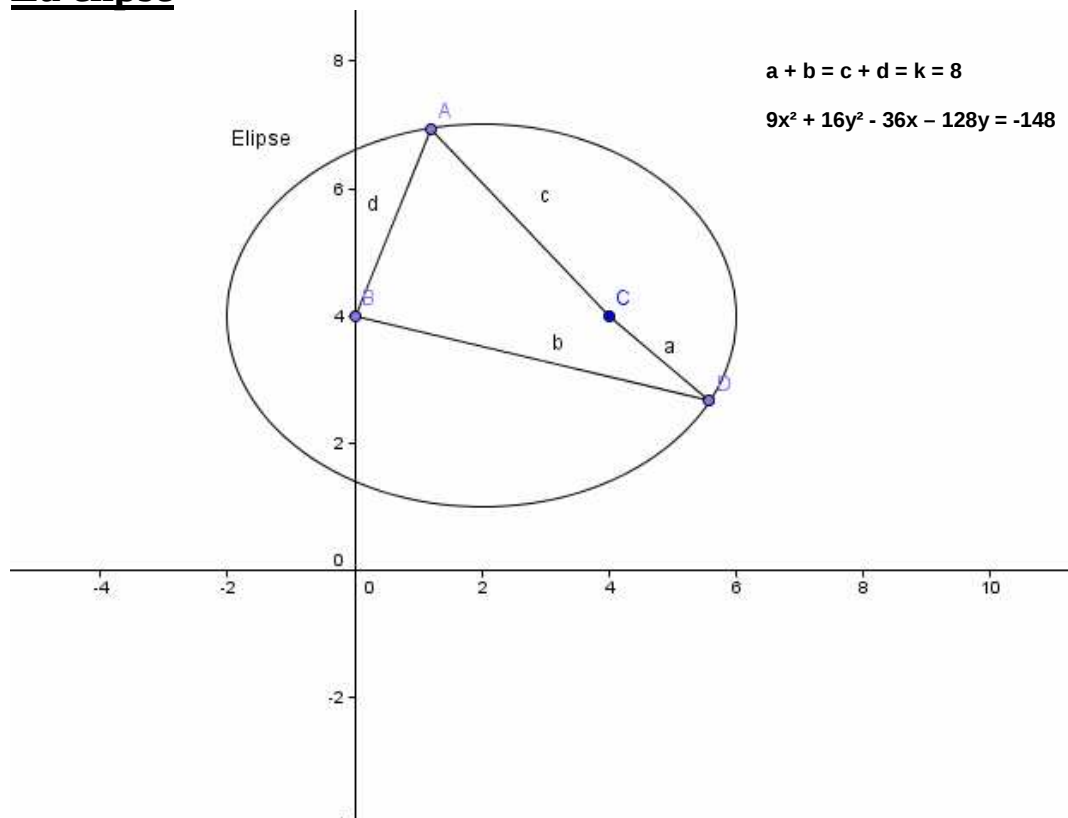
La circunferencia



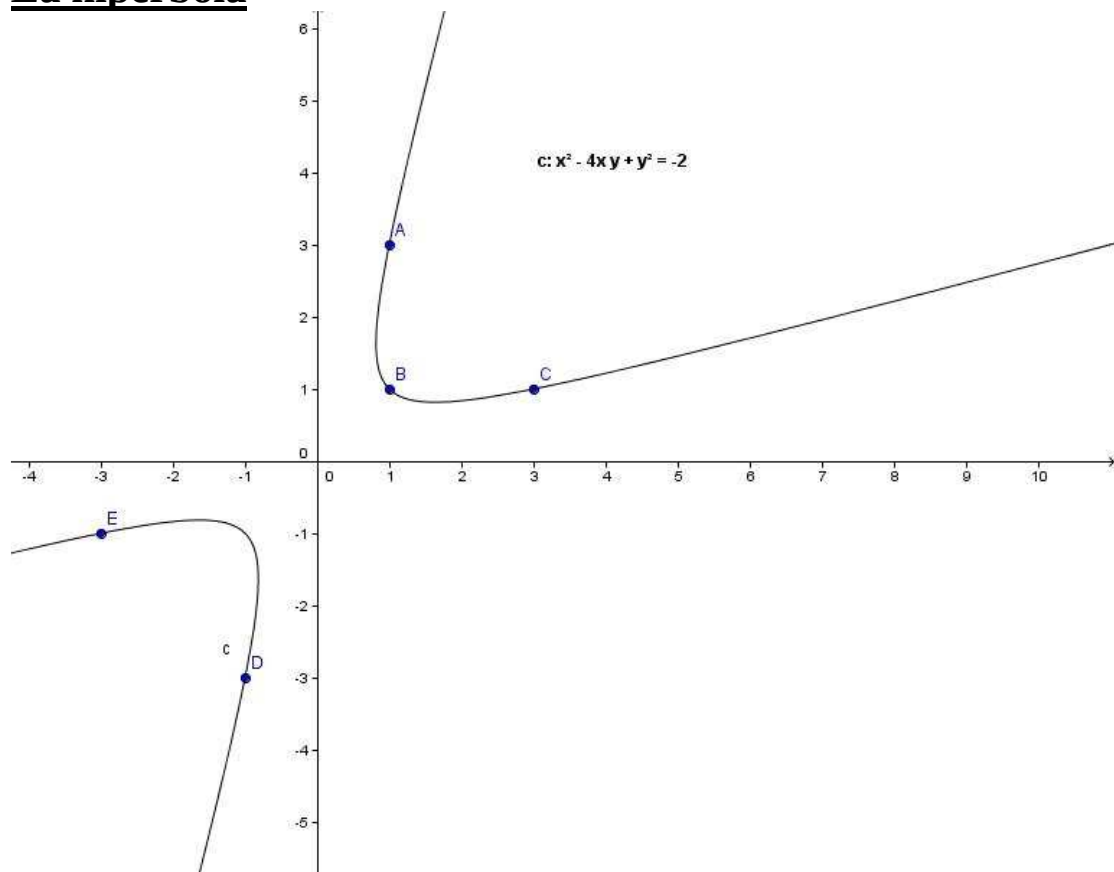
La parábola



La elipse



La hipérbola



3. Resultados

3.1. Superficies tri-dimensionales

Las ecuaciones con 3 variables dan como resultado una superficie bidimensional desplazada con respecto a un eje nuevo, z, espacial. Podemos hacer que esta z aparezca en la fórmula, con lo que la figura cambiará para cada z, o podemos omitirla, y la figura será simplemente la ecuación bidimensional superpuesta sobre sí misma a lo largo de todo el eje z, invariable. Para las 3D, como veremos en el apartado del tetracono, podríamos usar también dos variables espaciales y una temporal, o cualquier otra combinación que se nos ocurra, pero para simplificarlo y remitirnos a los clásicos, nosotros usaremos (en “Superficies tri-dimensionales”) los ejes espaciales. En este trabajo, las 3D son la transición entre las 2D y las 4D, que es en lo que se centra el trabajo.

Cilindro elíptico

