

Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Primera Edición, 2006/2007

TRABAJO: Del cielo al papel

FINALISTA EN LA CATEGORÍA DE BACHILLERATO

AUTORES:

- o Víctor Escarabías Rey
- o Ricardo Gómez Vicente
- o Almudena Martín Gutiérrez
- o Adrián Jiménez Pascual
- o Nuria Utrilla Cid

TUTORES:

- o Isabel Grávalos
- o María Teresa Gutiérrez

CENTRO: Colegio Cardenal Spínola (Madrid)



DEL CIELO

AL

PAPEL

POR: ECCE TURMA.

ÍNDICE:

1 – Introducción y antecedentes.....	Página 3
2 – Objetivos.....	Página 6
3 – Metodología y resultados.....	Página 6
• Investigación A.....	Página 6
• Investigación B.....	Página 14

Anexos:

4 - Datos.....	Página 20
5 – gráfica original.....	Página 28

BIBLIOGRAFÍA

1º Encarta 2006.

2º/ Página Web <http://www.tutiempo.net>

3º/ ‘Observar el cielo’, David H. Levy, Ed. Geoplaneta periplo

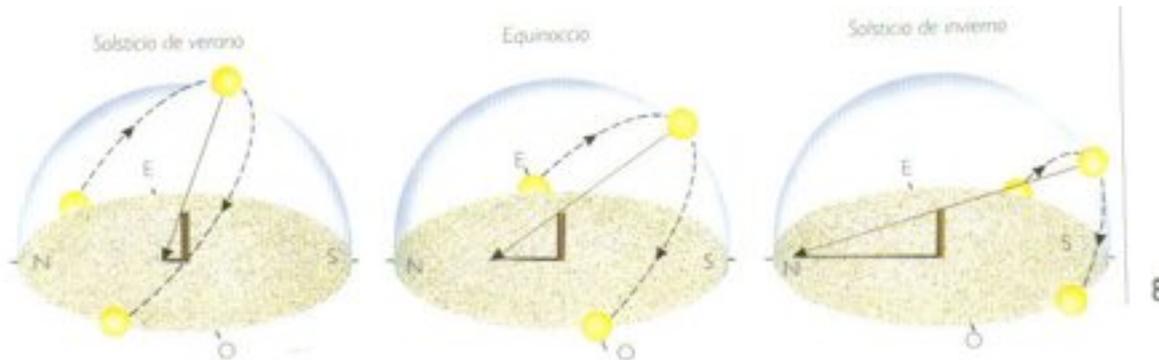
1 – INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES:

Nos hemos documentado sobre los siguientes temas:

La eclíptica

La **eclíptica** es el círculo máximo de la trayectoria anual aparente del Sol en la esfera celeste, visto desde la Tierra. Se denomina así debido a que los eclipses tienen lugar cuando la Luna se encuentra en esta trayectoria o cerca de ella.

El plano de esta trayectoria, llamado **plano de la eclíptica**, forma con el plano del ecuador celeste (proyección del ecuador terrestre en la esfera celeste) un ángulo de $23^{\circ}27'$. Este ángulo se llama oblicuidad de la eclíptica y es, casi constante durante un periodo de millones de años, aunque en la actualidad está disminuyendo a razón de 48 segundos de arco en cada siglo y disminuirá durante varios milenios hasta que alcance $22^{\circ}54'$, después de lo cual volverá a aumentar. Los dos puntos en los que la eclíptica corta al ecuador celeste se llaman nodos o **equinoccios**. El Sol está en el equinoccio de primavera o punto vernal en torno al 21 de marzo y en el equinoccio de otoño alrededor del 23 de septiembre. A mitad de camino entre los equinoccios se producen los **solsticios** de verano e invierno. El Sol alcanza estos puntos en torno al 21 de junio y al 22 de diciembre, respectivamente. Los nombres de los cuatro puntos se corresponden con las estaciones que comienzan en el hemisferio norte por esas fechas. Los equinoccios no son fijos porque el plano del ecuador gira en relación al plano de la eclíptica; completa un giro cada 25.868 años. El movimiento de los equinoccios en la eclíptica se llama precesión de los equinoccios.



La eclíptica se utiliza también como el círculo esencial para un sistema de coordenadas denominado sistema de coordenadas eclípticas. La latitud celeste se mide de norte a sur de la eclíptica. La longitud celeste se mide de este a oeste del equinoccio de primavera.

En astrología, la eclíptica se divide en doce arcos de 30° llamados **signos del zodiaco**. A estos signos, o "casas del cielo", se les da el nombre de las constelaciones por las que pasa la eclíptica.

Estaciones en la Tierra

La Tierra gira alrededor del Sol a una distancia media de 150 millones de Km.; pero como su órbita no es circular sino elíptica, unas veces está más cerca del Sol que otras. Las **leyes de Kepler** explican el movimiento de traslación de los astros. Éstas son:

1ª/ *Ley de las órbitas*: “Todos los planetas describen órbitas elípticas teniendo al Sol en uno de sus focos”.

2ª/ *Ley de las áreas*: “Los vectores de posición de los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales”.

3ª/ *Ley de los periodos*: “Los cuadrados de los periodos de traslación son directamente proporcionales a la distancia media al Sol al cubo”.

$$T^2 = k \cdot R^3$$

Las estaciones resultan de la división de la órbita elíptica terrestre en cuatro partes iguales. Como hemos dicho anteriormente, cada una de estas cuatro partes (estaciones) comienza en un solsticio (verano o invierno) o equinoccio (primavera u otoño).

Debido a que el eje de la Tierra no es perpendicular a la eclíptica en el hemisferio norte y en el hemisferio sur se experimentan estaciones opuestas.

En junio en el hemisferio sur es invierno y en el hemisferio norte es verano. En esta época del año la luz del Sol no llega al polo Sur.

En diciembre la Tierra ya habrá dado media vuelta alrededor del Sol y las estaciones se habrán invertido y por tanto en este caso el Sol nunca se pondrá en el polo sur y se podrá observar un fenómeno llamado Sol de media noche.

