Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Quinta Edición, 2010/2011

TRABAJO: Cartoon numbers: Números figurados

FINALISTA EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

- Jesús María Cabello López
- Miguel Ángel García Rodríguez
- Ana María Lara Varcárcel
- Ángela Salido Delgado
- Sara María Soldán Rubio

TUTORA:

- María M. Vega Quirós

CENTRO: Escuelas Profesionales de la Sagrada Familia de Écija-Fundación Peñaflor (Écija, Sevilla)

CARTOON NUMBERS

Números animados

By *The Streetmaths*

1. INTRODUCCIÓN

Cuando en clase empezamos a estudiar las sucesiones parecían divertidas. Nos gustaba eso de tener que descubrir cuál era la ley que formaban las sucesiones, incluso hacíamos concursos en clase. Pero poco a poco se fue complicando, cada vez era todo más abstracto y algunos compañeros se perdían y ya no sabían qué estábamos haciendo. Entonces, durante una clase de matemáticas un compañero preguntó si las sucesiones guardaban alguna relación con los polígonos puesto que estaba interesado en descubrir si podíamos aplicar las mismas fórmulas tanto en las sucesiones como en series de polígonos, ya que decía que era más fácil entenderlo si podía verlo que si sólo eran números. Así, nuestra profesora de matemáticas nos planteó la idea de indagar sobre los denominados "*Números Figurados*".

A partir de ahí, nos informamos sobre ellos ya que hay muchos datos en páginas de consulta (Internet y diversos libros) y realizamos este proyecto de investigación en el que descubrimos y trabajamos las peculiaridades de los números poligonales o figurados, junto con las sucesiones que es lo que estábamos trabajando en clase.

La forma en la que hemos trabajado ha sido manipulativamente. Una vez a la semana nuestra profesora nos planteaba preguntas sobre números figurados y, en grupo, debíamos darle respuestas. Como algunas veces nos contaba un poco contar, matemáticamente, qué estábamos pensando nos ayudábamos de dibujos fotografías para dar nuestras respuestas. Los dibujos están incluidos en los anexos mientras que las fotos podréis verlas a lo largo de este informe, ya que nos ayudarán a explicar cuáles han sido nuestros pasos.

2. ANTECEDENTES

Los números figurados forman una sucesión de números que se forma contando los vértices de polígonos que crecen de una determinada manera. A partir de un polígono determinado podemos construir sucesiones.

Aunque su procedencia es incierta, podemos suponer que los números figurados fueron estudiados en la escuela pitagórica, que era una comunidad cerrada (tipo sexta). Fue fundada en Crotona, al sur de Italia, hacia el año 530 a.C. Se trataba de una sociedad casi religiosa dónde el secreto era mantenido bajo juramento. Los conocimientos eran trasmitidos verbalmente, por lo que suponemos que fueron transmitidos a otras personas a lo largo de los años. Es posible, incluso, que Pitágoras no existiera y su nombre pudo ser un apodo a un supuesto "Dios" al que mostraban aprecio porque creían que les transmitía sabiduría o, quizás, si existiera y fundó la escuela y recogió los conocimientos matemáticos y científicos de sus discípulos.

Los pitagóricos (miembros de la escuela pitagórica) consideraron los números especialmente. Les parecían que toda la naturaleza estaba hecha a imagen de los números, y que los números son los primeros en la naturaleza.

3. OBJETIVOS

Cuando comenzamos este trabajo de investigación nuestro objetivo principal era poder visualizar, de algún modo, las sucesiones numéricas. A partir de ahí, y conforme el trabajo fue avanzando nos propusimos contestar algunas de las preguntas que nos iban surgiendo, junto a otras que nos proponía nuestra profesora, como:

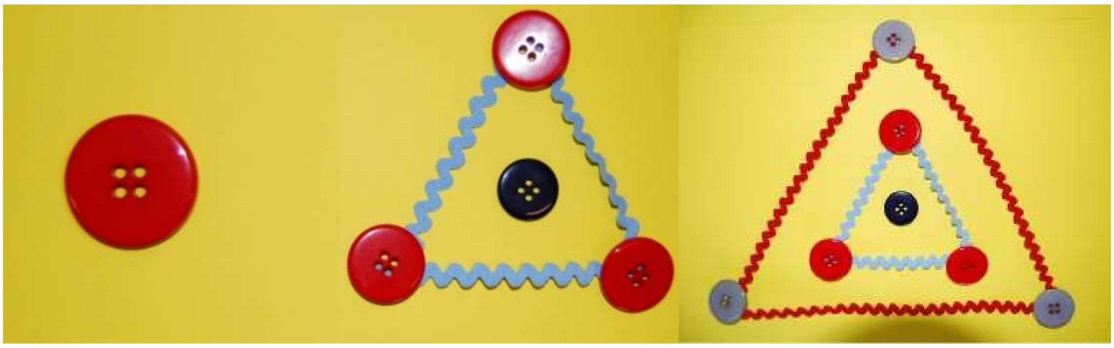
1. ¿Es posible que la suma de los términos de una sucesión infinita tenga como resultado un número finito?
2. ¿Se podría relacionar el tamaño de una figura con una sucesión matemática?
3. ¿Es posible encontrar una relación entre el área de distintas circunferencias y sus radios?
4. ¿Cuáles son los términos generales de algunos números figurados (pentagonales, cuadrados, triangulares)?
5. ¿Se puede formar con dos progresiones diferentes otra nueva?

4. BASE PARA NUESTRA INVESTIGACIÓN

Antes de empezar el trabajo de investigación propiamente dicho, comenzamos trabajando con los números figurados y las sucesiones que con ellos se forman de manera básica. Esto nos ayudó para sentar las bases y los protocolos de actuación para cuando realmente estuviéramos investigando algo cuya solución no pudiéramos encontrar fácilmente en internet.

4.1. Término general de un número triangular estrellado

Empezamos este trabajo relacionando las sucesiones con los números triangulares estrellados, definidos como configuraciones geométricas en forma de triángulo, de manera que cada término posee un triángulo exterior adicional al término anterior, tal y como se ve en la siguiente figura:



Como puede observarse en la figura anterior, numéricamente cada término se calcula sumando tres nuevos botones al anterior, así:

$a_1 = 1$

$a_2 = 4$

$a_3 = 7$

$a_4 = 10$

…

$a_n = a_{n-1} + 3$

Lo cual, según hemos estudiado en clase, es una sucesión recurrente ya que para calcular un término es necesario conocer el término anterior.