La ecuación de un cilindro elíptico es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde a y b son los semiejes.

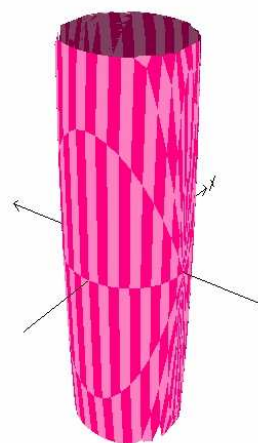
El caso particular más común es el del cilindro circular, cuya sección (por $z = k$) es un círculo. Se da cuando a y b son iguales, y queda:

$$x^2 + y^2 = 1 \cdot a^2$$

Esto es, la ecuación de una circunferencia. ¿Por qué sucede esto? Pues porque, como ya dijimos al principio, si ponemos una ecuación con dos variables, con independencia de z, lo que nos quedará será la figura bi-dimensional extendida por todo el eje.

Si cambiamos las variables por z, cambiaremos la orientación del cilindro.

El cilindro circular nos permite obtener solo elipses y círculos, dado que para obtener parábolas e hipérbolas, el plano de intersección tiene que tener una inclinación menor que la de el borde de la figura son llegar a intersecarla por uno de los lados, cosa que aquí es imposible porque las “paredes” son verticales.



