

Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Quinta Edición, 2010/2011

TRABAJO: Arrasando en el casino

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE BACHILLERATO

AUTORES:

- o Javier Martín Viscasillas
- o Alejandro Novo Muñoz
- o Daniel Olivares Polo
- o Antonio del Pozo Mínguez
- o Luis Torres Mesonero

TUTORA:

- o María Moreno Warleta

CENTRO: IES Alameda de Osuna (Madrid)





INDICE

1. Introducción y antecedentes.....	2
1.1 Origen del trabajo.....	3
1.2 Blackjack.....	4
1.2.1 Historia del Blackjack.....	4
1.2.2 Cómo jugar al Blackjack.....	5
1.2.3 Terminología.....	5
2. Objetivos y desarrollo del trabajo.....	6
3. Resultados.....	9
3.1 Concepto de esperanza matemática.....	9
3.2 Desarrollo Matemático.....	10
4. Conclusiones.....	15
5. Bibliografía.....	16
6. Anexos.....	16

1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

“A ganar, a ganar, pollo para cenar” Esta frase fue repetida una y otra vez en los casinos de los Estados Unidos por los grandes genios del Blackjack tras sumar el ansiado 21. Uno de los que más uso dio a esta peculiar frase fue Ken Uston. Uston, tras abandonar su trabajo debido a los enormes avances que había realizado en la estrategia del juego, se propuso llegar a ser el mejor jugador del mundo... ¿Y sabe qué? No solo fue el mejor sino que ganó cuatro millones de dólares a lo largo de un año. Sí, ha escuchado bien, cuatro millones de dólares además de cosechar una demanda de unos 80 millones de dólares por lo que a los casinos les gusta llamar “hacer trampas”. Dave Irving fue otro de los grandes genios del Blackjack. Irving, que pertenecía a un equipo de juego de la Instituto Tecnológico de Massachusetts, veía en el Blackjack una posibilidad factible de financiar sus estudios y su vida universitaria, y vaya si lo fue. Todos los viernes cogía un vuelo hacia las Vegas con su equipo, derrotaba a la banca, disfrutaba de los mejores hoteles y llegaba con un equipaje de mano que tenía un valor aproximado de unos cien mil dólares.

Pero... ¿qué tenían estos dos genios que no tuviesen los demás? Tanto Irving como Uston tenían una única cosa en común: su concepción de las matemáticas. Sirviéndose de esta perspectiva de las matemáticas mostraron al mundo que el mayor bien del que un hombre dispone está sobre sus hombros, que los casinos son vulnerables y, sobretodo, demostraron que con las matemáticas, además de poder explicar el mundo, uno se puede hacer rico.

Este mensaje fue captado por multitud de matemáticos y amantes del juego que se volcaron en la tarea de derrotar a la banca. Nosotros no somos matemáticos, sin embargo, por suerte, somos conscientes del potencial que esta gran herramienta encierra, con este trabajo pretendemos dar un nuevo enfoque a las matemáticas, transmitir que no únicamente consisten en complicados teoremas y complejas demostraciones, transmitir que con ellas usted puede hacerse rico, transmitir, en definitiva, que con unos conocimientos básicos, las matemáticas pueden ser aplicadas a cualquier ámbito de la vida con éxito.

A lo largo del trabajo plantearemos un modelo matemático que nos permitirá decidir qué hacer en cada situación en función de las cartas que estén sobre la mesa. ¿Que por qué nos hemos propuesto este objetivo? Sencillamente, porque consideramos que no hay mayor virtud en la vida que la de saber lo que uno tiene que hacer en cada momento.

Es posible que este trabajo no le haga rico, y decimos que es posible, porque quizá sea este trabajo el que le despierte ese gran jugador que todos llevamos dentro y sean otros alumnos los que escriban, en unos cuantos años, un trabajo sobre el Blackjack en el que sea su nombre el que figure como uno de los grandes genios. A pesar de ello, a través de este trabajo le ofrecemos la oportunidad de plantar cara al todopoderoso casino en el juego que más depende de usted y sus matemáticas, le ofrecemos la oportunidad de reducir la ventaja del casino hasta prácticamente la igualdad, le ofrecemos, en definitiva, la oportunidad de crear un juego justo y equilibrado gracias a la mayor herramienta que está a disposición del hombre: las matemáticas.