Veamos cómo aún estando definida de forma recurrente podemos encontrar su término general únicamente dependiendo de los triángulos que hayamos añadido:

$a_1 = 1$

$a_2 = 4 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 1 + 3(2-1)$

$a_3 = 7 = a_2 + 3 = a_1 + 3 + 3 = a_1 + 2 \cdot 3 = 1 + 2 \cdot 3 = 1 + 3 \cdot (3-1)$

$a_4 = 10 = a_3 + 3 = a_1 + 2 \cdot 3 + 3 = a_1 + 3 \cdot 3 = 1 + 3 \cdot 3 = 1 + 3 \cdot (4-1)$

…

$\mathbf{a_n = a_{n-1} + 3 = 1 + 3 \cdot (n-1)}$

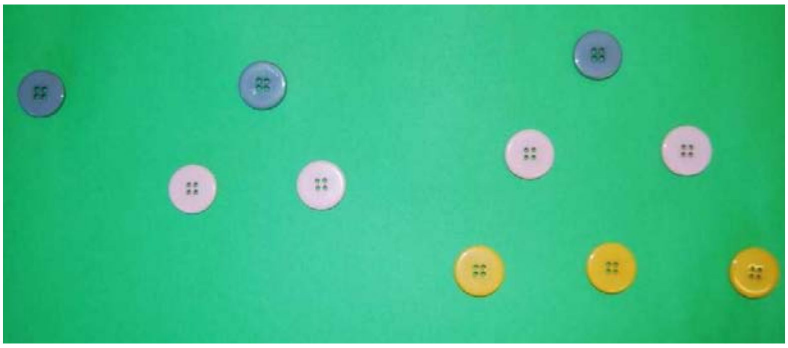
De esta manera nos es posible calcular cuántos botones nos harían falta si hubiéramos añadido 10 triángulos sin necesidad de dibujarlos y contar todos los vértices.

Si hemos añadido 10 triángulos, estamos hablando del término a_{11}, con lo cual tendríamos:

$a_{11} = 1 + 3 \cdot (11-1) = 1 + 3 \cdot 10 = 31$ vértices.

4.2. Término general de un número triangular

En este caso, la sucesión queda formada añadiendo un nuevo lado a la base del triángulo anterior de manera que nos quede un nuevo triángulo cuya longitud de los lados es una más que el anterior, tal y como se observa en la siguiente figura:



Los términos de la sucesión serían los siguientes:

$a_1 = 1$

$a_2 = 3$

$a_3 = 6$

$a_4 = 10$

…

$a_n = a_{n-1} + n$

Esta sucesión, tal y como pasaba en el apartado anterior está escrita de forma recurrente, pero podemos encontrar su término general con unos sencillos pasos:

$a_1 = 1$

$a_2 = 3 = a_1 + 2 = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$

$a_3 = 6 = a_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}$

$a_4 = 10 = a_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$

…

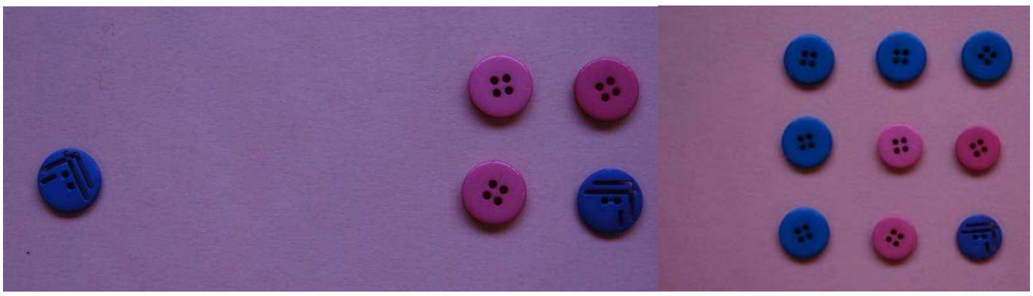
$\mathbf{a_n = a_{n-1} + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

Con esta fórmula podemos averiguar sencillamente cuántos botones hacen falta para hacer un triángulo de *x* plantas, por ejemplo de 15 plantas:

$a_{15} = \frac{15(15+1)}{2} = \frac{15 \cdot 16}{2} = \frac{240}{2} = 120$ botones.

4.3. Término general de un número cuadrado

El término general de un número figurado cuadrado es posible calcularlo de una manera mucho más fácil que los triangulares. Tal y como se muestra en la siguiente figura, se trata de multiplicar el número de término por sí mismo para ver que coincide con el número de botones contenidos en la figura:



Más adelante, cuando mostremos los resultados comprobaremos, de manera diferente a la de este apartado, que la fórmula para calcular el término general de un número cuadrado es:

$$a_n = n^2$$

4.4. Términos generales de otros números figurados estrellados

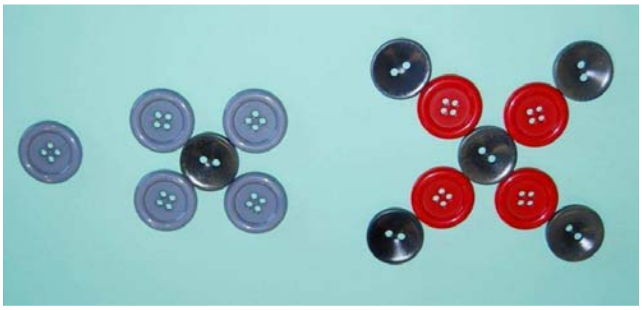
Recordamos que llamamos polígonos estrellados a aquellos definidos como configuraciones geométricas de forma que cada término posee un polígono exterior adicional al término anterior.

Por tanto, tendremos números figurados estrellados a partir de cualquier polígono que representemos.