Cono

Es el conjunto de puntos del espacio que verifican, respecto un sistema de coordenadas cartesianas, una ecuación del tipo:

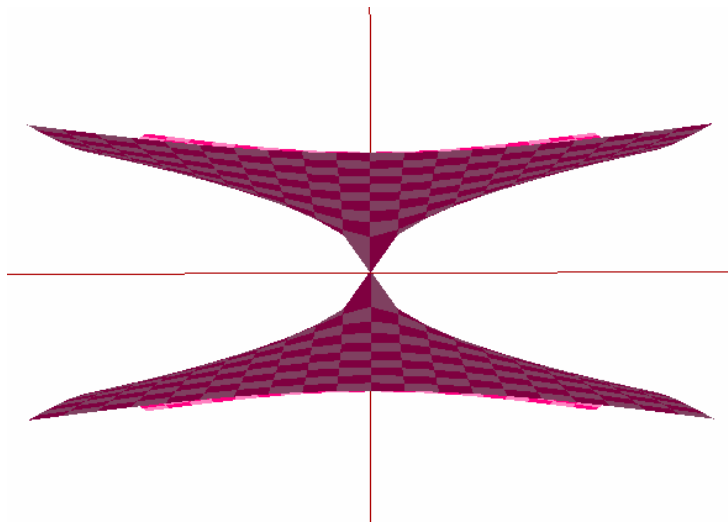
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Aquí podemos usar argumentos similares, ya que la que tenemos es la ecuación de la circunferencia (generalizada), que podríamos estandarizar como:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Esto es justamente una circunferencia, que conforme se desplaza en el eje z , su radio crece linealmente. Podríamos obtener variaciones en las que el radio creciese exponencialmente, por ejemplo:

$$x^2 + y^2 = z^4$$



En la imagen podemos ver que el radio crece cuadráticamente (al poner z^2 como R , $(z^2)^2 = z^4$)

El cono circular es un caso particular de lo más útil, ya que de el podemos obtener tanto la circunferencia como la elipse, parábola e hipérbola.

Esfera

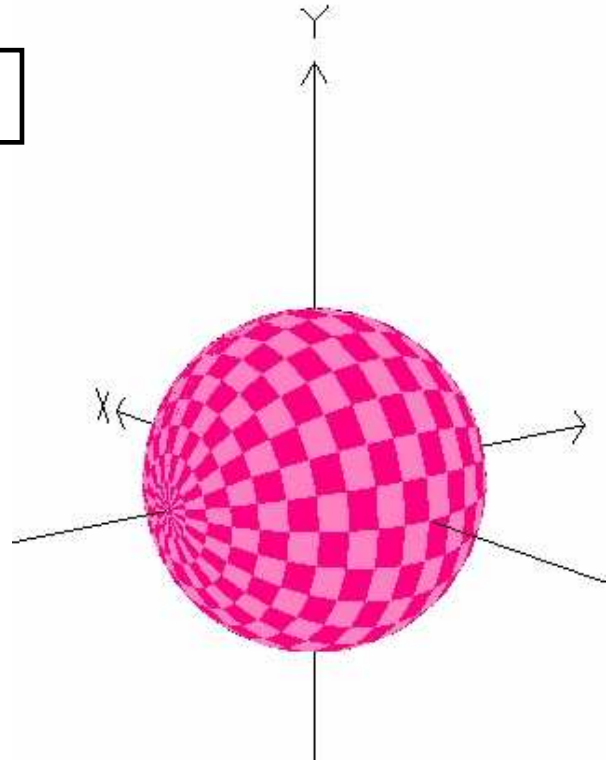
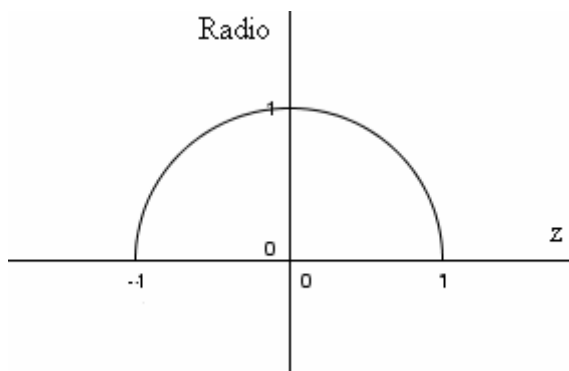
La Superficie esférica, está conformada por los puntos del espacio tales que la distancia a un punto denominado centro, es siempre la misma. Es justamente una circunferencia con una dimensión de más.