1.1. EL ORIGEN: “21 Blackjack”

Dicen que no eres tú el que eliges a las matemáticas, sino que son ellas las que te eligen a ti. En nuestro caso nos eligieron ellas, sin duda. El fin de semana posterior a la finalización de la convocatoria de la UAM de 2010, vimos “21 Blackjack” una película que te impacta y te empuja a salir corriendo, coger un avión, ir a las Vegas y destronar al casino. Una vez que cancelamos los vuelos, decidimos que nos presentaríamos a la edición del año siguiente, por lo que apenas nos supuso esfuerzo elegir el tema, puesto que fue él en realidad el que nos eligió a nosotros. Alentados por la película comenzamos a darnos cuenta de las dimensiones que alcanzan las matemáticas en la vida y sobre todo la importancia que tiene su correcta aplicación. Con la meta de hacernos como mínimo ricos, vimos de nuevo la película y situamos su argumento en el corazón de nuestro trabajo.

En la película, Ben Campbell, un estudiante del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), es aceptado en la Escuela de Medicina de Harvard. Sin embargo, para la concesión de la beca que financiará a lo largo de todo el año ha de pasar una difícil entrevista. A pesar de que dispone de buenos resultados académicos, Ben ha de demostrar que tiene algo más que buenas notas, se le exige ser bueno dentro de clase, pero aún mejor fuera de ella. Ante esto, Ben cuenta la historia de su andadura por el Blackjack, con la que consigue deslumbrar al entrevistador.

Todo empieza durante una clase de matemáticas en la universidad, donde el profesor desafía a Ben a que descifre un problema acerca de tres puertas con cambios variables, y Ben lo resuelve con éxito. Este hecho, provoca que el profesor se interese por Ben y le proponga entrar en el grupo de juego de Blackjack. A pesar de su reticencia, Ben se introduce en un equipo clandestino de Blackjack liderado por su profesor. Se desarrolla una intensa trama, en la que Ben se convierte en un genio del Blackjack que acaba dejándose llevar por la arrogancia, provocando el enfrentamiento con su profesor, que le roba todo el dinero ganado que había destinado a pagar la universidad en caso de que no le fuese concedida la beca. Ben, que acaba por entender que el dinero no es tan importante, consigue trazar un plan para devolver el golpe a su profesor, consiguiendo su objetivo y asimilando una de las mayores experiencias de su vida. Tras contarle la historia al entrevistador, Ben, cierra la trama con una sonrisa irónica, la sonrisa de un genio que utilizó las matemáticas para lograr lo que nadie creía posible.



1.2 BLACKJACK

1.2.1 UN POCO DE HISTORIA

El origen del juego en el que se basa todo nuestro proyecto se remonta a “La veintiuna”, un juego de origen desconocido. La primera referencia escrita sobre este juego está contenida en la obra picaresca de Miguel de Cervantes, Rinconete y Cortadillo; ya en este texto describe que el objetivo del juego es sumar veintiún puntos sin pasarse. Gracias a este cuento se deduce que este juego se jugaba en Castilla desde principios del siglo XVII. Ya en el siglo XX, en los casinos americanos, el juego adquirió su actual forma y fama, en el que se incluyen premios. El Blackjack no es un juego exclusivamente de azar. En Estados Unidos el juego ha sido estudiado en numerosas ocasiones. Thorp fue el pionero en los años 60, aunque después ha habido contadores y estudiosos de las cartas míticos que obtuvieron grandes fortunas en los casinos, como Ken Uston, quien es considerado por muchos el mejor contador de la historia.

Actualmente, para evitar estas pérdidas de dinero de los casinos, si el casino detecta o simplemente sospecha que un jugador está contando, le invitarán a cambiar de juego o lo expulsarán del casino basándose en el derecho de admisión.

1.2.2. EL JUEGO DEL BLACKJACK:

Es un juego de cartas, propio de los casinos, que consiste en obtener 21 puntos, mediante la suma de los valores de las cartas, que son 52. Si se consigue 21 con sólo dos cartas se considera Blackjack y se gana automáticamente.

Se juega en una mesa semicircular con capacidad, normalmente, para siete jugadores, cada uno de los cuales debe realizar su apuesta antes de cada mano y en cada una de las manos que se jueguen.

- **Desarrollo del juego:**

Podríamos resumir el juego así: la banca reparte dos cartas a cada jugador, y el jugador tiene la posibilidad de plantarse (quedarse con las cartas que tiene) o pedir carta, sin pasarse del 21 ya que si se pasa, pierde automáticamente.

Finalmente gana el que obtenga el número más alto, cercano al 21, sin superarlo, o saque Blackjack. El crupier tiene reglas rígidas: su puntuación inicial será 16 o menor, y se plantará siempre que su puntuación alcance 17 o superior.

Aunque las reglas varían entre casinos, existen dos principales variantes del juego: el Blackjack americano y el europeo. La diferencia está en que mientras que en el Blackjack europeo el crupier se da tan sólo una carta descubierta antes de ceder el turno a los jugadores, en el americano se da dos cartas, la segunda tapada, y la comprueba antes de pasar el turno. En el caso de que ésta le permita hacer Blackjack, gana todas las apuestas de los jugadores antes de que ellos jueguen y puedan doblar la apuesta o separar cartas.