A continuación, presentaremos el término general para algunos de ellos:

a) Cuadrados estrellados o Aspa figurada

En la siguiente sucesión se añaden en forma de cuadrado, 4 botones alrededor del anterior, como podemos ver en la siguiente figura:



Como se observa en la figura anterior se añade, de forma recurrente, 4 botones a cada término de la sucesión.

Fácilmente podemos encontrar el término general de esta sucesión, que nos hará falta más adelante cuando trabajemos con la trenza figurada:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1+4 = 5$

$a_3 = 1+4+4 = 9$

$a_4 = 1+4+4+4 = 13$

…

$\mathbf{a_n = a_1 + 4(n-1)}$

Con la fórmula hallada, cuando queramos saber los botones que necesitamos para formar un cuadrado de un determinado tamaño, por ejemplo el cuadrado a_{20}, debemos poner en práctica la fórmula del término general:

$a_{20}= 1+4(20-1)$

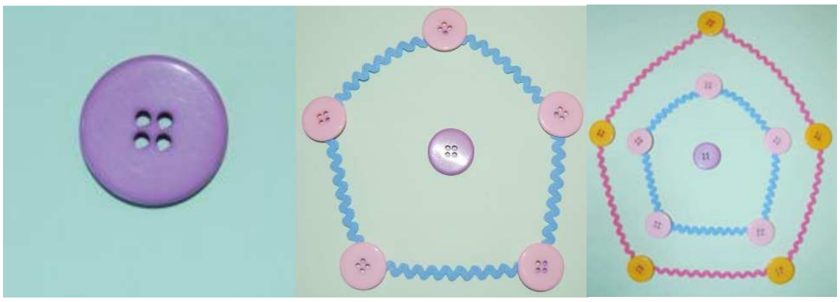
$a_{20}= 1+4\cdot19$

$a_{20}= 1+76$

$a_{20}=$ 77 botones

b) Pentagonales

La siguiente sucesión con forma pentagonal se forma añadiendo 5 botones cada vez alrededor de los términos anteriores. Podemos visualizarlo gracias a las siguientes imágenes:



En esta ocasión, para pasar de un término al siguiente, vamos sumando cinco botones.

Y, con unos sencillos cálculos, podemos calcular su término general:

$a_1= 1$

$a_2= 1+5 = 6$

$a_3= 1+5+5 = 11$

$a_4= 1+5+5+5 = 16$

…

$\mathbf{a_n= a_1+5(n-1)}$

Si necesitamos saber qué número de botones habrá en un momento determinado, por ejemplo en el término a_{15}, solo tenemos que aplicar la fórmula:

$a_{15}= 1+5(15-1)$

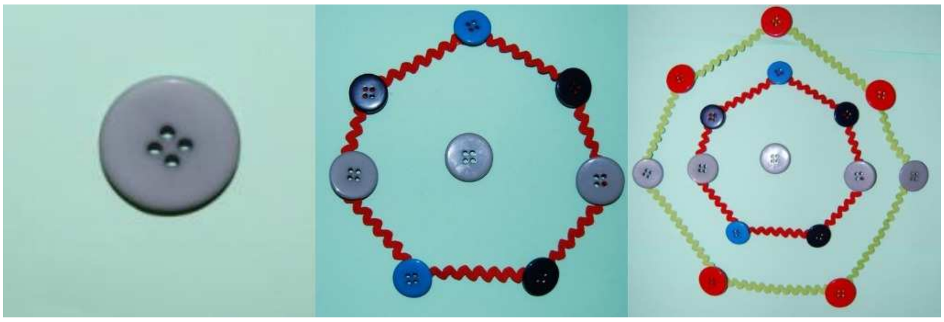
$a_{15}= 1+5\cdot14$

$a_{15}= 1+70$

$a_{15}=$ 71 botones

c) Heptagonales

A esta sucesión heptagonal, se van añadiendo el mismo número de puntos alrededor del punto central, como podemos apreciar en esta figura:



En esta sucesión recurrente, podemos averiguar el término general con una serie de sencillos cálculos:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1+7$

$a_3 = 8+7 = 1+7+7 = 1+2\cdot7$

$a_4 = 15+7 = 1+7+7+7 = 1+3\cdot7$

$a_5 = 22+7 = 1+7+7+7+7 = 1+4\cdot7$

…

$\mathbf{a_n} = a_1+7(n-1) = \mathbf{1+7(n-1)}$

Por ejemplo, si queremos calcular cuántos botones harán falta para formar la figura a_{10}, aplicamos dicha fórmula y obtendremos:

$a_{10} = 1+7(10-1)$

$a_{10} = 1+7\cdot9$

$a_{10} = 1+63$

$a_{10} =$ 64 botones

d) Números estrellados de orden *m*

Al igual que hemos calculado el término general para los números figurados estrellados cuando conocíamos cuántos lados tenía, podemos calcularlo para un polígono figurado estrellado que tenga *m* lados

$\mathbf{a_n = 1+m(n-1)}$, donde *m* es el número de vértices del polígono figurado estrellado..

5. RESULTADOS

En este apartado, presentaremos como resultados los descubrimientos que hemos hecho que más nos han gustado y sorprendido.

5.1. Termino general de un número cuadrado a partir de uno triangular

Ya hemos visto anteriormente, que el término general de un número cuadrado es: $a_n = n^2$, veamos que también podemos llegar a esta conclusión descomponiendo dicho número cuadrado en dos triangulares.

Como se ve en la figura, podemos dividir el número cuadrado como suma de dos triangulares, uno de término general *n*, y el otro de término general *n-1*, como puede observarse en la siguiente figura:

Así, sumando el número triangular *n* con el número triangular *n-1*, obtendremos el número cuadrado *n*:

$$C_n = \frac{(1+n)n}{2} + \frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}$$

$$C_n = \frac{n + n^2 + (1+n-1)(n-1)}{2}$$

$$C_n = \frac{n + n^2 + n(n-1)}{2}$$

$$C_n = \frac{n + n^2 + n^2 - n}{2}$$

$$C_n = \frac{n^2 + n^2}{2}$$

$$C_n = \frac{2 \cdot n^2}{2}$$

$$\mathbf{C_n = n^2} \qquad \text{cqd}$$

5.2. Corazones figurados

Esta sucesión la hemos puesto en este apartado puesto que nos pareció original y divertida, aunque es del mismo tipo que los número figurados estrellados del apartado cuatro.