La ecuación generalizada de la esfera es:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

, donde el radio varia al igual que su centro, de coordenadas (a,b,c).

En realidad, la esfera es una superposición de circunferencias cuyo radio va variando cuando varía en eje z. En realidad, queremos que el radio con respecto a z crezca así:



Con cualquier programa nos damos cuenta de que está función es $R^2 = 1 - z^2$ (la ecuación de otra circunferencia). El 1 lo podemos sustituir por cualquier otro número. Si ponemos la ecuación típica de la circunferencia, y sustituimos R^2 por la función que acabamos de describir (que es el radio para cada z), nos queda $x^2 + y^2 = 1 - z^2$, donde recordemos el 1 es solo casual y podemos poner cualquier número: es R^2 .

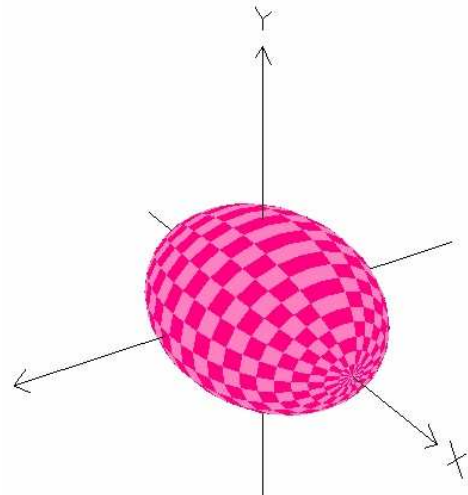
Así obtenemos la ecuación (simplificada) de la esfera.

Elipsoide

Un elipsoide es una superficie curva cerrada cuyas tres secciones ortogonales principales son elípticas, es decir, son originadas por planos que contienen dos ejes cartesianos.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Es la ecuación de un elipsoide con centro en el origen de coordenadas y ejes coincidentes con los cartesianos. Donde a , b y c son las longitudes de los semiejes del elipsoide respecto de los ejes x , y , z ; son números reales positivos y determinan la forma del elipsoide. Si dos de estos semiejes son iguales, el elipsoide es un esferoide; si los tres son iguales, se trata de una esfera.



En realidad, lo que hemos hecho ha sido poner coeficientes a la ecuación de la esfera, para hacer que las variables crezcan más o menos, y así “achatar” la esfera por uno u otro lado.

Podemos razonarlo también como que es el resultado de coger la ecuación de una elipse, aplicarle la misma transformación que a la circunferencia para obtener la esfera, y añadir otro coeficiente a la z para cambiar también su crecimiento vertical.

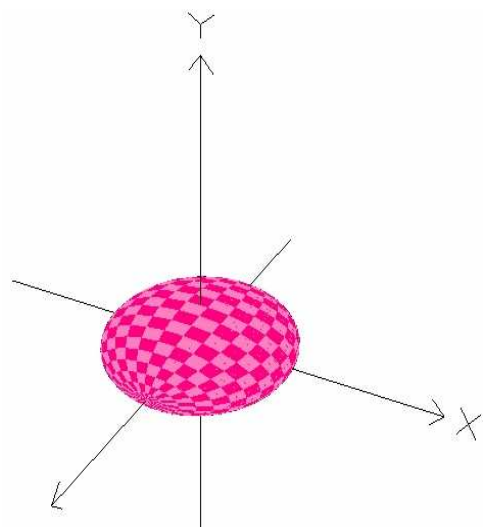
Esferoide

En coordenadas cartesianas, centrado en el origen, es:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Siendo a y c los semiejes, estando situado c en el eje de coordenadas z .

Se observa a simple vista que hemos cogido la ecuación del elipsoide y hemos puesto en dos variables el mismo coeficiente, para que las secciones sean esféricas.