En relación a las ganancias posibles, si obtenemos mayor puntuación que el crupier, cobraremos una cantidad igual a la apostada, pero, si sacamos Blackjack, cobraremos a razón de 3 a 2 según lo apostado. Si empatamos, ni se pierde ni se gana.

1.2.3. TERMINOLOGÍA

- **Doblar:** poniendo una apuesta adicional a la original, el crupier le da al jugador una carta sobre las dos iniciales. Cada casino tiene reglas para esta jugada; unos permiten doblar, otros solo permiten doblar si las dos primeras cartas suman 9, 10 o 11.
- **Separar:** si las dos primeras cartas son del mismo valor numérico, el jugador puede separarlas, poniendo una apuesta adicional. Sobre cada una de las cartas separadas se le sirve una más, constituyendo cada juego de dos cartas una jugada independiente. Si la segunda carta servida sobre cada jugada es igual a la primera, puede volver a separar esa jugada poniendo otra apuesta adicional, y así sucesivamente.
- **Asegurar:** jugada que consiste en apostar a que el crupier obtendrá Blackjack, cuando su primera carta es un As. Si el crupier obtiene Blackjack paga al jugador dos veces la apuesta del seguro.
- **Rendirse:** si un jugador considera que sus dos primeras cartas no serán capaces de vencer al crupier, rindiéndose solo le será cobrada al jugador la mitad de su apuesta inicial. Esta regla no existe en muchos casinos, principalmente los europeos.
- **Plantarse:** es simplemente dejar de pedir cartas.



2. OBJETIVOS Y DESARROLLO DEL TRABAJO

El trabajo lo comenzamos a mediados de Octubre después de retomar las ideas que habíamos elaborado durante el final del curso pasado. Inicialmente nos gustó mucho la idea de contar cartas, de hecho empezamos todas nuestras investigaciones enfocadas por este camino. Nos documentamos sobre las políticas de juego de diferentes casinos y casas de apuestas para ver realmente cómo se movía todo el mundo de las apuestas.

Ya habíamos tenido una primera toma de contacto, por lo que era hora de sentarnos y dar una dirección al trabajo. Tras una tarde entera discutiendo sobre los diferentes enfoques que se le podía dar en lo referente al conteo de cartas, terminamos bastante desilusionados pensando que nuestro objetivo inicial nos iba a suponer demasiado tiempo para llegar realmente a pocos resultados matemáticos útiles. En ese momento nos dimos cuenta de lo que es la investigación, un trabajo arduo que te obliga a descubrir nuevas maneras de atajar un problema que a primera vista sobrepasa los límites de tu comprensión.

La semana siguiente volvimos a reunirnos y nuestra profesora, para subirnos la moral, nos dio la sorpresa de traernos a un profesor al que tenemos bastante aprecio y al que conocíamos por haber sido alumnos suyos. El motivo de esta visita se debía a que este profesor en sus tiempos jóvenes adquirió bastantes conocimientos sobre el mundo del juego. Le preguntábamos y nos informamos sobre las normas de los casinos y le pedimos que nos explicase brevemente sus experiencias en el Blackjack, para hacernos una idea de cómo era el ambiente en un casino.

De esa tarde sacamos una dura conclusión: el conteo de cartas no era viable. Esto se debe a que en los casinos actualmente se utilizan máquinas automáticas que barajan las cartas continuamente, haciendo imposible el seguimiento de las cartas que entran o salen en la mesa y tirando abajo nuestro intento de crear un sistema de juego en el que varios jugadores del mismo equipo cumplieran un rol determinado que permitiese optimizar las ganancias del grupo.

Por primera vez nos vimos obligados a dar un giro en nuestra investigación por la inviabilidad de llevar a cabo dicho conteo, y de esa forma conseguir una ventaja respecto al casino. A raíz de este primer contratiempo, decidimos marcarnos como objetivo entender, matemáticamente hablando, cómo se debería jugar al Blackjack. Para ello buscamos simplificar el juego reduciendo a tres el número de cartas. Con esta simplificación intentamos elaborar un juego, en el cual solo había tres tipos de cartas (2, 3, 4) y un total de nueve cartas, que consistía en llegar a la cifra de siete en función de las cartas que tenía el crupier y las que teníamos nosotros; y a raíz de esto, determinar cuáles eran las probabilidades de ganar.

Inicialmente abordamos el problema desde la creación de un diagrama en árbol, pero una vez más, la complejidad matemática nos superaba pues no contábamos con la ayuda de un ordenador que nos facilitase la multitud de posibilidades que surgían.

Necesitábamos programar, pero en realidad no habíamos picado ni una línea de código en toda nuestra vida y no íbamos ni mucho menos sobrados de tiempo.

