Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Quinta Edición, 2010/2011

TRABAJO: La gran pirámide, Pitágoras y Fibonacci

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

- Raúl González Molina
- Álvaro Peña Pastor
- Francisco Ribas Alameda

TUTOR:

- David Gómez

CENTRO: Colegio Brains (Alcobendas, Madrid)

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS

CosmoCaixa Madrid

Obra Social "la Caixa"

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES.

El pasado verano, fui a Inglaterra con un curso para aprender inglés. En él, iba al colegio con los demás niños ingleses (pues ellos tienen un mes más de clase que nosotros en España). Un día, estaba en clase de matemáticas mientras explicaban Pitágoras, y como lo había estudiado dos años antes en el colegio me estaba aburriendo. Se me ocurrió escribir los cuadrados de los números del uno al diez. A continuación, reste cada cuadrado con su siguiente y anotando el resultado justo debajo. Después de hacer esto repetidas veces obtuve una pirámide. En ella, no era muy difícil observar diferentes propiedades entre filas y columnas.

El verano se acabó y no había realizado prácticamente ningún progreso, a excepción de una propiedad básica que consiste en que cuando encuentras un cuadrado perfecto entre los números de la pirámide quiere decir que has encontrado una terna pitagórica.

En los primeros días de colegio, le enseñe mi pirámide a un amigo. A él, le gustó mucho y decidimos agrandarla, es decir, hacer la pirámide con los cuadrados del uno al cincuenta.

Un día, una profesora nos habló de un premio de un millón de dólares que daban a aquel que descifrara el misterio de los números primos. Nosotros habíamos encontrado una propiedad con la que obteníamos todos los números primos mediante la pirámide, pero más adelante descubrimos que no era más que una casualidad debida a que la pirámide era aún pequeña.

En nuestra pirámide realizada manualmente, conseguimos extenderla hasta el número cincuenta, encontramos algunas propiedades básicas y calificamos algunos números importantes con diferentes colores

(Números Verdes: números que se obtienen tras restar el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del cateto mayor, es decir, el cuadrado del cateto menor)

(Números azules: es el cuadrado del número mediano de una terna pitagórica o la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del cateto menor)

(Número Rojo: es el número que se obtiene al restar el cuadrado del cateto mayor y el cuadrado del cateto menor).

Cuando nos hablaron de este concurso y vimos que podíamos usar la pirámide en la que habíamos trabajado tanto buscamos muchas formas de agrandar la pirámide, pues hacerla a mano costaba mucho trabajo. Al final nos decidimos a usar Microsoft Office Excel, programa con el que ampliamos la fila de los números naturales hasta el cien. Tras hacerlo con el ordenador, imprimimos la pirámide que estaba mucho más limpia que la que hicimos a mano y pudimos apreciar unas líneas (producidas al unir ciertos números) que podíamos usar para crear infinitas ternas pitagóricas.

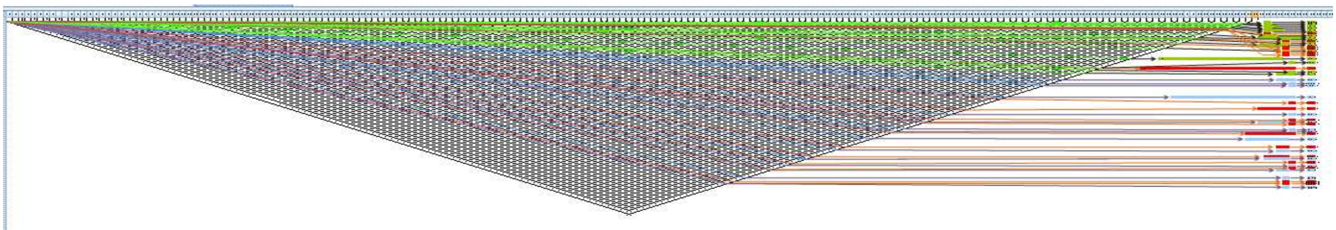
Desde entonces, hemos trabajado muy duro para encontrar más relaciones entre los números y darle contenido matemático.

OBJETIVOS Y RESULTADOS.

1. Cómo se ha construido (intuitivo y riguroso)

La Figura 1 muestra de forma intuitiva la construcción de esta herramienta que nos acompañará durante todo el trabajo dada su utilidad, pues muestra gran cantidad de datos muy visuales en poco tiempo, y de ahí se deriva su interés en este trabajo.

FIGURA 1



[1]Adjuntamos el archivo Microsoft Excel aparte.

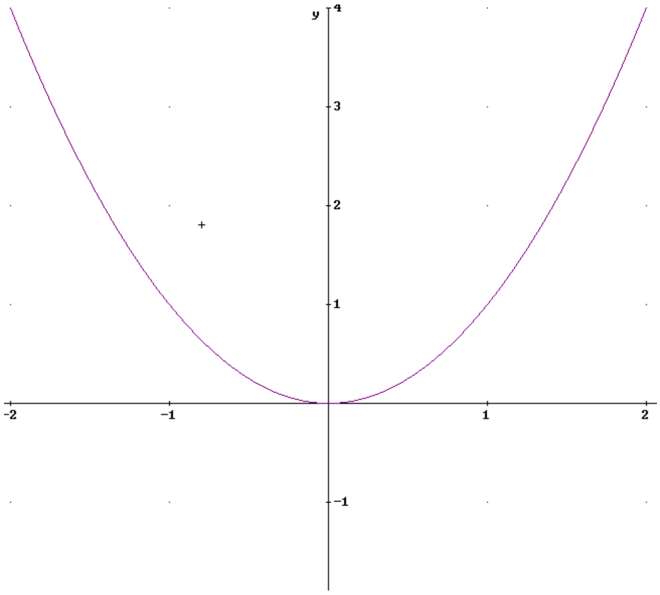
Escribimos en 100 casillas dispuestas en línea recta la sucesión $a_{1\,0}$, $a_{2\,0}$, $a_{3\,0}$,…, $a_{100\,0}$ de números enteros no negativos (es decir, incluyendo 0) con sus respectivos cuadrados adjuntamente en las mismas casillas. Entre cada dos casillas trazamos otra en la cual el número de su interior es la diferencia de cuadrados de las dos casillas entre las que se encuentra, de manera que obtenemos otra sucesión, que a modo de función de enteros no negativos en sí mismos, denotamos por $f_1(n)$. Se puede observar cada una de las casillas de esta fila como la intersección de dos diagonales: la que va desde el cuadrado menor hacia abajo y derecha, y la que va desde el cuadrado mayor hacia abajo e izquierda. De esta manera, podemos intuitivamente intersecar todas las casillas (cuadrados) entre sí, obteniendo una tabla de casillas cuyos números son precisamente la diferencia de los cuadrados que se intersecan en dicha casilla.