Se trata de una sucesión recurrente que va formando corazones añadiendo 6 botones alrededor el último corazón puesto cada vez, tal y como la observamos en la siguiente figura:

Calcular el término general de esta sucesión es trivial si nos fijamos en la progresión de sus términos, como se aprecia a continuación:

$a_1 = 6$

$a_2 = 6+6 = 12$

$a_3 = 6+6+6 = 18$

$a_4 = 6+6+6+6 = 24$

…

$\mathbf{a_n = 6n}$

Si por ejemplo queremos averiguar los botones que son necesarios para dibujar ocho corazones, es decir el término a_8, debemos poner en práctica la fórmula anterior:

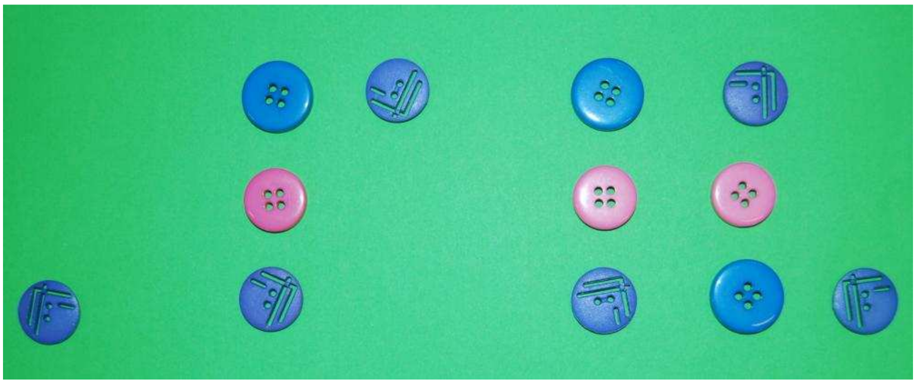
$a_8 = 6 \cdot 8$

$a_8 = 48$ botones

5.3. Serpiente figurada

A esta figura la hemos llamado de esta manera por la forma que tiene, ya que parece una serpiente deslizándose. Se construye añadiendo tres puntos, dos horizontalmente y otro vertical.

Los dos primeros puntos se añaden hacia arriba o hacia debajo de manera de que las filas verticales sean de tres puntos y el último a la derecha del último punto colocado. Formando así una especia de serpiente que va creciendo, tal y como lo observamos en la siguiente figura:



Con unos sencillos pasos, deducimos su término general, que nos ayudará a calcular los botones que necesitamos para construir un término cualquiera:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1+3\cdot 2-3 = 4$

$a_3 = 1+3\cdot 3-3 = 7$

$a_4 = 1+3\cdot 4-3 = 10$

…

$\mathbf{a_n = 1+3n-3 = 1 + 3\cdot(n-1)}$

5.4. Suma por diferencia figurada

Queremos demostrar que la identidad notable que nos dice que *suma por diferencia es igual a las diferencia de sus cuadrados,* es cierta cuando a=n y b=1. Es decir, queremos demostrar que:

$$\mathbf{n^2-1 = (n+1)\cdot(n-1)}$$

Cada término de la identidad por la izquierda, forma un cuadrado cuyo lado coincide con el número del término correspondiente, al que le falta el punto de la esquina.

Como vemos en las imágenes, la línea de puntos horizontal en la que falta un punto que se encuentra colocado horizontalmente en la parte superior, se coloca verticalmente un lateral de la figura, de forma que quedan líneas horizontales con la misma longitud formando un rectángulo. El número de puntos que suma la altura del rectángulo es el resultado del número del término menos uno, y el número de puntos que suma al largo del rectángulo es el resultado de sumarle uno al número. Al multiplicar estos dos resultados nos sale, como se ve gráficamente, la misma cantidad que si al término al cuadrado le quitamos uno.

En la siguiente imagen lo comprobamos para n=2:

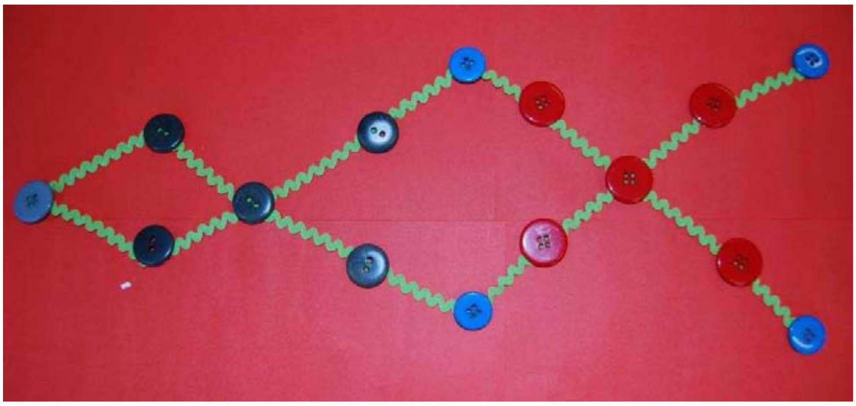
En la siguiente imagen lo comprobamos para n=3:

En la siguiente imagen lo comprobamos para n=4:

5.5. Trenza figurada: suma finita de números cuadrados estrellados

En esta sucesión de números cuadrados estrellados (aspa figurada), en el apartado anterior hemos calculado su término general: $a_n = 1+4\cdot(n-1)$

En la siguiente imagen comprobamos que si unimos los términos consecutivos del aspa figurada, obtenemos la siguiente serie:



En la imagen anterior tenemos una serie en la que vamos a calcular la fórmula para poder calcular cualquier término sin tener que saber lo que suman los anteriores. Lo deducimos razonando de la siguiente manera:

$a_1 = 1 = 1+4(1-1)$

$a_2 = 5 = 1+4(2-1)$

$a_3 = 9 = 1+4(3-1)$

$a_4 = 13 = 1+4(4-1)$

…

$a_n = \quad 1+4(n-1)$

____________________ +

$S_n = \quad n+4[0+1+2+3+\cdots+(n-1)]$

Calculando la suma de los números desde 0 hasta n-1, tenemos:

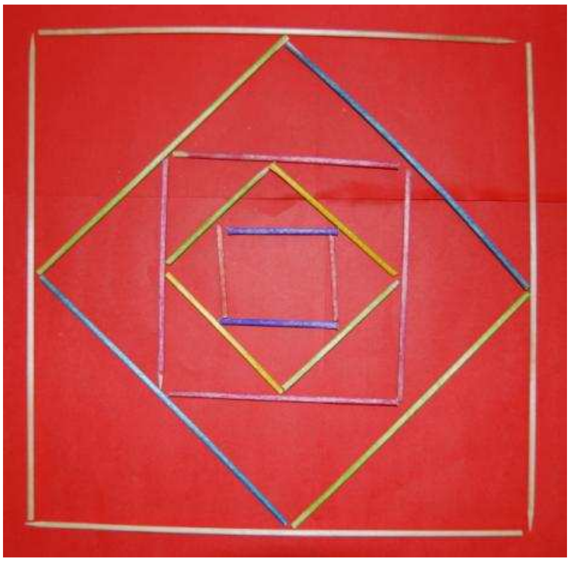
$\mathbf{S_n = n+4\cdot\frac{(n-1)n}{2}}$

En este momento debemos señalar la diferencia entre una sucesión y una serie. Esto es una serie, ya que se trata de una suma de término de una sucesión, por ejemplo:

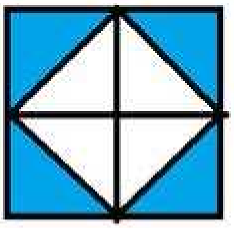
$S_3 = a_1+a_2+a_3$

5.6. Suma infinita de cuadrados

Ya hemos calculado la suma finita de los términos de una serie. A continuación, vamos a tratar de sumar los términos de una sucesión formada por las áreas de los cuadrados que se forman interiormente a un cuadrado dado, uniendo los puntos medios de cada lado, tal y como se observa en la siguiente figura:



Las A, que vamos a utilizar, son mayúsculas porque representan las áreas. El área del segundo cuadrado es la mitad del primero porque como se puede observar en el siguiente dibujo si dividimos el cuadrado en ocho partes iguales se pierden cuatro, quedando un cuadrado de área la mitad al primero.



Así, cada cuadrado tiene la mitad del área que el anterior, por lo que tendremos la siguiente sucesión de áreas:

$A_1 = 1$

$A_2 = \frac{1}{2}$

$A_3 = \frac{1}{4}$

…

$A_n = \frac{1}{n+1}$

En clase hemos aprendido a calcular la suma infinita de una progresión geométrica como la anterior, además de que la suma infinita de estas áreas es igual a un número finito cuando la razón es más pequeña que uno. Con la siguiente fórmula calcularemos cual es dicha suma:

$$S\infty = \frac{A_1}{1-r}$$

$$S\infty = \frac{1}{(1-0,5)}$$

$$S\infty = \frac{1}{0,5}$$

$$S\infty = 2$$

La razón, *r*, es igual a 0'5 porque es la cantidad por la que se multiplica cada término para que el siguiente cuadrado tenga como resultado la mitad del área.

6. CONCLUSIONES

Mientras realizábamos este proyecto, nos hemos sentido muy ilusionados, no sólo por el hecho de participar en el concurso, sino por todas las nuevas cosas que hemos aprendido.

Además, fue todo un reto realizar las investigaciones que casa semana nos mandaba nuestra profesora, pues buscábamos, analizábamos e interpretábamos toda la información que encontrábamos. Gracias a esto hemos aprendido cosas que quizás nunca aprenderíamos ya que no las necesitaríamos en nuestra vida cotidiana.

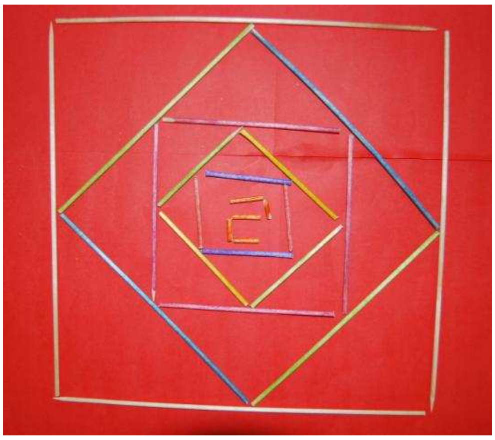
Este trabajo nos ha inspirado en cuanto a seguir encontrando y buscando nuevas características de esta asignatura tan especial, las matemáticas.

Respecto a los objetivos que nos planteábamos al principio del proyecto, respondemos así a las preguntas que nos planteábamos:

1. **¿Es posible que la suma de los términos de una sucesión infinita tenga como resultado un número finito?**

¡Sí, es posible! Aunque sumamos infinitos números descubrimos que salió un número finito.

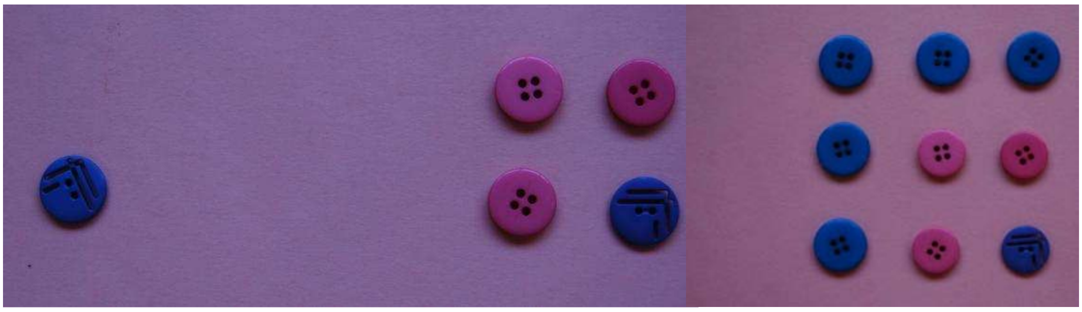
Como se muestra en el apartado 5.6., en esta progresión vamos sumando a un cuadrado de área 1, su mitad, y a éste la mitad del nuevo, hasta el infinito, obteniendo la siguiente figura:



Nos parecía imposible pero recordamos que en nuestro libro estaba la fórmula para calcular la suma de una serie geométrica, lo buscamos y lo aplicamos, y… ¡sorpresa!, la solución era 2. En ese momento no lo creíamos pero era verdad. Fue increíble y divertido porque lo hicimos con palillos y mucha paciencia.