Tras una reunión que terminaría de perfilar los detalles finales, determinamos la dirección que seguiría el trabajo:

Crear unas tablas de estrategia de juego, ayudándonos de Excel, que nos indiquen cómo actuar dependiendo de la carta visible del crupier y de nuestras cartas, suponiendo que se jugase con infinitas barajas.

El detalle de cartas infinitas es sutil pero tremendamente importante pues con él nos evitamos tener que variar las probabilidades con cada carta que sale, siendo el error que esto conlleva asumible pues estamos hablando de nada menos que seis barajas, en algunos casinos hasta ocho, que se barajan continuamente.

Basándonos en las secuencias que obtuvimos al implementar en Excel el juego simplificado de tres cartas (Hoja 3 del Anexo), nos dimos cuenta de que podíamos abarcar todas las posibilidades. A pesar de ello, el trabajo con la baraja completa seguía resultando enorme, hay un gran número de posibilidades de llegar desde un número a otro que esté suficientemente espaciado numéricamente hablando. Sin embargo, teniendo como base las secuencias obtenidas para números grandes, podíamos ir abarcando todas las posibilidades a partir de ellas y, poco a poco, nos dimos cuenta de que estábamos considerando todos los casos de una forma relativamente sencilla y elegante. Teníamos que calcular cuál era la probabilidad de llegar desde un número a otro. Inicialmente, para simplificar las operaciones, tanto el crupier (jugador que representa al casino) como nosotros, empezábamos con un diez de carta inicial en la mesa. Partiendo de esto teníamos que calcular a partir del 10 todos los caminos posibles de pasarse o de llegar a 21, 20, 19 etc. para así determinar las posibilidades que teníamos de ganar y, en función de eso, doblar apuesta, pedir carta, plantarse etc.

Poco a poco mejorábamos nuestras secuencias y nos dábamos cuenta de nuevas maneras de llegar a un número. Las rehacíamos, ya estábamos en el camino. Sabíamos lo que queríamos, teníamos las herramientas para hacerlo y a pesar de lo difícil que resultaba encerrar todas las posibilidades dentro de fórmulas de no más de una línea, poco a poco íbamos ganando terreno al problema.

Sentíamos que desde el objetivo inicial, basado en obtener ventaja a través del conteo de cartas y establecer una estrategia ganadora, hasta el objetivo final, establecer la mejor estrategia posible en cada posible situación, habíamos recorrido un camino difícil, arduo pero a la vez interesante y que había exigido constancia y superación. Y por fin comenzábamos a ver el final del camino.

Tras un mes de matizaciones, de picos de motivación y duro trabajo con Excel conseguimos finalizar el problema. Hemos de decir que aún después de haberlo repasado varias veces teníamos la sospecha de que algún caso se nos debía de haber escapado, ¡eran tantos! Sin embargo, con el paso de los días nos íbamos convenciendo de que lo

habíamos hecho, de que habíamos destrozado la defensa del problema, que le habíamos ganado y que, por fin, teníamos ante nosotros la estrategia ganadora del Blackjack. Y no pudimos hacer otra cosa que sonreír, sonreír tal y como lo haría alguien que ha hecho un buen trabajo, sonreír tal y como lo haría alguien que sabe que a pesar de todo el esfuerzo ha merecido la pena, sonreír tal y como hizo Ben tras ver la cara de estupefacción su entrevistador.



3.1 ESPERANZA MATEMÁTICA

La esperanza es una idea fundamental para tomar decisiones racionales (y acertadas, a largo plazo) en un juego de apuestas. La esperanza es la diferencia de la probabilidad de ganar por los beneficios posibles menos la probabilidad de perder por las pérdidas que acarrearía esta.

$$E = P(\text{ganar}) \cdot (\text{beneficios}) - P(\text{perder}) \cdot (\text{pérdidas})$$

Si nuestra esperanza es positiva acumularemos ganancias; si es negativa, pérdidas. Se dice que un juego de azar es justo cuando la esperanza es igual a 0.

Pensemos, por ejemplo, en un juego de dos jugador que consiste en que se lanza un dado y gana el jugador A si el valor obtenido es menor que tres y el jugador B si es mayor o igual que tres. Aunque en principio el juego pueda parecer bastante poco interesante para el jugador A, esto dependerá de cómo sean las apuestas.

Si las apuestas son iguales para los dos, la esperanza de A es $1/3 - 2/3 = -1/3$ lo que significa que, en media, A perderá uno de cada tres euros que apueste.

Sin embargo, si se establece que A recibirá de B dos euros cada vez que el valor sea menor que tres y B recibirá de A un euro cuando sea mayor o igual de tres, entonces el juego es justo pues la esperanza de ambos jugadores es cero: $1/3 \cdot 2 - 2/3 \cdot 1 = 0$ luego, en media, ninguno ganará ni perderá dinero pero podrán pasar la tarde “entretenidos”.