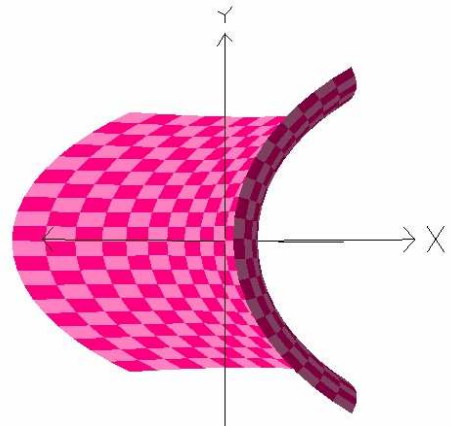
Paraboloide

Al paraboloide hiperbólico también se lo denomina silla de montar por su gráfica.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \frac{z}{c} = 0$$

En esta figura se dan propiedades muy curiosas que nos sumergen en el mundo de la geometría hiperbólica, distinto de la geometría plana (euclídea) y de la esférica (de Riemann).

Aquí, por un punto exterior a una recta se pueden trazar infinitas rectas paralelas a ella (esto es, que nunca la corten). Pero así nos estamos yendo por otros derroteros (muy interesantes) que no incumben al objeto de este trabajo.



Cuando $a = b$, el paraboloide hiperbólico es un paraboloide de revolución: una superficie obtenida al girar una parábola respecto de su eje.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - z = 0$$

En realidad, esta última se asemeja mucho al “cono cuadrático” que mencionábamos en su apartado, pero el radio de las circunferencias, en vez de crecer como z^2 , crece como $\sqrt{z}$

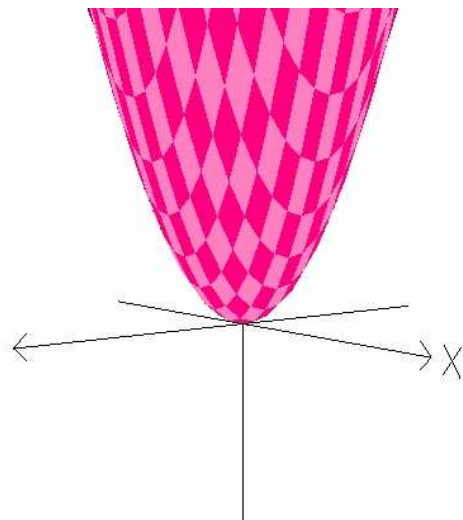
Esto se deduce al comparar la ecuación de una circunferencia con la ecuación de la parábola de la imagen:

$$x^2 + y^2 = z$$

Además, la ecuación típica de la circunferencia: $x^2 + y^2 = R^2$

$$R^2 = z$$

$$R = \sqrt{z}$$



3.2. Ecuaciones tetra-dimensionales

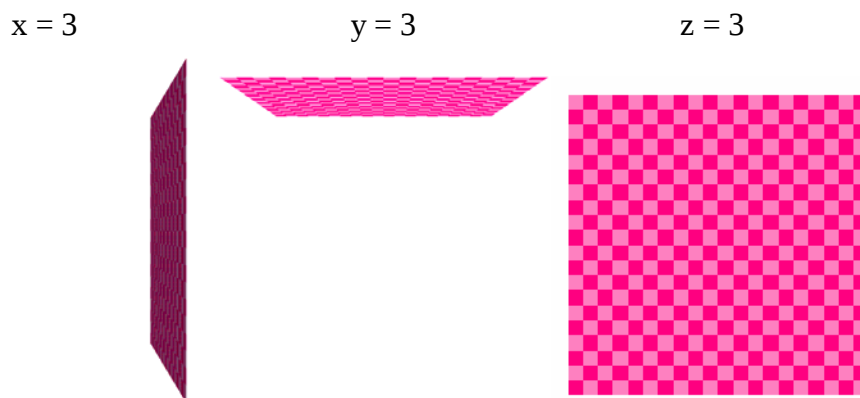
Con este nombre nos referimos a las ecuaciones que tienen 4 variables, y por tanto, 4 grados de libertad, por lo que al representarlas gráficamente, las 3 dimensiones espaciales se nos quedan cortas, y hay que añadir una cuarta. Nosotros vamos a usar normalmente el tiempo. Al igual que cuando representamos una gráfica sólo cogemos una porción del espacio, al representar 4D solo cogeremos un intervalo de tiempo.