2. ¿Se podría relacionar el tamaño de una figura con una sucesión matemática?

A esta pregunta hemos respondido afirmativamente puesto que hemos encontrado que el área de los números cuadrados se puede calcular aplicando la fórmula de su término general: $a_n = n^2$, tal y como observamos en la siguiente figura:



3. ¿Es posible encontrar una relación entre el área de distintas circunferencias y sus radios?

Hicimos una prueba con un círculo de diámetro 1 y lo comparamos con otro círculo de la mitad de su diámetro. Nos llevamos una sorpresa al descubrir que la relación entre las áreas de $1-\frac{1}{4}$. Pero, como no profundizamos mucho en ello, no lo hemos incluido en el trabajo.

4. **¿Cuáles son los términos generales de algunos números figurados (pentagonales, cuadrados, triangulares)?**

Para responder a estas preguntas hemos realizado una sucesión de cada una de las formas geométricas con botones y cuerdas. Esto ha sido divertido. Al hacer estas figuras nos hemos dado cuenta rápidamente de cuál era el término general y, a partir de ahí, demostrarlo ha sido bastante fácil.

5. **¿Se puede formar con dos progresiones diferentes otra nueva?**

Pues claro que sí. Para responder esta pregunta, hemos realizado una figura cuadrada y nos dimos cuenta que si la dividíamos formaríamos dos figuras triangulares. Esto lo hicimos más tarde con botones y lo introduciríamos en el trabajo, de manera que quedó muy bien desde nuestro punto de vista, ¡Todo ha sido muy divertido!

7. BIBLIOGRAFÍA

Libro de texto Matemáticas, Anaya 3º E.S.O.

Páginas webs:

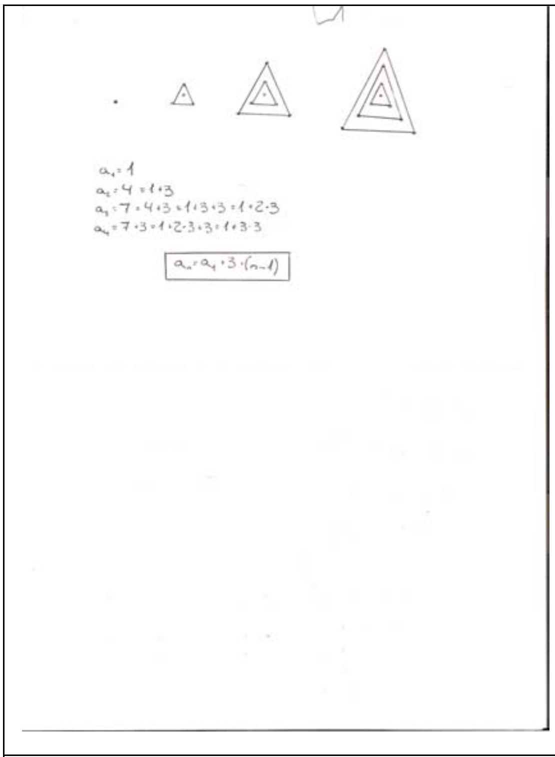
http://es.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras

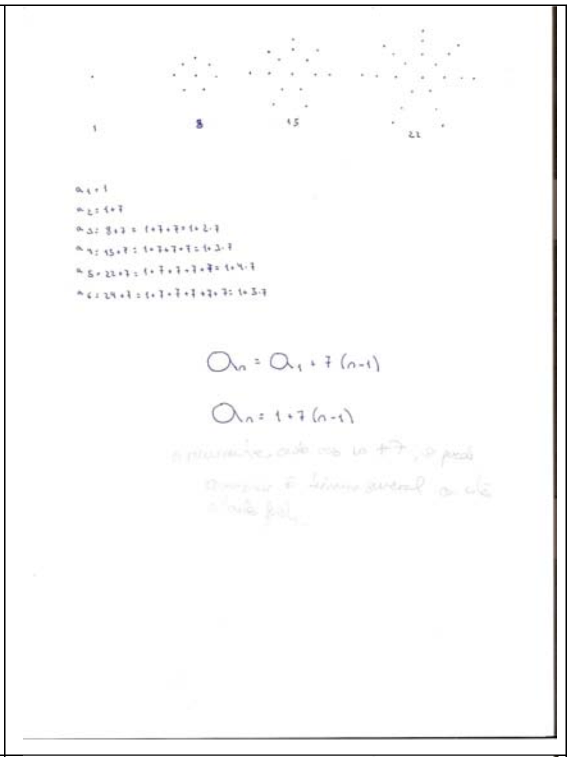
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/algebra/patrones/patrones.htm

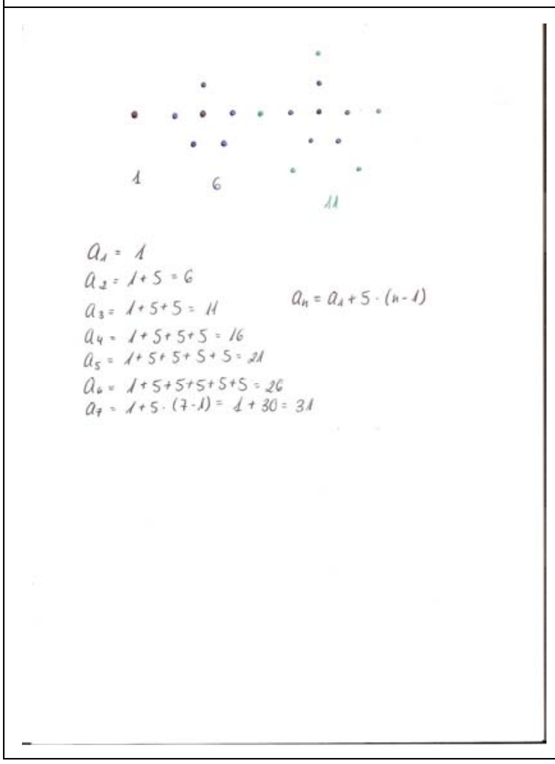
http://filosofia.laguia2000.com/filosofia-griega/la-escuela-pitagorica