En el caso del Blackjack, adoptando una estrategia adecuada, la esperanza se sitúa en el $-0,005$. Esta esperanza en cada una de las diferentes situaciones será la que nos dirá si lo mejor que podemos hacer es retirarnos, seguir jugando, pedir otra carta o doblar la apuesta.

3.2 DESARROLLO MATEMÁTICO

¿CÓMO SE RESUELVE EL PROBLEMA?

Nuestro objetivo es que nuestra puntuación sea mayor que la del crupier (sin pasarnos de 21), y así ganar lo apostado. Para que el crupier pare de coger cartas tiene que tener una puntuación igual o mayor a 17.

Lo primero que vamos a hacer es obtener la probabilidad de que desde cualquier carta que pueda tener el crupier llegue a 17, 18, 19, 20 y 21. Una vez hecho esto, habrá que realizar una tabla en la que obtengamos la esperanza que tendremos dependiendo de

nuestra carta y de la suya y, según eso, ver si decidimos pedir carta o plantarnos, así como doblar o retirarnos.

CÁLCULOS MATEMÁTICOS Y CONFECCIÓN DE LA TABLA CUANDO LA CARTA DEL CRUPIER ES UN 10

Para entender cómo hacer el cálculo de la probabilidad de que el crupier llegue hasta los distintos casos partiendo desde una misma carta, comenzamos haciendo los cálculos suponiendo que la carta del crupier era un 10, ya que desde aquí la probabilidad que tiene de obtener 21, 19, 18, 17 con una sola carta es la misma (1/13). Dado que las figuras también valen 10 puntos (y que contando con los 10, hay cuatro cartas que valen 10 puntos), la probabilidad de llegar a 20 con sólo una carta es 4/13.

Después observamos que la probabilidad de llegar desde 10 a 17, 18, 19, 20, 21 con dos cartas también es la misma para todos ellos, ya que es igual de probable que salga un 2, un 3, un 4, etc. El único caso en que varía es si sale un 10 pero en ese caso llegaríamos a 20 con una sola carta y esto ya está considerado arriba.

Así pues, para calcular la probabilidad del crupier de llegar desde 10 a un valor superior a 16 habrá que sumar las probabilidades de llegar con una carta, dos, tres...

$$\begin{aligned} P(X) &= \text{Probabilidad del crupier de llegar desde 10 hasta } X. \\ P(11) &= 0 \text{ (partiendo de 10 es imposible conseguir 11 puntos pues con un As sumarían} \\ &\quad \text{21).} \\ P(12) &= 1/13 \\ P(13) &= 1/13 + 1/13 \cdot P(12) \\ P(14) &= 1/13 + 1/13 \cdot P(13) + 1/13 \cdot P(12) \\ P(15) &= 1/13 + 1/13 \cdot P(14) + 1/13 \cdot P(13) + 1/13 \cdot P(12) \\ P(16) &= 1/13 + 1/13 \cdot P(15) + 1/13 \cdot P(14) + 1/13 \cdot P(13) + 1/13 \cdot P(12) \\ P(20) &= 4/13 + 1/13 \cdot P(16) + 1/13 \cdot P(15) + 1/13 \cdot P(14) + 1/13 \cdot P(13) + 1/13 \cdot P(12) \\ P(21) &= P(19) = P(18) = P(17) = 1/13 + 1/13 \cdot P(16) + 1/13 \cdot P(15) + 1/13 \cdot P(14) + 1/13 \cdot \\ &\quad P(13) + 1/13 \cdot P(12) \end{aligned}$$

Finalmente nos quedan:

$$P(21) = 0,1114$$

$$P(20) = 0,3422$$

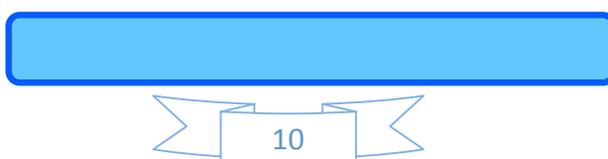
$$P(19) = 0,1114$$

$$P(18) = 0,1114$$

$$P(17) = 0,1114$$

ESTUDIO DE LA ESPERANZA

Gracias a esto podemos calcular nuestra esperanza (E) en función de la carta que tengamos si nos plantamos. Para ello deberemos sumar la probabilidad que tenemos de ganar y restar la que tenemos de perder, ignorando la que tenemos de empatar:



$$E = P(\text{ganar}) + 0 \cdot P(\text{empatar}) - P(\text{perder})$$

Se entiende que, cuando nuestra suma es menor de 17, si decidimos plantarnos tendremos siempre la misma esperanza, puesto que sólo podemos ganar si el crupier se pasa y si no lo hace, perderemos siempre.