En marzo y septiembre los dos hemisferios comparten de igual manera las horas de Sol y de oscuridad.

Movimientos del Sol en el cielo

En la mitad del recorrido (mediodía) que el Sol hace desde que sale hasta que se pone, el Sol alcanza su punto más alto en el cielo. Durante el verano la sombra es más corta al mediodía y el día tiene más horas de luz (es el momento del año en que el Sol alcanza su punto más alto); pero sin embargo si se analiza la sombra en invierno se ve que es más larga y el día tiene menos horas de luz (es el momento del año en que el Sol alcanza su punto más bajo).

Al mediodía de los primeros días de primavera y otoño la longitud de la sombra proyectada en el plano está a medio camino entre el mínimo estival y el máximo invernal.

El movimiento diario del Sol determina el ciclo de día y noche. Las veinticuatro horas de nuestro día son el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta sobre sí misma (rotación).

Los calendarios y su historia.

El calendario es el sistema de medida del tiempo para las necesidades de la vida civil, con la división del tiempo en días, meses y años. Las divisiones del calendario se basan en los movimientos de la Tierra y las apariciones regulares del Sol y la Luna. Un día es el tiempo medio necesario para una rotación de la Tierra sobre su eje.

La medición de un año se basa en la traslación de la Tierra alrededor del Sol y se llama año estacional, tropical o Solar. Un año Solar contiene 365 días, 5 h, 48 m, y 45,5 s.

Los meses eran calculados inicialmente por los pueblos antiguos como el tiempo entre dos lunas llenas, o el número de días necesarios para que la Luna circunde la Tierra (29,5 días). Esta medición, llamada mes lunar o sinódico, daba lugar a un año lunar de 354 días, 11 días más corto que un año Solar.

Sin embargo, en los calendarios modernos el número de días de un mes no está basado en las fases de la Luna. La duración de los meses es aproximadamente una duodécima parte de un año (28 a 31 días) y se ajusta para hacer coincidir los 12 meses en un año Solar.

La semana procedía de la tradición judeocristiana que disponía descansar del trabajo cada siete días. No está basada en fenómenos naturales. Los romanos dieron nombre a los días de la semana en honor del Sol, la Luna y varios planetas.

Las variaciones entre los muchos calendarios en uso desde los tiempos antiguos a los modernos han sido debidas a la inexactitud de los primeros cálculos de la duración del año, junto con el hecho de que un año no puede ser dividido exactamente por ninguna de las demás unidades de tiempo: días, semanas o meses. Los calendarios más antiguos basados en meses lunares dejaron con el tiempo de coincidir con las estaciones. Ocasionalmente había que intercalar o añadir un mes para conciliar los meses lunares con el año Solar. Fueron muchos los calendarios establecidos hasta llegar al que utilizamos en la actualidad, el romano, sobre el cual versamos brevemente a continuación.

EL CALENDARIO ROMANO:

En el año 45 a.C., Cayo Julio César estableció un calendario basado en un año Solar de 365 días y $\frac{1}{4}$ de día. Con este sistema, los cuartos de día acumulados se absorbían cada cuatro años mediante el llamado año bisiesto, que todavía hoy se sigue utilizando. Además, este calendario también determinó el orden de los meses y días de la semana, que forman la base del calendario moderno.

El original calendario romano, introducido hacia el siglo VII a.C., tenía 10 meses con 304 días en un año que comenzaba en marzo. Dos meses más, enero y febrero, fueron añadidos posteriormente en el siglo VII a.C., pero como los meses tenían solamente 29 o 30 días de duración, había que intercalar un mes extra aproximadamente cada segundo año. Los días del mes eran designados por el incómodo método de contar hacia atrás a partir de tres fechas: las calendas, o primeros de mes; los idus, o mediados de mes, que caían el día 13 de ciertos meses y el día 15 de otros; y las nonas, o el noveno día antes de los idus.

2 - OBJETIVOS:

Nuestros objetivos son analizar el movimiento del Sol en dos de sus aspectos:

- A. Hallar la forma y la trayectoria de la sombra que proyecta un objeto a lo largo del día.
- B. Hallar la ecuación que rige la variación, a lo largo del año, de las horas de salida y de puesta del Sol.

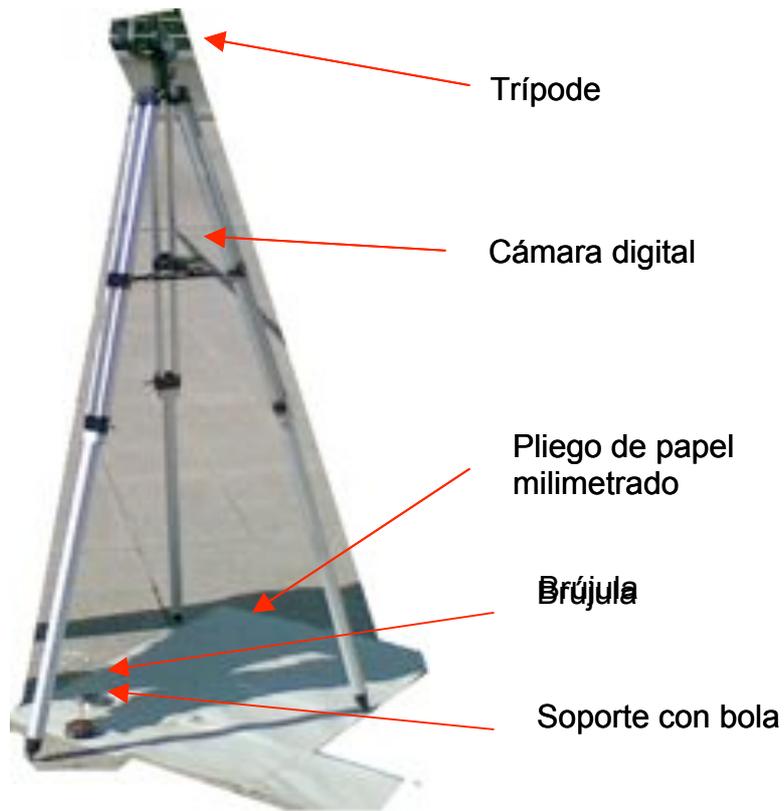
A nuestra lista de objetivos habría que añadir otros que no hemos podido llevar a cabo por diversos motivos: el cambio de posición del Sol a la misma hora de días sucesivos, el recorrido que hacía la Luna en una noche tomando datos de todas las horas, y el cambio de posición de la Luna a la misma hora de noches sucesivas.