Primeras figuras

Primero debemos familiarizarnos un poco con las ecuaciones de 4D.

Las funciones más sencillas son, obviamente, las del tipo $v = k$. Cuando hacíamos esto en el plano, quedaba una línea. Al hacerlo en 3D, quedaba la línea, pero extendida también en la dimensión z , la altura, esto es, un plano. Si queremos hacerlo en 4 dimensiones, tenemos el mismo plano, pero al representarlo tendremos el matiz también del tiempo, y quedará lo mismo que en 3D, al no depender la función de t (el tiempo). Como no podemos ver el tiempo, al ver una gráfica de este tipo en 4D, quedará exactamente lo mismo que en 3D.

Por ejemplo:



¿Qué pasa, pues, cuando ponemos $t = 3$?

Lógicamente, no podemos visualizar la función igual. Ahora quedará una “nada” hasta que pasen 3 segundos desde el 0, y veremos sólo en ese momento el resto de coordenadas, x , y y z , pero sin ningún punto ya que no hemos definido ninguna otra variable en la función.

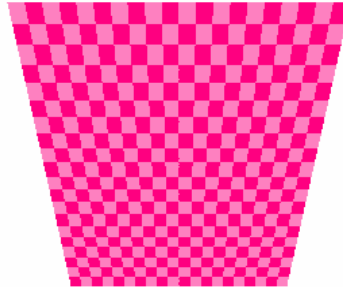
Véase vídeo 1 del Anexo de título: “ $t = 3$ ”,

Nota: el video recoge el intervalo $t = [-4, 4]$

Lógicamente, estas son las “funciones” más sencillas en 4D. Ahora podemos pensar en algunas que involucren dos variables. Por ejemplo, las del tipo $x = ay + b$, o, simplificando, $x = y$, $y = z$, $x = y...$

Si $x = y$ creaba una línea de pendiente 1 en el plano, al extenderla a 3D y 4D quedará la misma línea extendida en superficie.

Por ejemplo, aquí tenemos $x = y + 2$:



Pero claro, en las 4D todo tiene una vuelta de tuerca. Podemos plantearnos la función $x = t$ (lógicamente, añadiendo coeficientes, sumas, o cambiando la x por cualquier variable). Al ser aquí el tiempo una de las variables, la función se “moverá”. En este caso, para cada sección de t tendremos una superficie de $x = k$. En conjunto, la función es un plano (en el caso de x , vertical) que se mueve con el tiempo.

Véase vídeo 2 del Anexo de título: “ $x = t$ ”,

Nota: el video recoge el intervalo $t = [-2, 2.2]$

Lógicamente, en esta función, $f(-t) = -f(t)$, por lo que tiene simetría impar con respecto al eje t (y con respecto al x también).

Para acabar esta introducción, podemos coger una función sencilla que hayamos visto con las 3D y hacerle diversas travesuras. Por ejemplo, el paraboloide (elíptico).

Recordemos que su ecuación extendida es:

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 - z = 0$$

Podemos retocarla sustituyendo las x_0 y las y_0 por t , o también podemos cambiar la a y la b (los semiejes). También podemos poner la t en exponentes, con coeficientes...pero ahí la cosa se complica más.

Así, podemos definir muchísimas ecuaciones, entre ellas:

$$-\left(\frac{x}{t^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{y - t}{2}\right)^2 - z = 0$$

Véase vídeo 3 del Anexo de título: “Tetraparaboloide”,

Esta función será un paraboloide colocado como lo hace un cohete antes de despegar, porque la hemos dado la vuelta al añadirle un $-$ al principio. Además, tendrá dos características especiales:

- Por un lado, cada vez se desplazará más hacia abajo en el eje y, ya que hemos puesto que el origen en el eje y sea t, e irá creciendo poco a poco.
- Por otro, al principio será muy plana, ya que el semieje es muy grande, e irá disminuyendo con el tiempo, ya que el semieje (horizontal) es $1/t$.