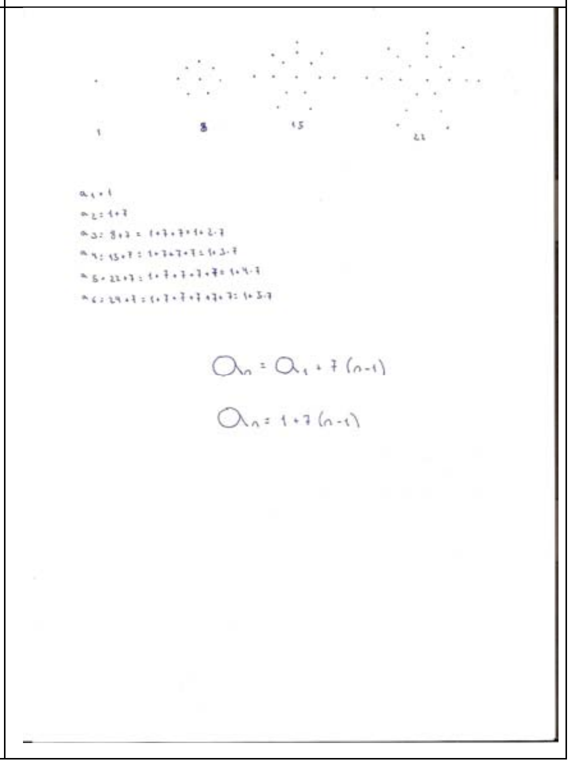
8. ANEXOS

Como anexos, en las siguientes páginas, vamos a incluir algunos de los documentos escritos que, semana a semana, hemos ido desarrollando en grupo para poder ir avanzando en la investigación que estábamos realizando.

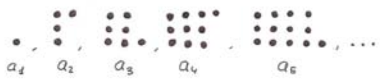

$a_1 = 1$
$a_2 = 4 = 1+3$
$a_3 = 7 = 4+3 = 1+3+3 = 1+2\cdot3$
$a_4 = 7+3 = 1+2\cdot3+3 = 1+3\cdot3$
$\boxed{a_n = a_1 + 3\cdot(n-1)}$


1
8
15
22
$a_1 = 1$
$a_2 = 1+7$
$a_3 = 8+7 = 1+7+7 = 1+2\cdot7$
$a_4 = 15+7 = 1+7+7+7 = 1+3\cdot7$
$a_5 = 22+7 = 1+7+7+7+7 = 1+4\cdot7$
$a_n = a_1 + 7(n-1)$
$a_n = 1+7(n-1)$


1
6
11
$a_1 = 1$
$a_2 = 1+5 = 6$
$a_3 = 1+5+5 = 11$
$a_4 = 1+5+5+5 = 16$
$a_5 = 1+5+5+5+5 = 21$
$a_6 = 1+5+5+5+5+5 = 26$
$a_7 = 1+5\cdot(7-1) = 1+30 = 31$
$a_n = a_1 + 5\cdot(n-1)$


1
8
15
22
$a_1 = 1$
$a_2 = 1+7$
$a_3 = 8+7 = 1+7+7 = 1+2\cdot7$
$a_4 = 15+7 = 1+7+7+7 = 1+3\cdot7$
$a_5 = 22+7 = 1+7+7+7+7 = 1+4\cdot7$
$a_n = a_1 + 7(n-1)$
$a_n = 1+7(n-1)$

LA SERPIENTE



$a_1 = 1$

$a_2 = 1+3\cdot 2-3 = 4$

$a_3 = 1+3\cdot 3-3 = 7$

$a_4 = 1+3\cdot 4-3 = 10$

$a_5 = 1+3\cdot 5-3 = 13$

$a_n = 1+3\cdot n-3$

$a_1 = 1$

$a_2 = 1+4$

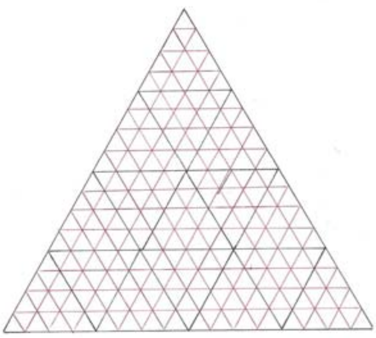
$a_3 = 5+4 = 1+4+4 = 1+2\cdot 4$

$a_4 = 9+4 = 1+2\cdot 4+4 = 1+3\cdot 4$

$a_5 = 13+4 = 1+3\cdot 4+4 = 1+4\cdot 4$

$a_6 = 17+4 = 1+4\cdot 4+4 = 1+5\cdot 4$

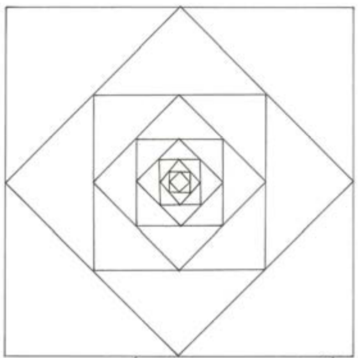
$a_n = a_1 + 4(n-1)$



SUMA DE LAS ÁREAS DE TODOS LOS TRIÁNGULOS QUE SE FORMAN

$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{16}}$

$S_\infty = \frac{1}{\frac{15}{16}} = 1 : \frac{15}{16} = \frac{16}{15} = \boxed{1,06}$