3 - METODOLOGÍA Y RESULTADOS:

Investigación A:

Nuestro objetivo principal era conocer y analizar la trayectoria de la sombra que proyecta un objeto bajo la acción de la luz Solar a lo largo del día. Decidimos utilizar como elemento del experimento un objeto pequeño y alargado, para obtener así la máxima precisión en la medida, y evitar interferencias de su sombra con otros elementos del entorno.

Sobre un papel milimetrado, en el que marcaríamos los datos con la mayor exactitud posible, situamos un delgado palo metálico, apoyado verticalmente sobre un soporte de madera y con una bola de “blue-tag” incrustada en su extremo superior. La sombra proyectada por la bola nos daría los datos para el experimento. Además, una cámara de fotos digital, enfocando verticalmente hacia el suelo en donde estaba el papel milimetrado, nos serviría para tomar instantáneas de cada fase de la experiencia. La cámara quedaba fijada gracias a la utilización de un trípode alto, cuya sombra apenas interferiría con la de la bola. Situamos además una brújula sobre el papel, para tener en cuenta las posiciones de salida y puesta del Sol. Todo el conjunto de elementos fue situado en la azotea de nuestro colegio poco antes del amanecer del día 1 de febrero.



A lo largo de ese día (1 de febrero de 2007), los miembros del grupo nos turnamos para subir a la azotea del edificio e ir tomando fotografías a cada intervalo de tiempo (más o menos una instantánea cada hora), y para marcar el dato de la sombra que proyectaba la bola sobre el papel.

A continuación exponemos, por orden, la sucesión de tomas del experimento, adjuntando a cada fotografía las coordenadas, en metros (m), del punto exacto en que se proyectaba la sombra de la bola. Tomamos como origen de coordenadas la esquina del papel milimetrado más cercana al soporte de madera, que en las tomas aparece abajo y a la derecha.



Toma 1
Hora: 9:35 a.m.
Posición: A (0, 0'671, 0)



Toma 2
Hora: 10:27 a.m.
Posición: B (0'011, 0'647, 0)



Toma 3
Hora: 11:14 a.m.
Posición: C (0'084, 0'510, 0)



Toma 4
Hora: 11:26 a.m.
Posición: D (0'133, 0'427, 0)



Toma 5
Hora: 11:38 a.m.
Posición: E (0'194, 0'333, 0)



Toma 6
Hora: 12:37 p.m.
Posición: F (0'208, 0'316, 0)



Toma 7
Hora: 12:47 p.m.
Posición: G (0'272, 0'243, 0)



Toma 8
Hora: 13:03 p.m.
Posición: H (0'280, 0'235, 0)



Toma 9
Hora: 13:05 p.m.
Posición: I (0'289, 0'224, 0)



Toma 10
Hora: 13:24 p.m.
Posición: J (0'307, 0'206, 0)



Toma 11
Hora: 13:05 p.m.
Posición: K (0'360, 0'170, 0)



Toma 12
Hora: 14:34 p.m.
Posición: L (0'374, 0'160, 0)



Toma 13
Hora: 15:00 p.m.
Posición: M (0'403, 0'143, 0)



Toma 14
Hora: 15:14 p.m.
Posición: N (0'426, 0'132, 0)

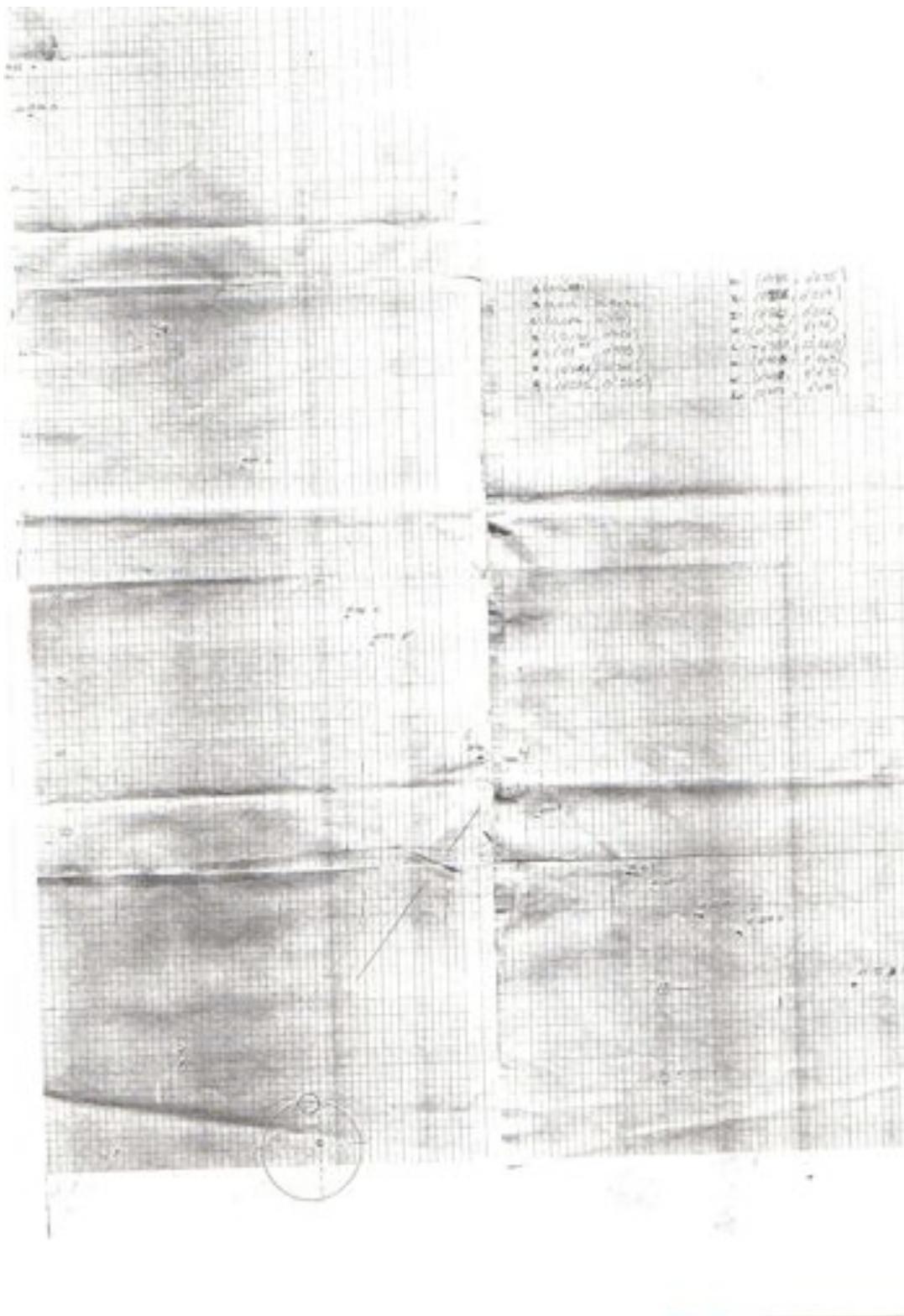
A partir de las tres y cuarto de la tarde, la sombra de un edificio cubrió la zona de experimentación, y no pudimos realizar más fotografías, aunque sí nos fue posible marcar el último dato sobre el papel:

Toma 15 (sin fotografía)
Hora: 15:55 p.m.
Posición: Ñ (0'494, 0'099, 0)

Por último, especificaremos las coordenadas de la bola, origen de todos los haces proyectivos que hemos ido anotando:

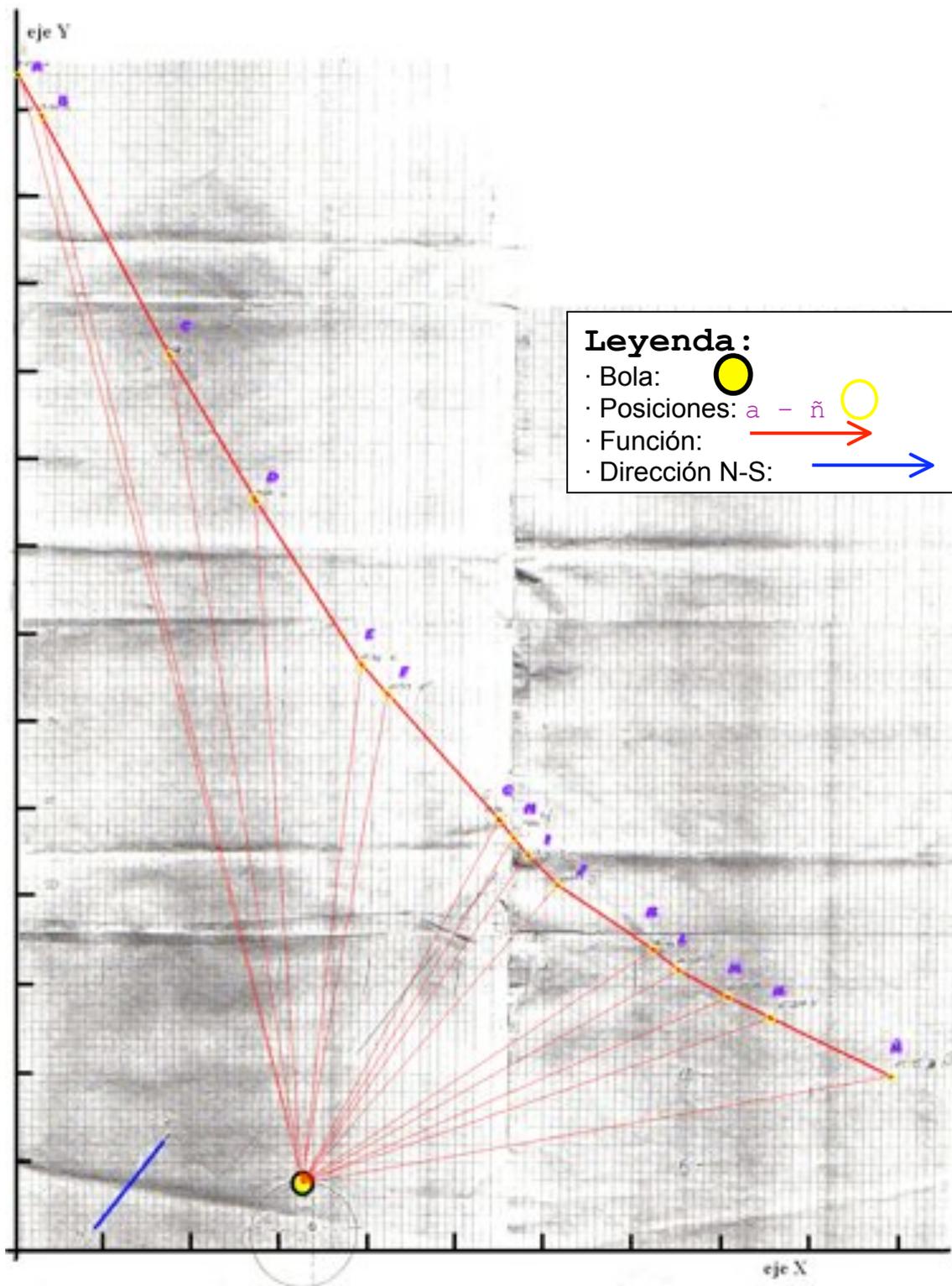
Posición: O (0'164, 0'037, 0'015)

Tras recoger y organizar todos los datos, es el momento de interpretarlos. El papel milimetrado sobre el que tomamos los datos fue escaneado, y obtuvimos la siguiente imagen.