Ya podemos decir que empezamos a entender el concepto de tiempo en las funciones.

Tetracono

Hemos llamado así al cono de 4 dimensiones, una figura básica en nuestro estudio. Recordemos que todas las curvas bi-dimensionales básicas se pueden obtener al intersectar un cono (3D) con un plano (2D). De aquí se infiere que a partir de nuestro cono 4D podemos obtener las figuras 3D de que hablamos antes (la esfera, el elipsoide, el paraboloides...).

Ahora: ¿Cómo construimos nuestro tetracono?

Dado que hemos definido esta figura por analogía con un cono, podemos construirla igual: el cono es una superposición de circunferencias (2D) cuyo radio crece linealmente.

Pues bien, ahora hacemos lo mismo usando en vez de circunferencias, esferas:

Cogemos la ecuación de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Donde, recordemos, el R es el radio, un número constante (para que la ecuación solo tenga 3 grados de libertad). Y lo único que hacemos es sustituirlo por una variable, el tiempo, para que nuestro “tetracono” sea una “sucesión” de esferas de distinto radio, de modo muy similar al que pasaba con el cono y la esfera.

$$\text{Ecuación del tetracono} \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

Además, podemos poner coeficientes a cada uno de los términos, y sustituir cada variable v, incluso t, por $(v - v_0)$ para cambiar el centro de la esfera, o si cambiamos la t, estaremos haciendo que el radio de la esfera no sea 0 en $t = 0$, sino en t_0 , y cambiamos la relación radio-tiempo.

Por ello, llamaremos “tetracono típico” al que se corresponde con la ecuación de arriba.

Véase vídeo 4 del Anexo de título: “Tetracono”,

Nota: el video recoge el intervalo $t = [-1, +1]$

Secciones del tetracono con $v = k$:

Las cónicas se obtienen seccionando el cono con diferentes planos, caracterizados por su pendiente. Ahora vamos a ver qué sucede al “cortar” nuestro tetracono típico con superficies. Y la palabra “cortar” adquiere un matiz peculiar cuando trabajamos con algo que no podemos visualizar, ya que se mueve. ¿Qué pasa si sustituimos cada variable por una constante?

Primero, vamos con lo sencillo: al sustituir t por una constante, queda la ecuación de una esfera de radio t :

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2 = R^2$$

Como t ha dejado de ser variable, nuestra esfera no se moverá.

Podemos compararlo con que al sustituir una variable por una constante en un cono, obteníamos una circunferencia. Pero no cualquier variable, sino la que era paralela a la base del cono, que se corresponde con la que está “aislada” en el segundo término de la ecuación.

Aquí tenemos un corte en $t = 3$



Podemos generalizar, con las pruebas que hemos visto, que si tenemos un n -cono:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + a^2 \dots = \sum_{i=1}^n v_i^2 = R^2$$

Al cortarlo por $R = k$ obtendremos una figura en la que todos sus puntos equidistan (no solo espacialmente, sino también temporalmente, o cualquier otra variable que queramos imaginar) con distancia R a un centro.

Esto se deduce de simplemente la generalización del teorema de Pitágoras con tantos “catetos” como variables tengamos. La longitud de esta “hipotenusa” multidimensional es la distancia que separa a cada punto de la función es constante, R . Lógicamente, siempre serán funciones con simetría par (porque todas sus variables están elevadas al cuadrado).

Ahora cambiamos de tercio: las variables espaciales x, y y z.

$$k^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

Lógicamente, lo que queda es una ecuación en la que el tiempo sigue siendo una variable, con lo que la figura se moverá. Al pasar la k restando al otro término, podemos transformar la ecuación en:

$$y^2 + z^2 = t^2 - k^2$$

Queda la ecuación de una circunferencia cuyo radio es variable, la raíz del término de la derecha. Como, recordemos, hemos puesto que x es variable, quedará una circunferencia cuyo radio varía con el tiempo, y colocada verticalmente. Pero estamos pintando en 4D, con 3D visuales, así que no tenemos una circunferencia, sino un cilindro, esta vez horizontal. Si en vez de x, cambiamos y o z por una k, podemos variar la orientación del cilindro.