SUMA DE LAS ÁREAS DE TODOS LOS CUADRADOS QUE LO FORMAN

$A_1 = 1$

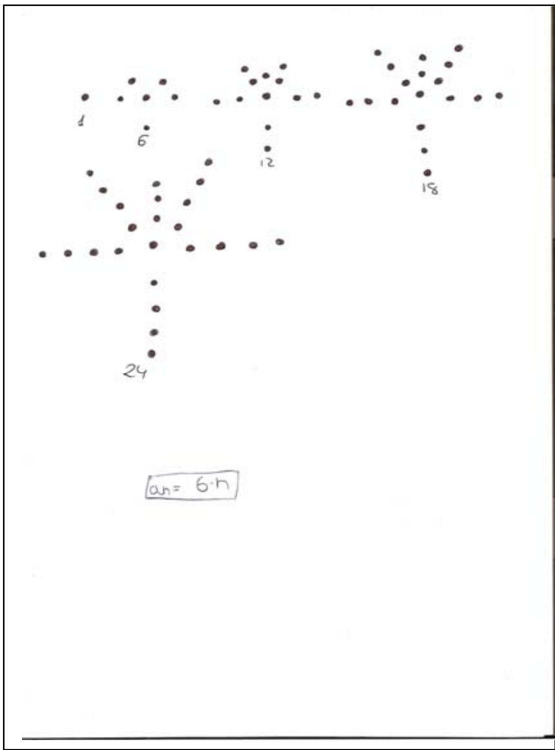
$A_2 = \frac{1}{2}$

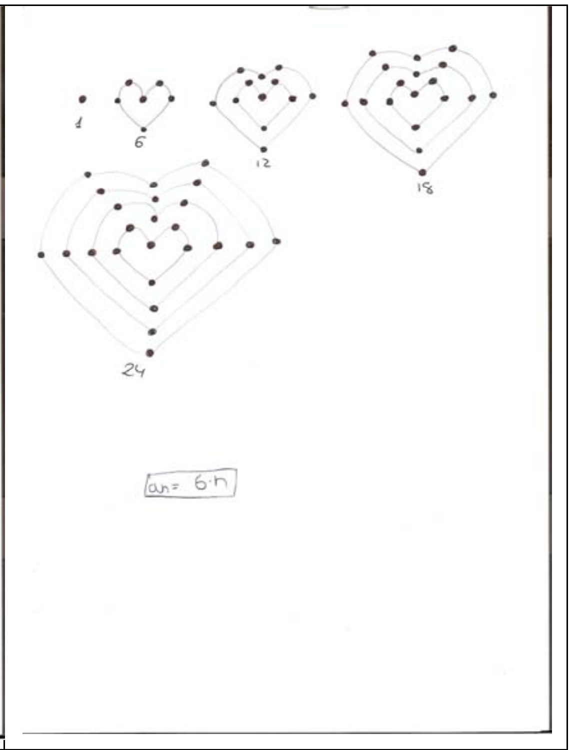
$A_3 = \frac{1}{4}$

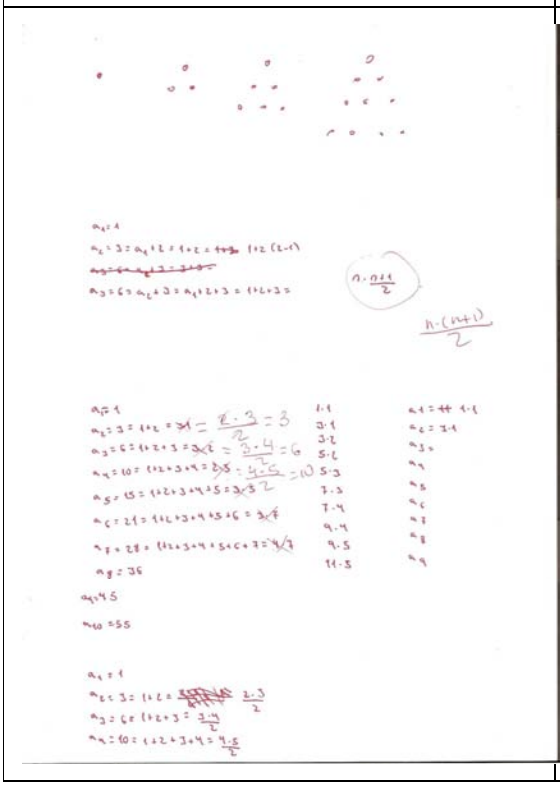
$r = \frac{1}{2} / 0'5$

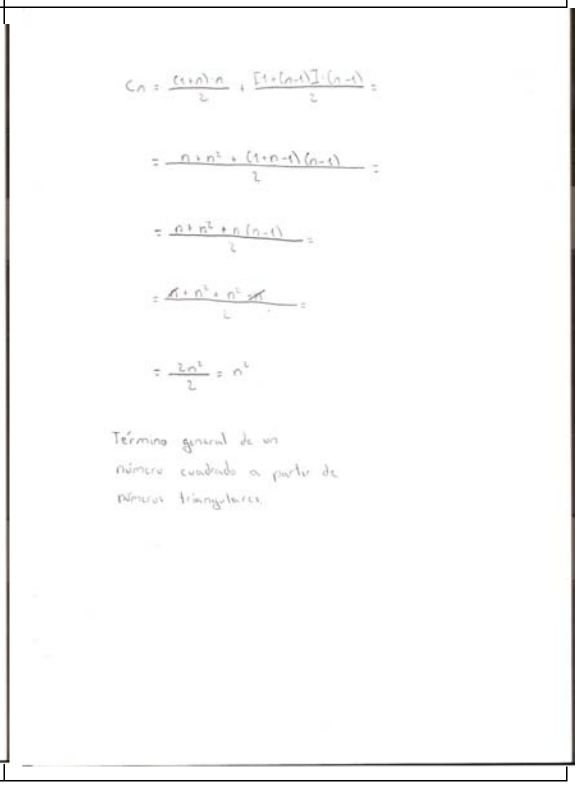
$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

$S_\infty = \frac{1}{1-0'5} = \frac{1}{0'5} = \boxed{2}$


1
6
12
18
24
an= 6·n


1
6
12
18
24
an= 6·n


n·(n+1)/2
a9=45
a10=55


Cn = (1+n)·n/2 + [1+(n-1)]·(n-1)/2 =
= (n+n² + (1+n-1)(n-1))/2 =
= (n+n² + n(n-1))/2 =
= (n + n² + n² - n)/2 =
= 2n²/2 = n²
Término general de un número cuadrado a partir de números triangulares