A lo largo del trabajo vamos a suponer que jugamos siempre con una unidad de apuesta (euro, dólar, yen...) Por tanto, aspiraremos a ganar como máximo ese mismo dinero, por lo que la esperanza máxima será uno. Como la suma de las probabilidades de ganar, empatar y perder es uno, esta fórmula se puede simplificar con esta otra, que es la que vamos a emplear:

$$E = 1 - P(\text{empatar}) - 2 \cdot P(\text{perder})$$

Dependiendo de lo que nos dé, decidiremos si compensa jugar o no:

- $E < -0,5$; nos retiramos ya que, según las reglas del Blackjack, al retirarnos perdemos la mitad de lo apostado. Y a partir de que nuestra esperanza sea menor de $-0,5$, perderemos, a la larga, más de la mitad de lo que nos hemos jugado.
- $-0,5 < E < 0$; jugamos ya que de media perderemos pero menos que si nos retiramos directamente.
- $E > 0$; doblamos la apuesta porque tenemos más opciones de ganar que de perder, por lo que nos compensa que la apuesta sea lo más alta posible.

Si seguimos pidiendo carta, nuestra esperanza será la siguiente: Si empezamos con n , nuestra esperanza será $4/13$ de la esperanza que tengamos al conseguir $n + 10$ más $1/13$ de la esperanza de conseguir $n + 9$, más $1/13$ de la esperanza de conseguir $n + 8$, etc.

Por ejemplo: si nuestra suma inicial es 12 nuestra esperanza será $1/13$ de $E(13)$ + $1/13$ de $E(14)$ + ... + $1/13$ de $E(21)$ + $4/13$ de $E(22)$. (Teniendo en cuenta que si nos pasamos de 21 perdemos y entonces, $E(22) = -1$)

Así pues, $E(n) = 4/13 \cdot E(n + 10) + 1/13 \cdot [E(n + 9) + E(n + 8) + \dots + E(n + 2) + E(n + 1)]$ donde n es el valor de la suma de tus dos primeras cartas.

Si $n + X > 21$; $E(n + X) = -1$; en este caso habríamos perdido.

LA TABLA DE ESPERANZA CUANDO EL CRUPIER TIENE UN 10 QUEDA ASÍ:

Suma que TÚ tienes	Esperanza si te plantas	Esperanza si no te plantas	Conclusión	Decisión
21	0,888575661	-1	0,888575661	Plantarse
20	0,426386651	-0,854724949	0,426386651	Plantarse
19	-0,03580236	-0,745002899	-0,03580236	Plantarse
18	-0,258651037	-0,67083385	-0,258651037	Plantarse
17	-0,481499714	-0,613807007	-0,481499714	Plantarse

Cuando nuestras cartas son menores de 10, siempre pedimos.

CONFECCIÓN DEL RESTO DE LAS TABLAS

El caso del 10 era bastante sencillo debido a que las probabilidades de llegar hasta los distintos números eran las mismas pero ¿cómo se hacen el resto de casos?

La tabla de la esperanza se hace con el mismo procedimiento, sólo cambiará la probabilidad que tiene el crupier de llegar a 17, 18, 19, 20 y 21.

Hay que hacer unas tablas como estas:

PROBABILIDAD DEL CRUPIER DE LLEGAR DESDE n A 21

n	P(n)	Suma auxiliar
16	0,076923077	0,076923077
15	0,082840237	0,159763314
14	0,089212563	0,248975876
13	0,096075067	0,345050944
12	0,103465457	0,448516401
11	0,342193569	0,79070997
10	0,111424339	0,902134309
9	0,060823844	0,962958152
8	0,069394947	1,032353099
7	0,074073704	1,106426803
6	0,079411777	1,18583858
5	0,108246173	1,294084754
4	0,11980381	1,413888564
3	0,134877351	1,548765915
2	0,148344715	1,69711063
1	0,361558131	2,05866876

Esto es sólo un ejemplo de la tabla para llegar a 21, pero también hemos hecho las tablas para llegar a 17, 18, 19 y 20. Todas estas tablas pueden ser vistas en la página 2 del Excel. Se hacen con el mismo procedimiento que la de cuando nosotros tenemos 10 y queríamos hallar la posibilidad de llegar a 21. Sumando $1/13$ cuando se puede llegar al número directamente y luego multiplicando $1/13$ por la suma de las probabilidades con las cartas siguientes. Por ejemplo: $P(14) = 1/13 + 1/13 \cdot [P(15) + P(16)]$. El dato de $P(15) + P(16)$ está en la casilla de *suma auxiliar* situada a la derecha del 15.