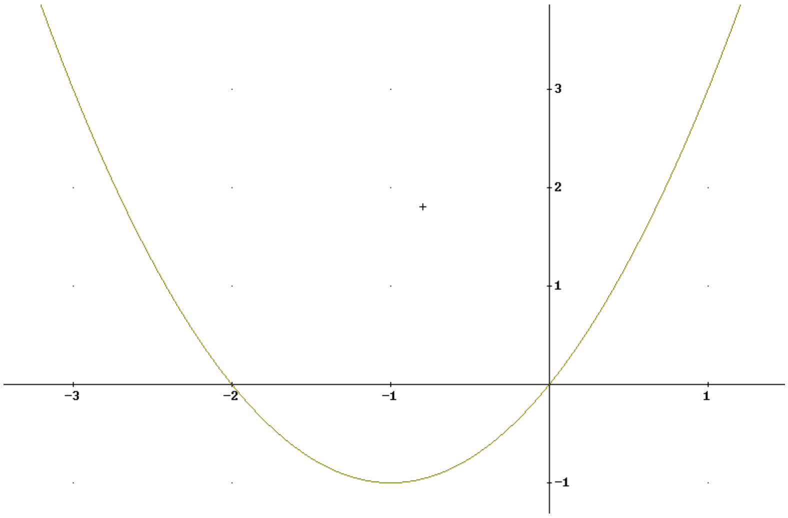
De modo más riguroso, se definen 100 funciones $f_x(n)$, en las que cada elemento $a_{n\,x} = f_x(n) = (n+x-1)^2 – (n-1)^2 = 2x(n-1) + x^2$, que corresponden a las filas de la figura, presentadas de una forma más visual. Esto es porque una casilla en cuestión representa la diferencia entre los cuadrados de donde provienen las diagonales, estos son: el menor, la suma del número de fila y su posición en la fila menos 1 ($n+x-1$), como puede observarse trivialmente en la figura; como la fila 1 indica que la diferencia es entre cuadrados contiguos, en general, la fila x indica esta diferencia entre los dos cuadrados, por lo que el cuadrado menor resulta $n-1$, de lo que se sigue la fórmula $f_x(n)$.

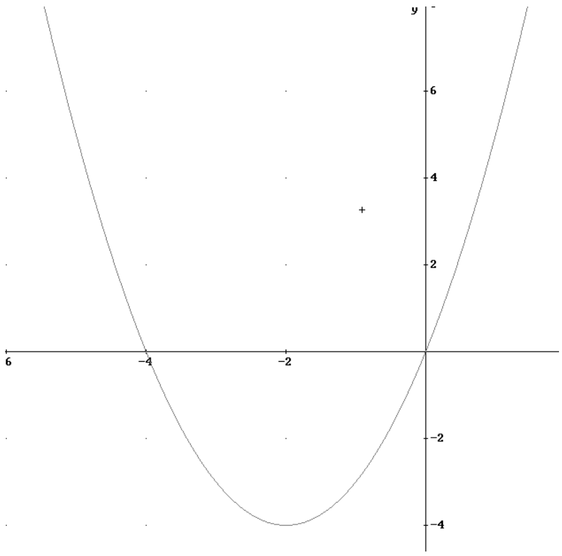
2. Interpretación geométrica de $f_x(n)$

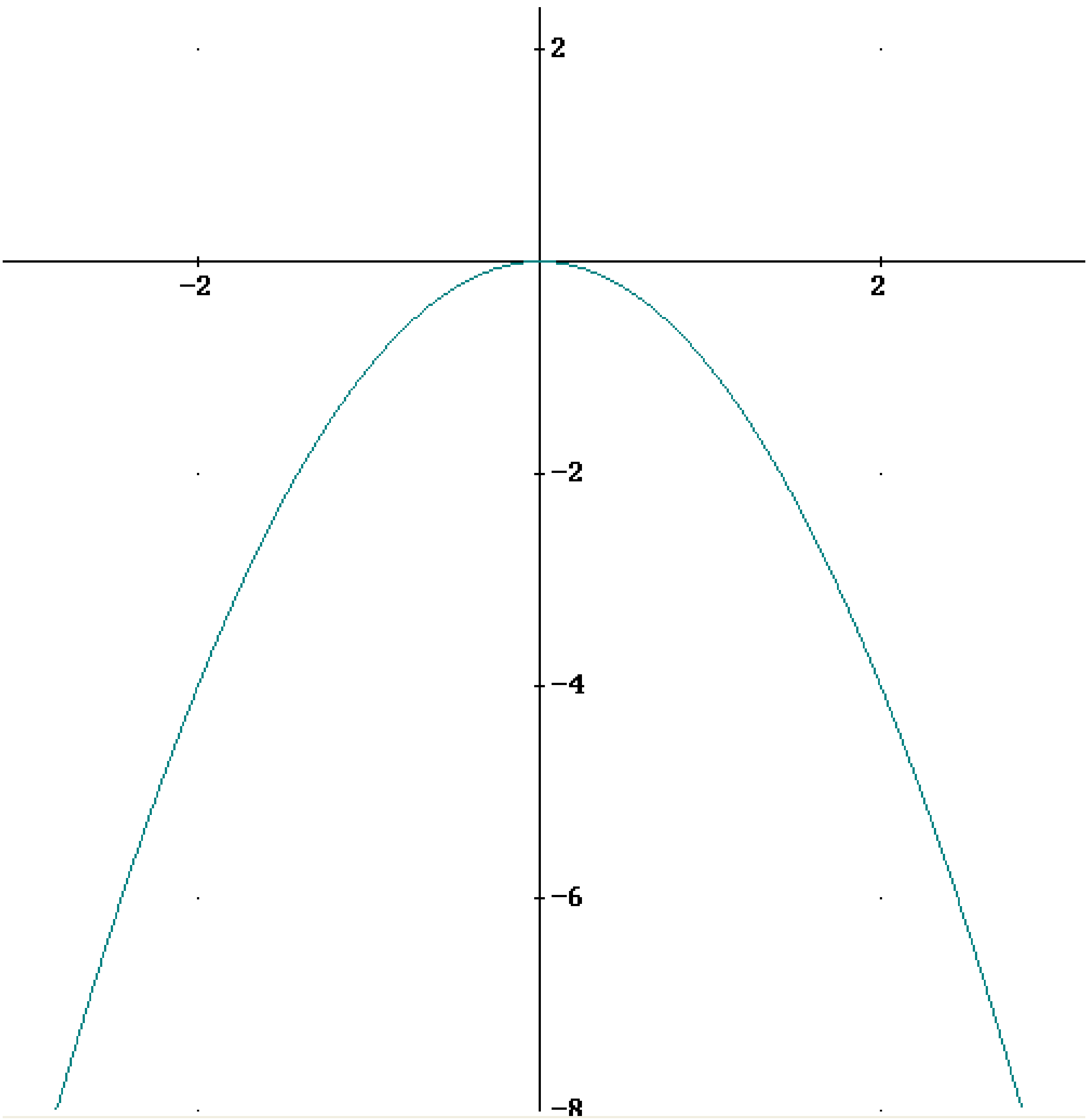
La interpretación geométrica de $f_x(n)$ consta de dos procesos, fijando cada una de las variables de la ecuación como un número natural arbitrario. Fijando en primer lugar *x*, es decir en una misma fila de la pirámide, los valores de *f* aumentan en progresión aritmética de primer orden, y como tal, su representación gráfica es un recta, que va siendo tanto más inclinada (posee mayor pendiente) si tanto más va aumentando *x*. De modo análogo, si fijamos *n*, esto es, en una misma diagonal de la pirámide (hacia abajo y derecha) la representación gráfica es una parábola, cuya curvatura es siempre la misma (1), si bien su vértice depende de *n*, particularmente, los distintos vértices de estas figuras son puntos de una parábola común. Este interesante último apartado queda bien reflejado con su correspondiente justificación matemática en la Figura 2.