La hoja original se encuentra en el anexo 2.

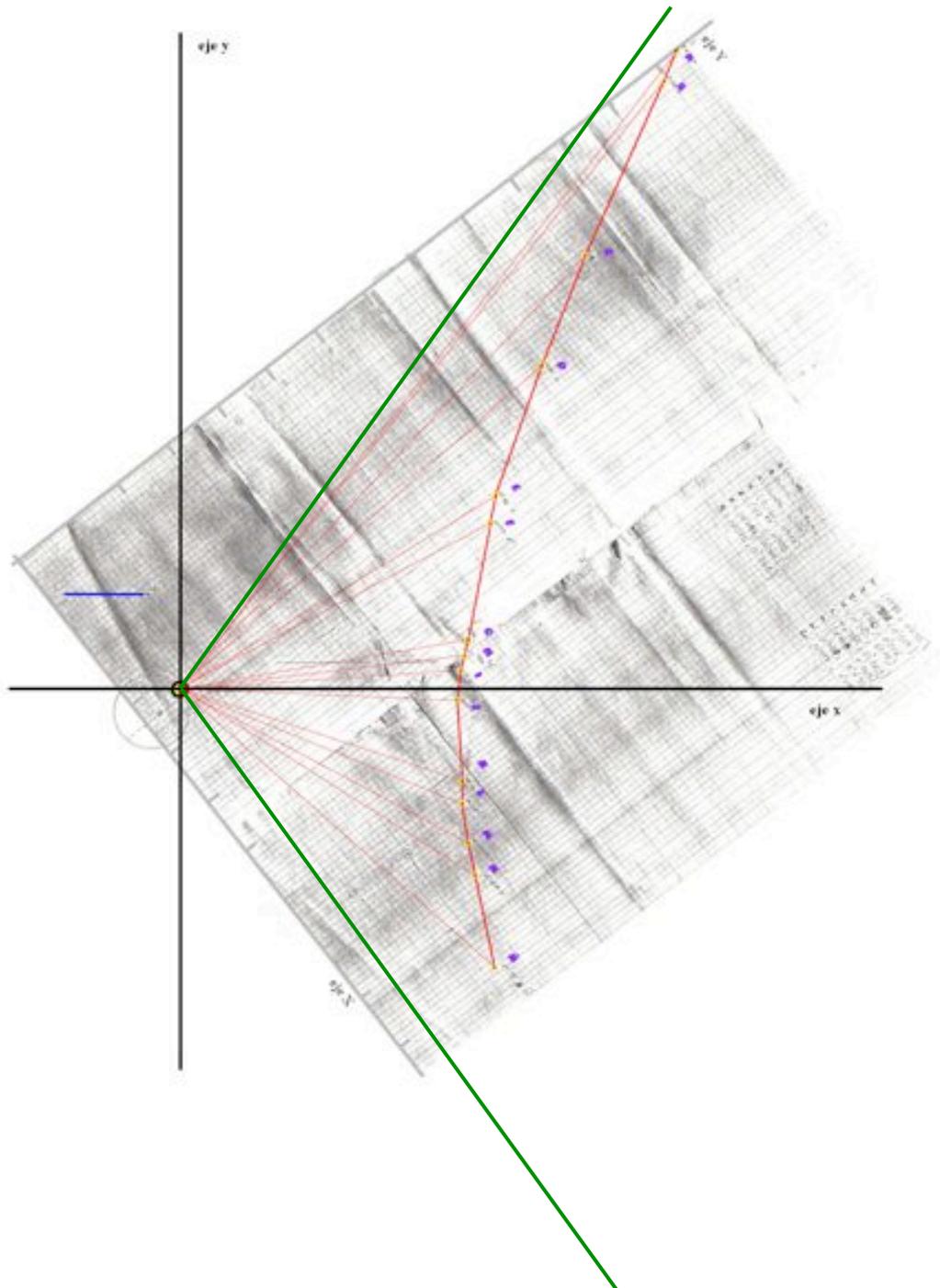
En la figura se aprecia cómo, de manera tenue, los sucesivos puntos trazan una función similar a una hipérbola. La imagen se torna más clara al marcar y escalar los ejes, señalar los puntos y unirlos entre sí, y localizar la proyección de la bola sobre el plano del papel. También se ha girado la imagen para poder verla derecha.



Efectivamente, cada uno de los puntos tiene menos cota (eje y) que el anterior, y más que el posterior. La función pierde altura cada vez más despacio, y gana alejamiento (eje x) cada vez más rápido.

Sin embargo, los ejes quedaron definidos cuando colocamos el papel en el experimento, de manera prácticamente aleatoria, buscando tan sólo que el punto A estuviese situado dentro de los límites del papel. Consideramos necesario, por lo tanto, reestructurar los ejes, para hallar una representación de la hipérbola más similar a otra ya conocida.

Decidimos situar el eje x paralelo a la dirección norte-sur de la brújula, y la bola en el origen de coordenadas. Este es el resultado.



Obtenemos así una representación de la hipérbola no como función, pues existen dos valores, $f(x)$ y $-f(x)$, para uno mismo de x (la función es, aproximadamente, simétrica con respecto al eje horizontal), sino como su habitual representación como curva cónica. Se han marcado, en color verde y de manera aproximada, las asíntotas, rectas a las que la función tiende a acercarse hasta el infinito, sin llegar a cortarlas.