Por último, decir que hay funciones muy peculiares. Una de las que eran recurrentes al hacer el trabajo (aunque al final no apareció) es la función seno. Al ser una función cíclica, que se mantiene variando en un intervalo de valores, da mucho juego.

De ahí decidimos multiplicar el seno de x por el seno de z (y es la f(x)). Así, tendríamos un patrón, en el que los puntos máximos de sen(x) crearían elevaciones en los puntos más elevados de la función f(z), y lo mismo con los mínimos. Así, se crearía un patrón (tridimensionalmente cíclico, como sen(x) en 2D) de “montañas y valles”. Para pasarlo a las 4D, y complicarlo un poco más, quisimos que las ondas se agrandasen y aplanasen (también cíclicamente). Para ello, la primera candidata era sen(t): Así, quedó la función

$$y = \text{sen}(x) \cdot \text{sen}(z) \cdot \text{sen}(t)$$

Véase vídeo 5 del Anexo de título: “Seno”,

Nota: el video recoge el intervalo $t = [-4, +4]$

No deja de ser una mera curiosidad, pero su similitud con las olas del mar nos recordó la parte un poco más lúdica y bella de todos estos menesteres que hemos estudiado.

Todos estos resultados para 4D podemos variarlos cambiando entre sí las variables, sus coeficientes, o aplicando el mismo razonamiento a las ecuaciones de otras figuras tridimensionales.

4. CONCLUSIONES

Y continúa...

La cosa no se queda aquí. Podemos añadir más variables. Y buscar formas de representarlas es todo un reto. Podemos usar colores, sonidos, o cualquier cosa que se nos ocurra. Podríamos hacer la intersección entre la Mona Lisa y La 9ª Sinfonía de Beethoven. Las matemáticas tienen funciones muy bellas (que “Archim”, nuestro sw para representar no soporta...), que incluyen el color para representar números complejos.

Los físicos valoran la idea de que nuestro universo tenga hasta 11 dimensiones, y nosotros vivamos en una intersección con 7 ecuaciones, quedando solo el espacio y el tiempo.

Habría sido también muy interesante ver cómo se comportan las superficies al cruzarse entre sí (y no solo cuando $v = k$), pero encontramos muy complicado tener que cambiar el sistema de coordenadas, y sin embargo, en las secciones cónicas se ve muy bien con qué plano debemos cruzar el cono para obtener cada una (aunque no podamos justificar por qué).

En efecto, hemos tenido un viaje relativamente exitoso por la geometría multidimensional, a nivel muy básico, pero intentando entender y dar nuestros propios pasos, tal y como se ha hecho durante siglos de historia, pero en unas breves páginas, con nuestras digresiones, nuestros intentos de generalizar...

5. Bibliografía

Para la correcta realización del trabajo hemos necesitado principalmente la ayuda de las siguientes fuentes (aparte de otras fuentes secundarias):

Libros de texto:

- Matemáticas I Bachillerato, Anaya 2002.
- Algoritmo Matemáticas 1 Bachillerato, SM
- Ampliación de matemáticas 4 ESO, Bruño S.L. 2008.
- Matemáticas opción B 4 ESO, ábaco SM 2008.
- Matemáticas Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud Tecnología, Editorial Bruño

Fuentes de Internet:

- www.wikipedia.org
- jugandoabuscarlaverdad.blogspot.com
- www.matematicasies.com
- www.ite.educacion.es

Software utilizado:

- Geogebra
- Archim
- Windows Movie Maker

6. Anexo

 Video 1- $t = 3$.wmv	65 KB	VLC media file (.wmv)	20/04/2010 16:55
 Video 2 - $x = t$.wmv	217 KB	VLC media file (.wmv)	20/04/2010 17:40
 Video 3 - Tetraparaboloide.wmv	318 KB	VLC media file (.wmv)	25/04/2010 21:49
 Video 4 - Tetracono.wmv	264 KB	VLC media file (.wmv)	19/04/2010 17:50
 Video 5 - Seno.wmv	990 KB	VLC media file (.wmv)	14/04/2010 17:51