FIGURA 2






y
6
4
2
-2
-4
6
-4
-2


2
-2
-4
-6
-8
-2
2

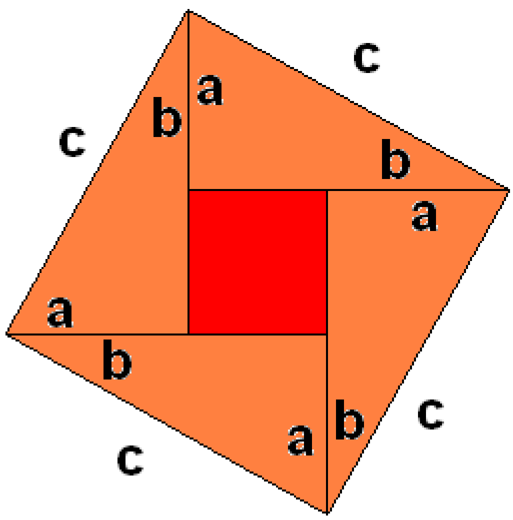
3. Definiciones y fórmulas previas al estudio de la pirámide

En esta sección sentaremos las bases del trabajo, que se fundamentan en algunas definiciones sencillas, una intuitiva demostración del teorema de Pitágoras que se hace evidente, así como un lema presentado al final de esta sección, que cabe explicar debido a que será utilizado en algunas ocasiones a lo largo del trabajo:

- Decimos que tres números naturales *a, b, c* forman una terna pitagórica si y solo si cumplen $a^2 + b^2 = c^2$, si además cumplen que $M.C.D\ (a, b, c) = 1$ decimos que dicha terna es primitiva.

- Localizada una terna pitagórica en la sucesión $a_{n\ 0}$, definimos un número verde (azul) como el valor de la intersección entre el cuadrado mayor y el cuadrado mediano (menor), que resulta ser el cuadrado menor (mediano), por el teorema de Pitágoras, que demostramos a continuación de una forma muy directa.

TEOREMA DE PITÁGORAS



El área del cuadrado de lado *c* es c^2, pero también es la suma de cuatro triángulos rectángulos de catetos *a* y *b*, y del cuadrado interior de lado *b-a*. De este modo:

$$c^2 = 4(ab/2) + (b-a)^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = a^2 + b^2$$

- Aunque en el ámbito numérico no tenga ningún significado, definimos un número rojo como la intersección entre el cuadrado mediano y el cuadrado menor.

LEMA VERDE DE LAS TERNAS PITAGÓRICAS

LEMA: **Todas** las ternas (a, b, c) de naturales que cumplen $a^2 + b^2 = c^2$, $c - b = x$ se pueden generar a partir de la siguiente función:

$f: N^2 \longrightarrow N^3$ $\quad p(x, y) = (xy, (xy^2 - x)/2, (xy^2 + x)/2)$

$(x, y) \longrightarrow (a, b, c)$ $\quad i(x, y) = (2xy - x, 2xy(y-1), 2xy^2 - 2xy + x)$

Dada por las ternas $p(x, y)$ e $i(x, y)$ según x sea par o impar respectivamente con las condiciones siguientes: x > 0, y > 1 (en *i*), 2 (en *p*).

DEMOSTRACIÓN: Dado x, la diferencia entre los cuadrados de la hipotenusa y el cateto mayor es $c^2 - b^2 = c^2 - (c - x)^2 = 2xc - x^2 = x(2c - x)$, que es un cuadrado perfecto, por el T^MA^ de Pitágoras, por lo que debe haber, por lo menos un factor x en $(2c - x)$, distinguimos los dos casos siguientes:

- CASO 1: x es par. La expresión $x(2c - x)$ es un cuadrado par, uno de cuyos factores es x^2 por lo que su raíz (el cateto menor) es de la forma xy donde y recorre los naturales. Esto es cierto, pues de las ecuaciones sólo se puede extraer esta última conclusión, que se cumple para todo $y > 2$ (ya que no existen ternas cuyo cateto menor sea 2 ó 4). Sabemos que: $c = b + x$, y como la terna ha de cumplir el T^MA^ de Pitágoras: $(xy)^2 + b^2 = (b+x)^2$, si se despeja b queda el segundo término de $p(x, y)$, ahora sólo queda sumar x para obtener c.

- CASO 2: x es impar. La expresión $x(2c - x)$ es un cuadrado impar, uno de cuyos factores es x^2 por lo que su raíz (el cateto menor) es de la forma $x(2y-1) = 2xy - x$, que sólo establece las condiciones mínimas para que el resultado sea impar sea cual sea y, para todos los impares, por el mismo motivo que en el caso 1. Procedemos de igual manera que en el caso 1 para obtener b y c.

Como últimas observaciones, cabe destacar que la segunda ecuación condicionante del lema es una mera definición del número x, si bien el lem■ asegura que todas las ternas Pitagóricas siguen la ecuación y su recíproco, esto es, si tres números naturales siguen la ecuación, entonces forman una terna pitagórica (primitiva o no), por lo que lo usaremos como recurso muy útil a la hora de enfrentarnos a las ternas.