Esto se complica cuando cogemos los números menores que 6. Hasta el 6, si el crupier obtiene un As, automáticamente lo usa como 1 para así llegar a su objetivo. Pero cuando tiene una carta menor que 6, el crupier seguirá pidiendo cartas y usando el As como 11 pero, en caso de pasarse, podrá empezar a usar el As como un 1.

Estos casos requieren una tabla independiente:

CASOS RAROS	
5+as	0,129175818
4+as	0,134560758
3+as	0,140009796
2+as	0,145500931
1+as	0,151008395

Esta es la tabla de la probabilidad de llegar a 21 desde los supuestos complicados (si tenemos menos de 6, ya que el as puede usarse como 1 o como 11). También hay otra para la probabilidad de llegar al 20, al 19, al 18 y al 17.

Para hacer el 5 + As empezábamos sumando la probabilidad de llegar a 21 usando el As como 11, que es $1/13$ (sólo llegaremos si obtenemos un 5). Después multiplicábamos la probabilidad de llegar a situaciones desde las que se usara el As como 1 (si obtenemos 6, 7, 8, 9, 10 y figuras) por la probabilidad de llegar 21 desde allí (mirando la tabla ya hecha). Después habría que multiplicar la P (16) por $3/13$ porque hay tres opciones más de llegar a ella que a las demás (hay cuatro cartas con valor de 10) El resultado final sería:
 $P(5+As) = 1/13 + 1/3 \cdot [P(12) + P(13) + P(14) + P(15) + P(16)] + 3/13 \cdot P(16)$.

Para la probabilidad de 4+As se haría básicamente igual sólo que hay que añadir $1/13 \cdot P(5+As)$ puesto que si obtenemos un As llegaríamos a esta situación y así sucesivamente con el 3 +As, 2 +As, y As + As.

¿CÓMO HACER LAS TABLAS SI LA PRIMERA CARTA DEL CRUPIER NO ES UN 10?

El procedimiento que utilizaremos es el mismo que cuando el crupier tenía 10 solo que ahora cambiaremos las probabilidades que tiene de llegar a 17, a 18, a 19, a 20, a 21 y de pasarse, en función de la carta que tenga al principio. Este dato lo obtendremos de las tablas que acabamos de hacer y que están en la página 2 del Excel.

CASOS ESPECIALES

1. Parejas:

Cuando nos toquen dos cartas iguales, tendremos una opción más de las mencionadas hasta ahora: dividir la pareja. En este caso, jugaremos con dos apuestas distintas, por lo que tendremos que volver a poner dinero para la segunda jugada. Cada una de las jugadas será con una de las cartas que hemos separado. Para saber si esto es rentable o no, debemos aplicar el siguiente razonamiento:

$E(X,X)$ si no la separamos es $E(2X)$

$E(X,X)$ si la separamos es $2 \cdot E(X)$

Habría que elegir la opción con una esperanza mayor basándonos en las tablas que hemos hecho en la hoja 1 del Excel. De hecho, en esta página, las sumas de 2 y de 3 no tienen un sentido real, es decir, están pensadas para decidir si debemos dividir o no en los casos de pareja de doses y pareja de treses, y jugar en consecuencia. Esto es porque no se puede llegar a 2 o a 3 sin utilizar el As y, si queremos tener estos casos en cuenta, habría que hacer otra tabla distinta.

2. Jugadas con Ases:

Estos casos se plantean cuando la suma de nuestras dos primeras cartas es menor que 10 (porque podremos utilizar el As como 11 o como 1) y cuando una de nuestras cartas es un As. En cualquier caso, suele ser positivo tener ases ya que podremos arriesgar utilizándolos como onces y, si nos pasamos, tener otra oportunidad al usarlos como unos.

Para ver cuándo se usa el As como 11 y cuándo como 1 hay que estudiar la esperanza que tenemos si el as vale 11 y tener en cuenta que en los casos en lo que se pase de 21 hay que contarla como si el As valiese 1.

¿CÓMO JUGAR A PARTIR DE LAS TABLAS?

De las tablas obtenemos una información sobre la esperanza en cada jugada. Siguiendo el criterio explicado anteriormente, decidiremos retirarnos, seguir jugando o doblar la apuesta, en función de la esperanza que obtengamos. También hemos de tener en cuenta que si la esperanza que tenemos plantándonos es mayor que pidiendo carta, deberemos plantarnos; y viceversa, si la esperanza si pedimos otra carta es mayor que si nos plantamos lo más recomendable será pedir carta. Además, en el caso de que tengamos una pareja tendremos que comparar las esperanzas de jugarlas juntas y por separado, y elegir la mayor.