La ecuación general de la hipérbola, en su representación geométrica, es la siguiente:

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} - \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$$

Nos sería posible elaborar una ecuación que representase una aproximación de la hipérbola obtenida, pero consideramos que no resultaría realmente práctica, pues el recorrido de la sombra al día siguiente sería diferente, y los errores asumidos a lo largo del experimento en la toma de medidas reducirían la validez del resultado.

Los errores asumidos en este experimento han sido:

- El papel milimetrado estaba algo combado y no era continuo.
- El suelo sobre el que situamos el experimento no era totalmente liso ni horizontal.
- La cámara tenía una ligerísima movilidad, que se hace notoria en algunas de las tomas.

Tras el análisis de los resultados obtenidos, llegamos a la conclusión clara de que la trayectoria de la sombra que proyecta un objeto a lo largo de un día tiene forma de hipérbola, cuyas asíntotas o ramas infinitas se alanzan respectivamente en los momentos del amanecer y el atardecer.

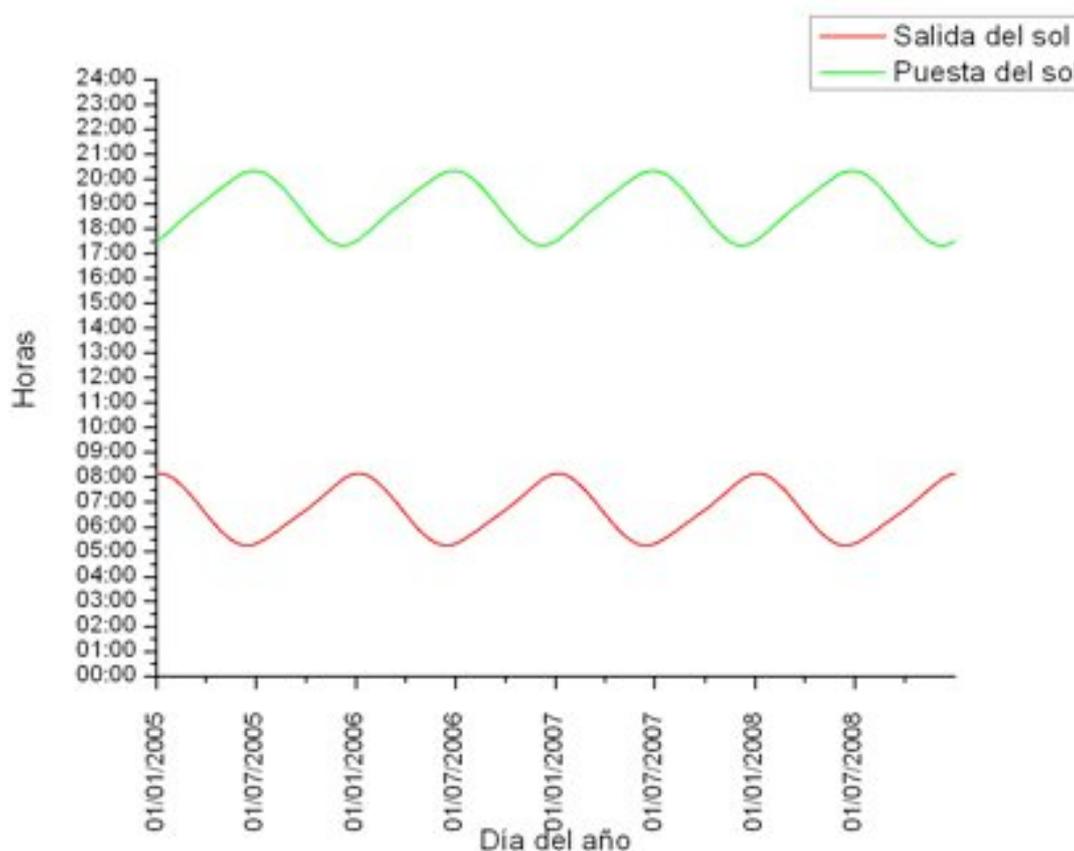
El darnos cuenta de que la trayectoria de la sombra variaría de un día a otro, nos demostró que realmente la trayectoria del Sol en el cielo también cambia.

Investigación B:

En esta investigación buscamos relacionar las gráficas que surgen de la representación de las horas de salida y puesta del Sol a lo largo de un día con alguna función que conozcamos.

Trabajamos con los datos de salida y puesta del Sol de las coordenadas Madrid-Cuatro Vientos (40.24N 3.41O; UTC/GTM +1) que se recogieron de la página Web <http://www.tutiempo.net/>. Los datos recogidos son las horas de salida y de puesta del Sol a lo largo de un cuatrienio (para que quedase recogido al menos un año bisiesto), los cuales trabajamos en el programa de Microsoft Excel y más tarde reflejamos en forma de gráfica en el programa OriginPro.