En ambos $p(x, y)$ e $i(x, y)$, los dos primeros términos son los catetos y el tercero; la hipotenusa, el problema está en dilucidar cuál es el cateto menor y el mayor (de aquí las desigualdades expuestas en el enunciado del lema), que quedará resuelto observando las siguientes desigualdades.

$(xy^2 – x)/2 > xy$. Teniendo en cuenta que x, y son naturales, $y >2$, dándose la desigualdad contraria sii $y = 1, 2$.
$2xy(y-1) > 2xy – x$. De la misma manera, llegamos a la conclusión de que $y > 1$, dándose la desigualdad contraria sii $y = 1$, pero esto ocurre siempre por definición del lema.

4. <u>Procesos generadores de números verdes, azules y rojos</u>

A continuación se presenta un complemento teórico para el estudio de la pirámide utilizando el lema anterior, cuyo objetivo es localizar de manera rigurosa y sistemática esos curiosos números verdes, rojos y azules que parecen diseminados al azar. Este problema se abordará en primer lugar con los números verdes de forma casi trivial de la siguiente manera:

TEOREMA 1: En la fila x, el k-ésimo número verde es la imagen del primer elemento de (x, y) por la función lema siendo $k = y – 1$ (en i), 2 (en p).

DEMOSTRACIÓN: Dada una fila x en la que se encuentre el número verde, por la construcción expuesta en la primera parte del trabajo, la diferencia entre el cateto mayor y la hipotenusa será también x. Además, por definición de número verde, ha de ser un cuadrado y además el complementario al minuendo (cuadrado de la hipotenusa) y al sustrayendo (cuadrado del cateto mayor) para formar terna pitagórica. Esto es precisamente la función lema. Como el elemento de ordenación de ternas de la función lema es y, pues es el parámetro que recorre los naturales, debemos igualar y con k, con la precaución de observar las restricciones para y de esta función. Las primeras ternas $p(x, y)$ e $i(x, y)$ se forman a partir de $y = 3, 2$ respectivamente. El primer número verde será $k = 1$, por l■ que se deben hacer las siguientes igualdades: $k = y-2$ en p y $k=y-1$ en i.

Aunque no existan fórmulas concretas para determinar números azules y rojos (dado que el lema sólo contempla x como la diferencia entre la hipotenusa y el cuadrado mayor) no son necesarios más teoremas ni complementos teóricos, hemos desarrollado ya herramientas suficientes en este trabajo para obtenerlos, como se muestra en el ejemplo 2 (el método es análogo para azules y rojos).

Una importante observación es la siguiente: existe una cantidad limitada de números azules en cada fila x, que es evidente si observamos que la diferencia entre la hipotenusa y el cateto menor es también x (para obtener la casilla de intersección de número azul, que debe ser mayor que el cuadrado menor).

EJEMPLO 1: Hallar el octavo número verde de la fila 2. ➢ $8 = y-2$, por lo que $y = 10$ y $x = 2$. $(2\bullet10)^2 = \underline{\mathbf{400}}$.
EJEMPLO 2: Hallar todos los números azules de la fila 8. ➢ Por el lema verde (*p*): $(xy^2 + x)/2- xy = 8$, con únicas soluciones (válidas) $(x,y) = (4,3)$ teniendo en cuenta que *x, y* son enteros positivos, $y>2$ y *x* es par. ➢ Por el lema verde (i): $2xy^2 – 2xy + x – (2xy – x) = 8$, con soluciones válidas $(x,y) = (1,3)$. ➢ Dado que azul es cateto mayor por definición, nos fijamos en los segundos elementos de *p* e *i*: *16, 12*. Sólo queda elevarlos al cuadrado: ***<u>256, 144</u>***.

5. <u>La función $g_x(n)$ y su interpretación geométrica</u>

Con ayuda del lema verde, ahora ya sabemos como desentrañar el valor de determinadas casillas especiales que interesan en la pirámide de las ternas pitagóricas, por sus características especiales como números: azules, verdes, rojas, cuadrados…

Una vez abordado este respecto, el objetivo es ahora distinto, nos proponemos (intuitivamente) saber dónde están esas casillas dentro de la pirámide, esto es, de modo más riguroso, conocer más a fondo los aspectos interesantes de la función $f_x(n)$ en cuanto a estos misteriosos números para lo cual utilizaremos otra herramienta que presentamos a continuación:

LEMA POSICIÓN $g_x(n)$

Existe una función que determina, dado el valor de un número verde, su posición dentro de la pirámide, que tiene la siguiente expresión:

- ➢ $2xk(k+1)+1$ si *x* es impar
- ➢ $x(k+1)(k+3)/2+1$ si *x* es par

DEMOSTRACIÓN: Lo demostraremos para el caso impar, siendo análogo al par.

Una vez más, usaremos la definición de número verde en el lema verde *i*, que es x^2y^2. Sabemos que $y = k+1$ para el *k*-ésimo número verde, por lo que $x^2y^2= x^2(k+1)^2$. Si ahora lo igualamos a $f_x(n)= 2x(n-1)+ x^2$ (como vimos en el primer apartado) y despejamos *n* obtenemos la posición del *k*-ésimo número verde de la fila *x*, que operando y reordenando obtenemos la condición del enunciado.

La interpretación geométrica de la función anterior nos ofrece una muy interesante propiedad de los números verdes, y es que si fijamos *k*, la función *g* resulta una recta, esto es, todos los primeros números verdes de cada fila (y los segundos, y los terceros…) están alineados en la pirámide, ¡sorprendente! Dicho con otras palabras, cada número verde de la pirámide está contenido en una recta que contiene otros infinitos números verdes, todos ellos en la misma posición ordinal dentro de su fila.

Generalizando el lema, es la función $f_x^{-1}(n) = (f_x(n) - x^2)/2x + 1$ la que devuelve la posición de un número dentro de la fila, con lo que este método se amplía también a todos los números de la pirámide, en especial a los rojos y azules. Hemos dejado la función $g_x(n)$ por su interés en relación con los números verdes.

Es interesante ver que los números azules (si existen) y los números rojos también están alineados (aunque no de la misma forma, es decir no todos los primeros, todos los segundos, los terceros…) como los verdes, lo que es fácilmente demostrable si se utiliza la definición de número azul y rojo en el lema verde y aplicar a continuación la función $f_x^{-1}(n)$ como se ha hecho con los verdes, al resultar una función de primer grado de variable *x* (una recta).