4. CONCLUSIONES

Por último, hemos contrastado los resultados que hemos obtenido en nuestras tablas [Anexo] con las tablas resumidas que hay publicadas en Internet y hemos observado con entusiasmo que los resultados coinciden. Es posible que nuestro trabajo no tenga ninguna repercusión en el mundo del Blackjack, que no suponga ninguna contribución. Sin embargo, a través de él, hemos conseguido alimentar valores como la constancia, la imaginación y la capacidad de superación. Este trabajo representa solo el primer paso para despertar el interés por una matemática diferente, un primer paso para cambiar la concepción que la gente tiene de las matemáticas, un primer paso para adaptarla a la que Uston o Irving concibieron y un primer paso para demostrar que las matemáticas están en todas partes. Esperamos que haya disfrutado del trabajo tanto como lo hemos hecho nosotros y a decir verdad, también esperamos haber despertado al gran jugador que tiene dentro y que éste le empuje a utilizar sus conocimientos matemáticos para demostrar al mundo que con ellos se puede vencer a cualquiera, incluso al casino. “A ganar, a ganar, pollo para cenar”

		BLACKJACK BASIC STRATEGY									
		DEALER SHOWING									
		A	10	9	8	7	6	5	4	3	2
PAIRS	A A	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP
	10 10	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
	9 9	S	S	SP	SP	S	SP	SP	SP	SP	SP
	8 8	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP	SP
	7 7	H	H	H	H	SP	SP	SP	SP	SP	SP
	6 6	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
	5 5	H	H	D	D	D	D	D	D	D	D
	4 4	H	H	H	H	H	SP	SP	H	H	H
	3 3	H	H	H	H	SP	SP	SP	SP	SP	SP
	2 2	H	H	H	H	SP	SP	SP	SP	SP	SP
HARD HANDS	17+	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
	16	H*	H*	H*	H	H	S	S	S	S	S
	15	H	H*	H	H	H	S	S	S	S	S
	14	H	H	H	H	H	S	S	S	S	S
	13	H	H	H	H	H	S	S	S	S	S
	12	H	H	H	H	H	S	S	S	H	H
	11	H	D	D	D	D	D	D	D	D	D
	10	H	H	D	D	D	D	D	D	D	D
	9	H	H	H	H	H	D	D	D	D	H
	8-	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
SOFT HANDS	A-9	S	S	S	S	S	D	D	D	D	D
	A-8	S	S	S	S	S	D	D	D	D	D
	A-7	H	H	H	S	S	D	D	D	D	D
	A-6	H	H	H	H	H	D	D	D	D	H
	A-5	H	H	H	H	H	D	D	D	H	H
	A-4	H	H	H	H	H	D	D	D	H	H
	A-3	H	H	H	H	H	D	D	H	H	H
	A-2	H	H	H	H	H	D	D	H	H	H

5. BIBLIOGRAFÍA

Cómo jugar al Blackjack:

- [http://www.vivaelblacjack.com/Indice Tem tico de Viva el.html](http://www.vivaelblacjack.com/Indice_Tem_tico_de_Viva_el.html)
- <http://www.bj21.com.ar/>
- <http://en.wikipedia.org/wiki/Blackjack>

Matemáticas:

- *Las matemáticas en los juegos de apuestas*. Edward Packel. Ed. La Tortuga de Aquiles.
- *Circo Matemático*. Martin Gardner: Capítulo 6: Paseos aleatorios y juegos de apuestas <http://www.librosmaravillosos.com/circomatematico/capitulo06.html>
- *La hoja volante UAM Revistas 19*: La paradoja del segundo As. Interpretando problemas. José A. Prado-Bassas. http://verso.mat.uam.es/web/index.php?option=com_content&view=category&id=146%3Ahoja19&Itemid=77&layout=default&lang=es
- *La hoja volante UAM Revistas 20*: El oficio de las Matemáticas: Resolución sencilla de la paradoja del segundo as. Julián de la Horra. http://verso.mat.uam.es/web/index.php?option=com_content&view=category&id=179%3Ahoja20&Itemid=77&layout=default&lang=es
- *HYPATIA Revista matemática*: http://www.educa.madrid.org/web/ies.barriodebilbao.madrid/web_hypatia/Revistas%20pdf/Revista%20probabilidad%20leer.pdf
- Particiones enteras: <http://elrinconde-ex.blogspot.com/2009/07/particiones-enteras.html>

6. ANEXOS

Los anexos, al igual que los resultados finales del trabajo, se encuentran en la hoja de cálculo de Excel que adjuntamos junto al trabajo, y que consta a su vez de tres hojas de cálculo, una primera para determinar qué hacer en cada caso en función de la esperanza, una segunda que contiene las probabilidades de llegar desde un número n a 17, 18, 19 y 20 respectivamente y la tercera en la mostramos nuestros comienzos con un Blackjack simplificado.