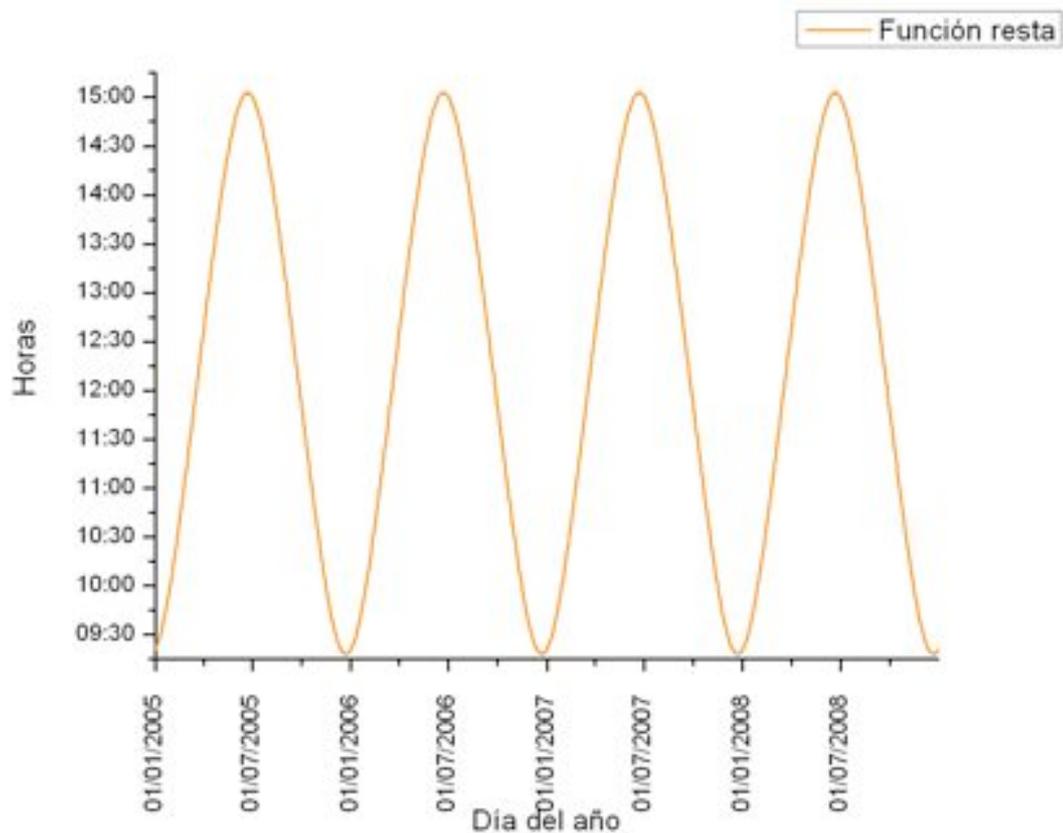
Los resultados de las representaciones de estos dos primeros conjuntos de datos (expuestos en el anexo 1) son los siguientes:



Podemos observar que las funciones generadas son periódicas y se asemejan a funciones sinusoidales, pero estas gráficas poseen tramos en los que los datos crecen lentamente y tramos en los que decrecen rápidamente. Por ello desestimamos la idea de intentar deducir la ecuación que la regía, puesto que ninguno de nosotros conocía una función semejante a la cual referenciar. Aun así, nos propusimos calcular el número de horas diurnas que hay a lo largo del mencionado cuatrienio, y para ello creamos en Excel una nueva columna que restase los datos de puesta y los de salida del Sol, que posteriormente representaríamos en OriginPro.

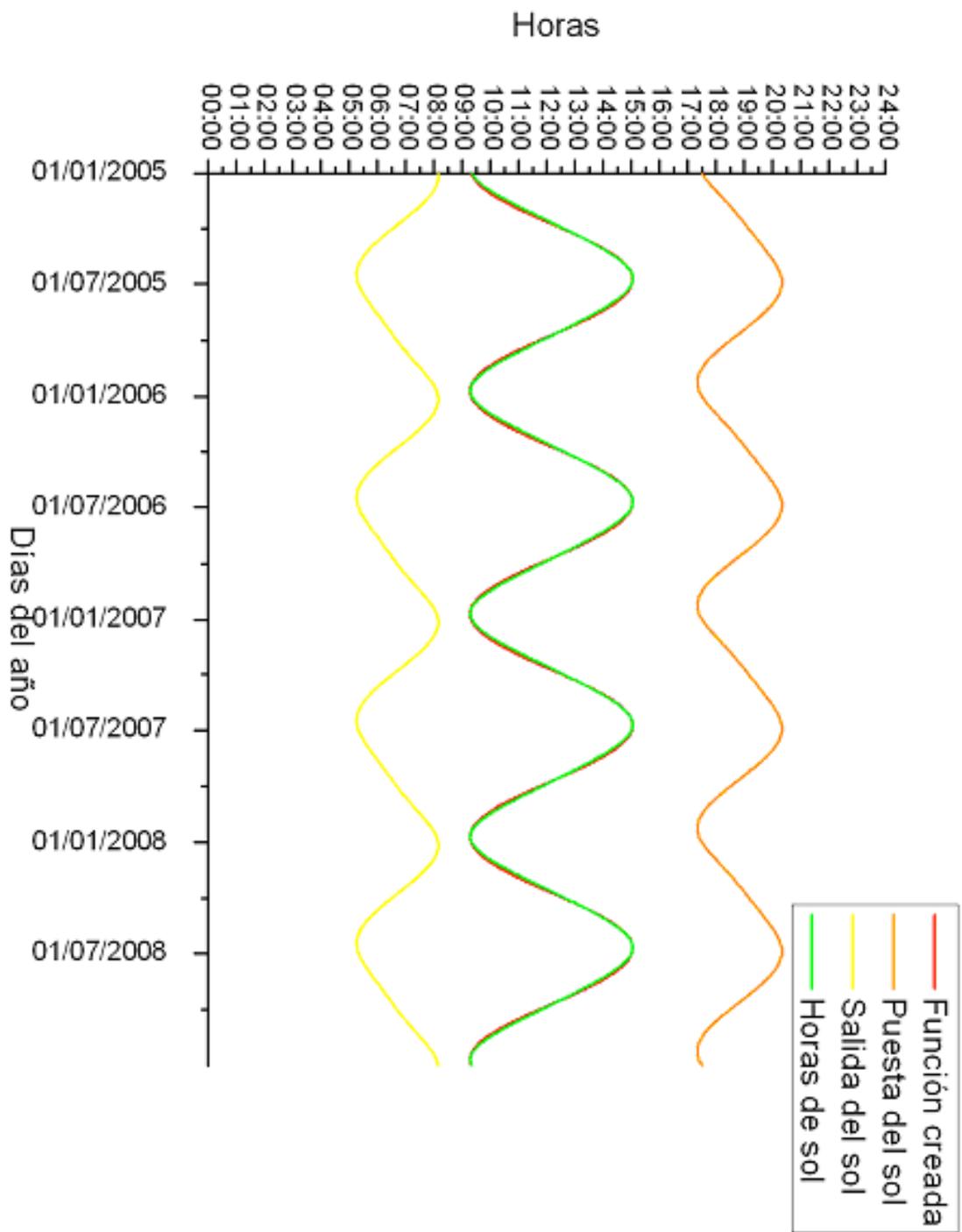
Para asombro nuestro, una vez que representamos los datos en forma de gráfica, ésta guardaba un gran parecido con una función sinusoidal, y por ello, en este caso sí, nos decidimos a buscar una ecuación que la regía.