6. Una relación funcional

Hemos completado el "panel de instrumentos" que utilizamos en este trabajo, componiéndose este esencialmente de tres funciones (a saber: $f_x(n)$, f_{Lema}, $g_x(n)$), que resuelven por ahora todas las preguntas relacionadas con órdenes, valores, posiciones, números de colores, ternas pitagóricas y distribución por la pirámide de los mismos. Sin embargo, queda una última aportación acerca de este trabajo que versará sobre la relación que estas tres funciones tienen entre sí y no para con los números.

Lo más fácil es la confección de una tabla en la queda patente esta relación implícita.

Función	**De**	**A**
$f_x(n)$	Posición dentro de la fila	Valor del número
f_{Lema}	Orden dentro de la fila	Valor del número
$g_x(n)$	Orden dentro de la fila	Posición dentro de la fila

De aquí se puede obtener una conclusión a simple vista, pero de importantes magnitudes:

TEOREMA 2: $f_x\ (g_x(n)) = f_x \circ g_x = f_{Lema}$. (1)

DEMOSTRACIÓN: Para el caso impar**:** $f_x \circ g_x = 2x[2xk(k+1)+1-1]+ x^2 = x^2(4k^2+4k+1) = x^2(2k+1)^2$. Como en el caso impar $k = y-1$, $x^2(2y-1)^2$ con lo que queda demostrado. El caso par se prueba análogamente. ■

COROLARIO 3: Existe una serie de propiedades derivadas de esta relación que se deducen inmediatamente y no se adjunta la prueba:

- $f_{Lema} \circ g_x^{-1} = f_x$ (2)
- $f_x^{-1} \circ f_{Lema} = g_x$ (3)
- $f_x^{-1} = f_{Lema}^{-1} \circ g_x$ (4)
- $g_x^{-1} = f_{Lema}^{-1} \circ f_x$ (5)
- $f_{Lema}^{-1} = g_x^{-1} \circ f_x^{-1}$ (6)

Para terminar, es notable resaltar que, después de trabajar sobre funciones, reglas y procesos, ya tenemos todos los mecanismos para movernos libremente por la pirámide, entre número verdes, azules y rojos (con sus respectivos órdenes), o simplemente entre filas y posiciones, la libertad es plena, y es que, en cuanto a los números verdes especialmente, con toda facilidad podemos hacer seis operaciones:

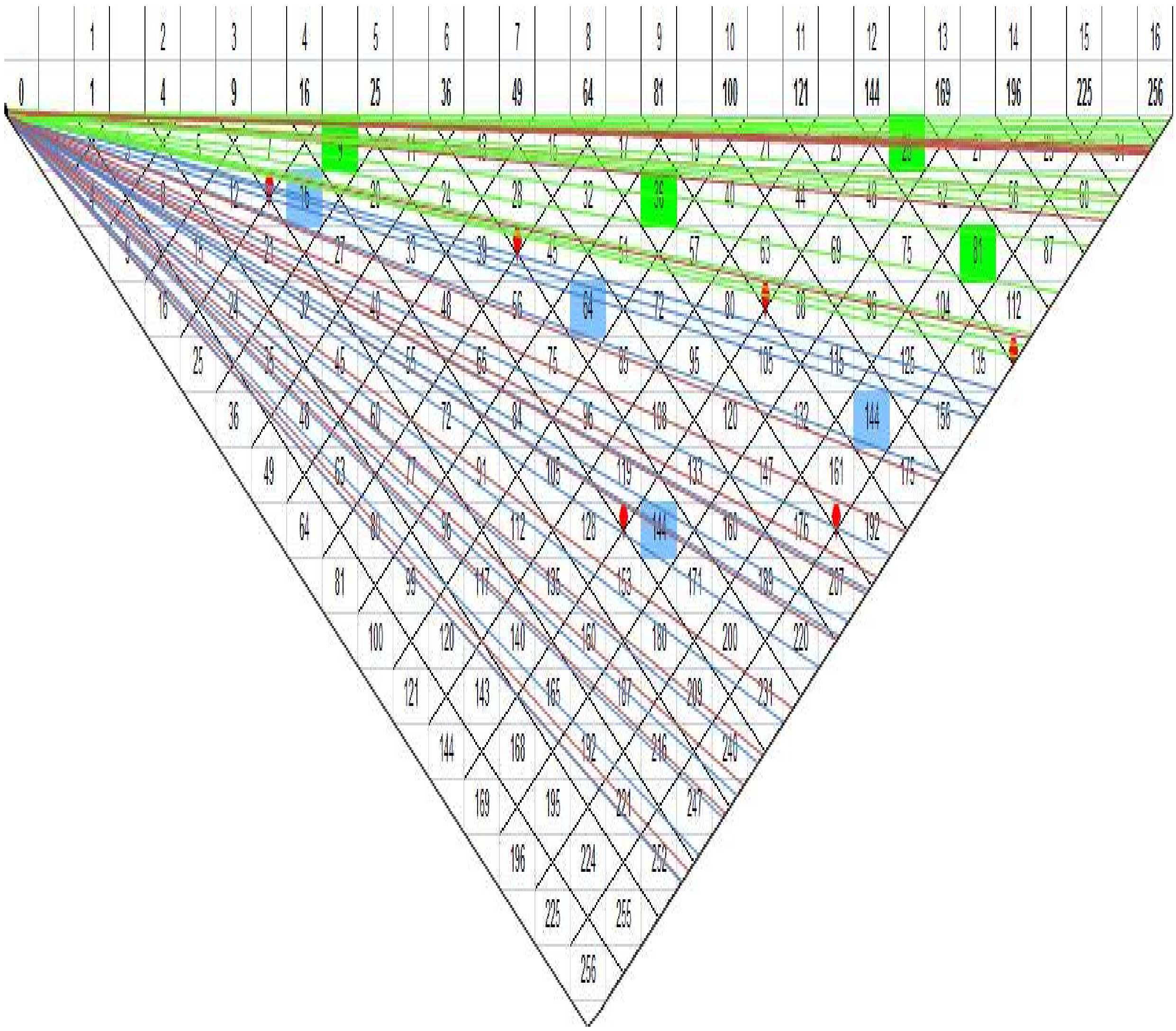
- Pasar de posición y fila a valor por (2)
- Pasar de orden y fila a valor por (1)
- Pasar de orden a posición por (3)
- Pasar de valor a posición y fila por (4)
- Pasar de valor a orden y fila por (6)
- Pasar de posición a orden y fila por (5)

En cuanto a los demás números de colores, la libertad también es plena, aunque es necesario un poco más de trabajo, pero como se muestra a continuación, es posible en pocos movimientos.

EJEMPLO 3: Hallar todas las características del número rojo *644*.

- Como 644, la fila es par, por lo que $p_2^2 - p_1^2 = 644$.
- $((xy^2 - x)/2)^2 - (xy)^2 = x^2(y^4 - 6y^2 + 1)/4 = 644$, que tiene como únicas soluciones $(x,y) = (4,4)$, que en p designan la terna *16*, *30*, *34*, por lo que se encuentra en la fila $30 - 16 =$ **14**.
- Aplicando $f_{14}(n) = 644$, $n =$ **17**.
- Como está en la fila 14, $p_2 - p_1 = 14$, que tiene 3 soluciones, las ternas *(10, 24, 26) ; (16, 30, 34) ; (42, 56, 70)*, por lo que su orden es **2**.

Aquí podemos ver una parte de la pirámide reducida:



CONCLUSIÓN

El trabajo termina con esta última aportación sobre funciones. Hemos podido investigar con nuestros métodos elementales de matemáticas de ESO una cuestión de teoría algebraica de números que hemos encontrado interesante e incluso con alguna sorpresa, como la alineación de números verdes, azules y rojos. SE PUEDEN APRECIAR ESAS MÁGICAS ALINEACIONES EN EL ARCHIVO EXCEL DEL TRIÁNGULO.
En especial nos llamó la atención desde el principio las relaciones entre las diferencias de cuadrados en ternas pitagóricas, y entre todos hallamos cada una de las tres funciones mencionadas. Lo que no sabíamos es que, para nuestra sorpresa estaban tan íntimamente relacionadas.

Hemos pretendido hacer llegar estas cuestiones numéricas de una forma directa y visual, sin perder por ello la rigurosidad matemática necesaria para transmitir esta investigación que hemos llevado a cabo durante los últimos meses.

En conclusión, aquí presentamos nuestro trabajo *EL GRAN TRIÁNGULO DE LAS TERNAS PITAGÓRICAS* por…

BIBLIOGRAFÍA

NO se han utilizado libros de texto ni páginas web. Hemos utilizado nuestra creatividad y esfuerzo personal.

Se han utilizado únicamente los siguientes programas para facilitarnos el trabajo:

- Microsoft Office Excel
- Microsoft Office Word
- PDF Creator (Impresora virtual PDF)
- Derive
- Adobe Photoshop CS2
- Paint

En las próximas páginas aparecen anexos de ternas pitagóricas, imágenes escaneadas de algunas operaciones a mano, y fotos de nuestros triángulos en papel. El trabajo se completa con los archivos Excel de las ternas pitagóricas y del triángulo.

Ternas según Cateto Menor				Según Cateto Menor (al cuadrado)		
C.MENOR	C.MAYOR	HIPOTENUSA	ROJO	C.MENOR	C.MAYOR	HIPOTENUSA
3	4	5	7	9	16	25
5	12	13	119	25	144	169
6	8	10	28	36	64	100
7	24	25	527	49	576	625
8	15	17	161	64	225	289
9	12	15	63	81	144	225
9	40	41	1519	81	1600	1681
10	24	26	476	100	576	676
11	60	61	3479	121	3600	3721
12	16	20	112	144	256	400
12	35	37	1081	144	1225	1369
13	84	85	6887	169	7056	7225
14	48	50	2108	196	2304	2500
15	20	25	175	225	400	625
15	36	39	1071	225	1296	1521
16	30	34	644	256	900	1156
16	63	65	3713	256	3969	4225
18	24	30	252	324	576	900
18	80	82	6076	324	6400	6724
20	21	29	41	400	441	841
20	48	52	1904	400	2304	2704
21	28	35	343	441	784	1225
21	72	75	4743	441	5184	5625
24	32	40	448	576	1024	1600
24	45	51	1449	576	2025	2601
24	70	74	4324	576	4900	5476
25	60	65	2975	625	3600	4225
27	36	45	567	729	1296	2025
28	96	100	8432	784	9216	10000
30	40	50	700	900	1600	2500
30	72	78	4284	900	5184	6084
32	60	68	2576	1024	3600	4624
33	44	55	847	1089	1936	3025
33	56	65	2047	1089	3136	4225
35	84	91	5831	1225	7056	8281
36	48	60	1008	1296	2304	3600
36	77	85	4633	1296	5929	7225
39	52	65	1183	1521	2704	4225
39	80	89	4879	1521	6400	7921
40	42	58	164	1600	1764	3364
40	75	85	4025	1600	5625	7225
42	56	70	1372	1764	3136	4900
45	60	75	1575	2025	3600	5625
48	55	73	721	2304	3025	5329
48	64	80	1792	2304	4096	6400
51	68	85	2023	2601	4624	7225
54	72	90	2268	2916	5184	8100
57	76	95	2527	3249	5776	9025
60	63	87	369	3600	3969	7569
60	80	100	2800	3600	6400	10000
65	72	97	959	4225	5184	9409

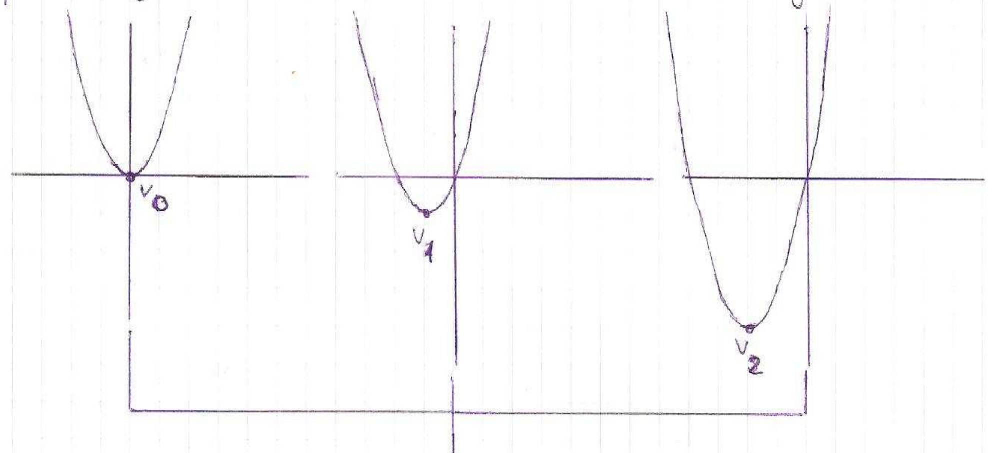
Ternas Primas			
C.MENOR	C.MAYOR	HIPOTENUSA	ROJO
3	4	5	7
5	12	13	119
7	24	25	527
8	15	17	161
9	40	41	1519
11	60	61	3479
12	35	37	1081
13	84	85	6887
16	63	65	3713
20	21	29	41
33	56	65	2047
36	77	85	4633
39	80	89	4879
48	55	73	721
60	63	87	369
65	72	97	959

Ternas Primas (al cuadrado)		
C.MENOR	C.MAYOR	HIPOTENUSA
9	16	25
25	144	169
49	576	625
64	225	289
81	1600	1681
121	3600	3721
144	1225	1369
169	7056	7225
256	3969	4225
400	441	841
1089	3136	4225
1296	5929	7225
1521	6400	7921
2304	3025	5329
3600	3969	7569
4225	5184	9409

- Figura 1 → pirámide

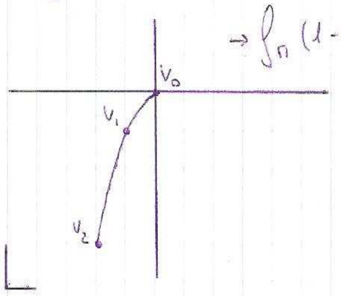
- Figura 2 :

$n = 1 \rightarrow f_x(1) = x^2$ $\quad$ $n = 2 \rightarrow f_x(2) = x^2 + 2x$ $\quad$ $n = 3 \rightarrow f_x(3) = x^2 + 4x$



$f(v) = -v^2$: Debido a $f_n'(x) = 2x + 2(n-1) \rightarrow 0 = 2x + 2(n-1) \rightarrow x = 1-n$

$\rightarrow f_n(1-n) = -n^2 + 2n - 1 = -(1-n)^2 \rightarrow f(v) = -v^2$



3	4	5	27	36	45
5	12	13	28	96	100
6	8	10	30	40	50
7	24	25	30	72	78
8	15	17	32	60	68
9	12	15	33	44	55
9	40	41	33	56	65
10	24	26	35	84	91
11	60	61	36	48	60
12	16	20	36	77	85
12	35	37	39	52	65
13	84	85	39	80	89
14	48	50	40	42	58
15	20	25	40	75	85
15	36	39	42	56	70
16	30	34	45	60	75
16	63	65	48	55	73
18	24	30	48	64	80
18	80	82	51	68	85
20	21	29	54	72	90
20	48	52	57	76	95
21	28	35	60	63	87
21	72	75	60	80	100
24	32	40	65	72	97
24	45	51			
24	70	74			
25	60	65			

Números rojos y su descomposición factorial

$7 \rightarrow 7$

$28 \rightarrow 7 \cdot 2^2$

$\boxed{41} \rightarrow 41$

$63 \rightarrow 7 \cdot 3^2$

$112 \rightarrow 7 \cdot 4^2$

$119 \rightarrow 7 \cdot 17$

$161 \rightarrow 7 \cdot 23$

$\boxed{164} \rightarrow 41 \cdot 2^2$

$175 \rightarrow 7 \cdot 5^2$

$252 \rightarrow 7 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \; (7 \cdot 6^2)$

$343 \rightarrow 7 \cdot 7^2$

$\boxed{369} \rightarrow 41 \cdot 3^2$

$448 \rightarrow 7 \cdot 8^2$

$476 \rightarrow 7 \cdot 17 \cdot 2^2$

$527 \rightarrow 31 \cdot 17$

$567 \rightarrow 7 \cdot 9^2$

$644 \rightarrow 23 \cdot 7 \cdot 2^2$

$\boxed{656} \rightarrow 41 \cdot 4^2$

$700 \rightarrow 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \; (7 \cdot 10^2)$

$721 \rightarrow 7 \cdot 103$

$847 \rightarrow 7 \cdot 11^2$

$959 \rightarrow 7 \cdot 137$

$1008 \rightarrow 7 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \; (7 \cdot 12^2)$

$1071 \rightarrow 7 \cdot 3^2 \cdot 17$

$1081 \rightarrow 23 \cdot 47$

$1183 \rightarrow 7 \cdot 13^2$

$1372 \rightarrow 7 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \; (7 \cdot 14^2)$

$1449 \rightarrow 7 \cdot 3^2 \cdot 23$

$1575 \rightarrow 7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \; (7 \cdot 15^2)$

$1792 \rightarrow 7 \cdot 16^2$

$1904 \rightarrow 7 \cdot 4^2 \cdot 17$

$2023 \rightarrow 7 \cdot 17^2$

$2047 \rightarrow 23 \cdot 89$

$2108 \rightarrow 31 \cdot 17 \cdot 2^2$

$2268 \rightarrow 7 \cdot (2 \cdot 3^2)^2 \Rightarrow 7 \cdot 2^2 \cdot 9^2 \; (7 \cdot 18^2)$

$2527 \rightarrow 7 \cdot 19^2$

$2576 \rightarrow 7 \cdot 23 \cdot 4^2$

$2800 \rightarrow 7 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \Rightarrow 7 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \; (7 \cdot 20^2)$

$2975 \rightarrow 7 \cdot 17 \cdot 5^2$

$3087 \rightarrow 7 \cdot 7^2 \cdot 3^2 \; (7 \cdot 21^2)$

$3388 \rightarrow 7 \cdot 11^2 \cdot 2^2 \; (7 \cdot 22^2)$

$3479 \rightarrow 7^2 \cdot 71$

$3703 \rightarrow 7 \cdot 23^2$

$3713 \rightarrow 47 \cdot 79$

$4025 \rightarrow 7 \cdot 5^2 \cdot 23$

$4032 \rightarrow 7 \cdot 8^2 \cdot 3^2 \; (7 \cdot 24^2)$

$4284 \rightarrow 7 \cdot 6^2 \cdot 17$

$4324 \rightarrow 2^2 \cdot 23 \cdot 47 \; (2^2 \cdot 1081)$

$4375 \rightarrow 7 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \; (7 \cdot 25^2)$

$4633 \rightarrow 41 \cdot 113$

$4743 \rightarrow 31 \cdot 17 \cdot 3^2$

$4879 \rightarrow 41 \cdot 7 \cdot 17$

$5796 \rightarrow 3^2 \cdot 2^2 \cdot 23$

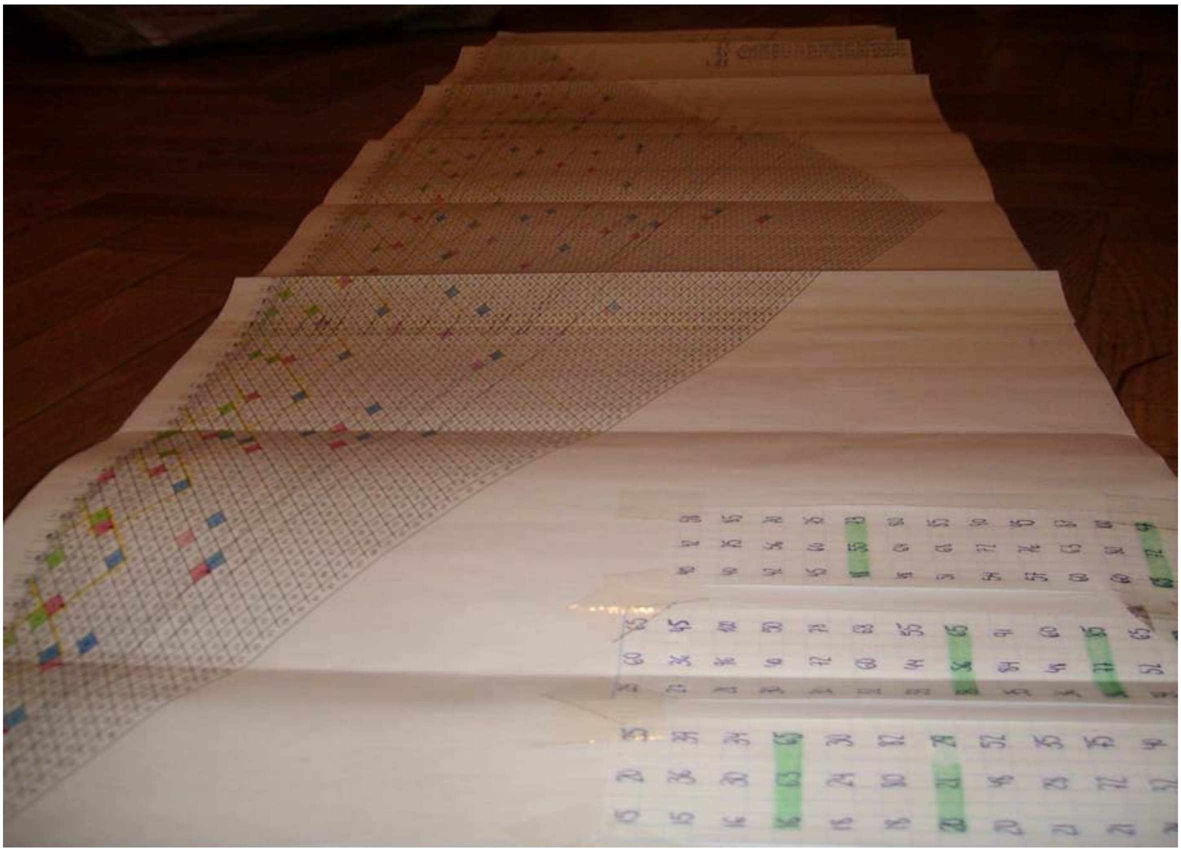
$5831 \rightarrow 7 \cdot 7^2 \cdot 17$

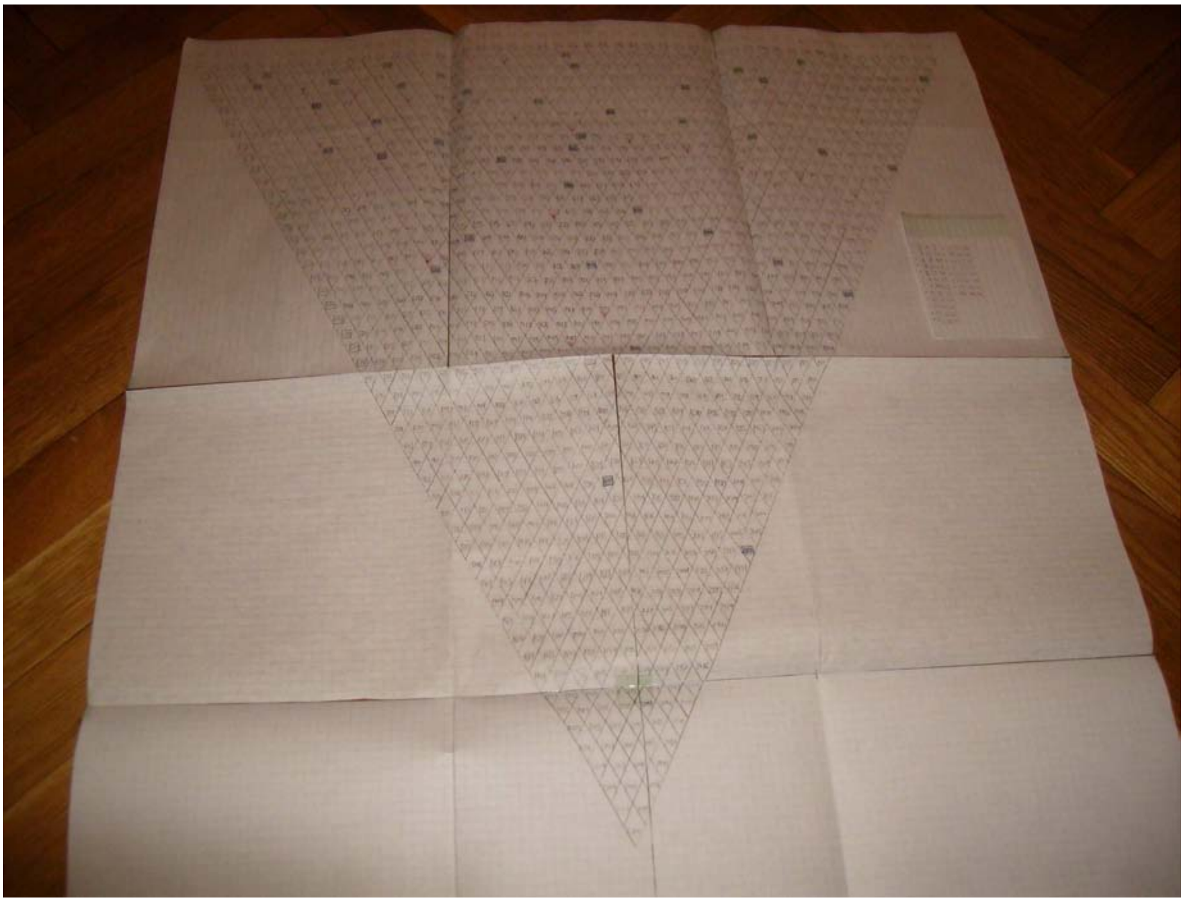
$6076 \rightarrow 7 \cdot 2^2 \cdot 31$

$6887 \rightarrow 71 \cdot 97$

$7616 \rightarrow 7 \cdot 17 \cdot 8^2$

$8432 \rightarrow 31 \cdot 17 \cdot 4^2$





Esperamos que os guste el trabajo. Un cordial saludo.