Esta gráfica es la siguiente:



Con todo esto, dedujimos una función coseno que se asimilara a la ahora mostrada, proceso que explicaremos más detenidamente en el apartado “Cálculo de errores”.

Y finalmente, procedemos a mostrar en una única gráfica la recopilación de la función salida de Sol, puesta de Sol, horas de Sol diarias y nuestra función coseno ajustada manualmente:



- **La función coseno:**

Para calcular la ecuación de la gráfica diferencia entre la puesta y la salida del Sol, partimos de la suposición (por intuición visual) de que la gráfica obtenida de horas de Sol en un día es aparentemente sinusoidal.

Con esta idea, creamos una función que se ajustase a la gráfica a partir de una función genérica del tipo coseno.

Para ello, hicimos uso de la fórmula genérica del coseno:

$$f(x) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{B}(x + C)\right) + D$$

A es el valor de la amplitud. En nuestro caso tomamos como amplitud las horas transcurridas desde un máximo de la función hasta el valor medio entre un máximo y un mínimo de la misma (-2.875 horas).

B es el periodo de la función, y en este caso es igual a la duración media de un año, es decir, 365.25 días.

C es el desplazamiento horizontal (Δx). Tomando como referencia el mínimo de la función por ser el extremo relativo más próximo al comienzo del año, observamos que, ya que este se presenta 8.25 días antes de que se cumpla el ciclo de un año entero, el desplazamiento ha de ser de 8.25 días.

Finalmente, D es el desplazamiento vertical de la función ($\Delta f(x)$), y corresponde con el dato medio entre un máximo y un mínimo de la función (12.175 horas).

Una vez establecidos los valores para cada variable procedimos a sustituirlos en la función genérica anteriormente mencionada, y el resultado fue el siguiente:

$$f(x) = -2.875 \cos\left(\frac{2\pi}{365.25}(8.25 + x)\right) + 12.275$$

Que como consecuencia de sustituir x por el día del año expresado de 1 a 365, nos proporciona el número de horas de Sol que habrá en dicho día. Es por ello por lo que reescribimos la función expresando las horas de luz en función del día del año. Esta función, cuyo resultado vendría dado en sistema decimal, sería la siguiente:

$$\text{Horas}(\text{Día}) = 12.175 - 2.875 \cos\left(\frac{2\pi}{365.25} \cdot (8.25 + \text{Día})\right)$$

Y el error cometido respecto de los datos originalmente extraídos al operar con esta ecuación es:

A la hora de introducir el dato del día del año en la función creada, el error respecto del dato real puede ser de un máximo de 0.25 días, dado que contamos los días por valores enteros mientras que un año no tiene 365 días exactos, sino 365.25.

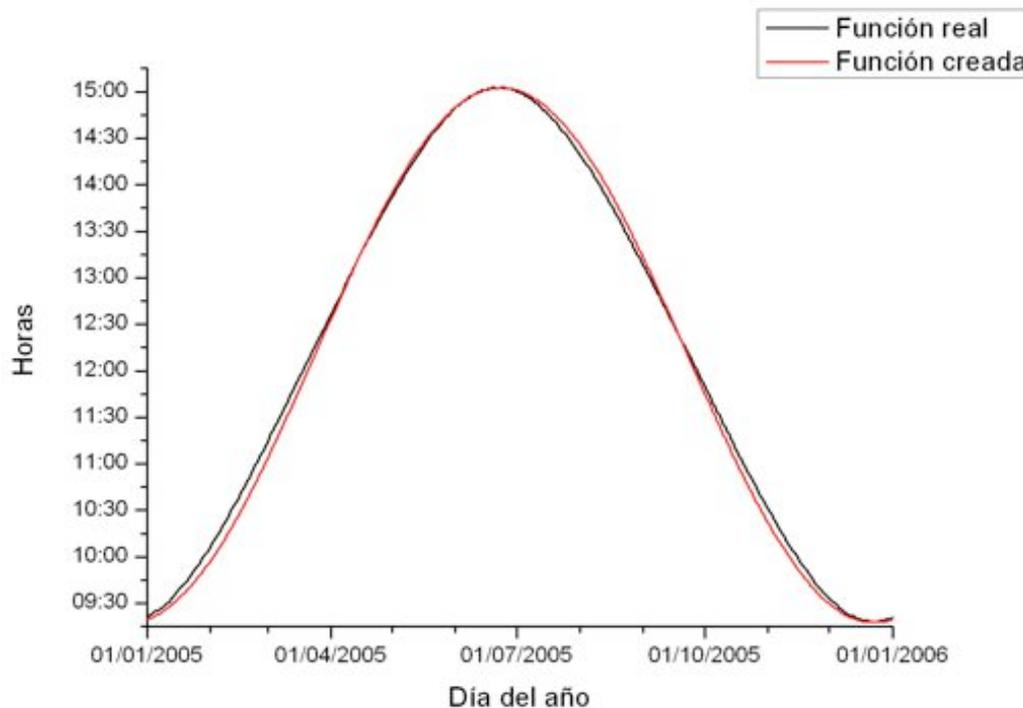
Tras haber realizado la operación coseno, contando con esta pequeña variación en el dato inicial, el error obtenido es menor de 0.001.

Para que el resultado obtenido fuese más práctico, lo pasamos al sistema sexagesimal, dándonos así un valor de horas diarias de Sol cuyo error aparece a partir de las unidades de segundo.

Con esto concluimos que, puesto que la precisión de los datos con los que hemos trabajado desde el inicio de la investigación ha sido de minutos, el resultado final es fiable para la misma magnitud.

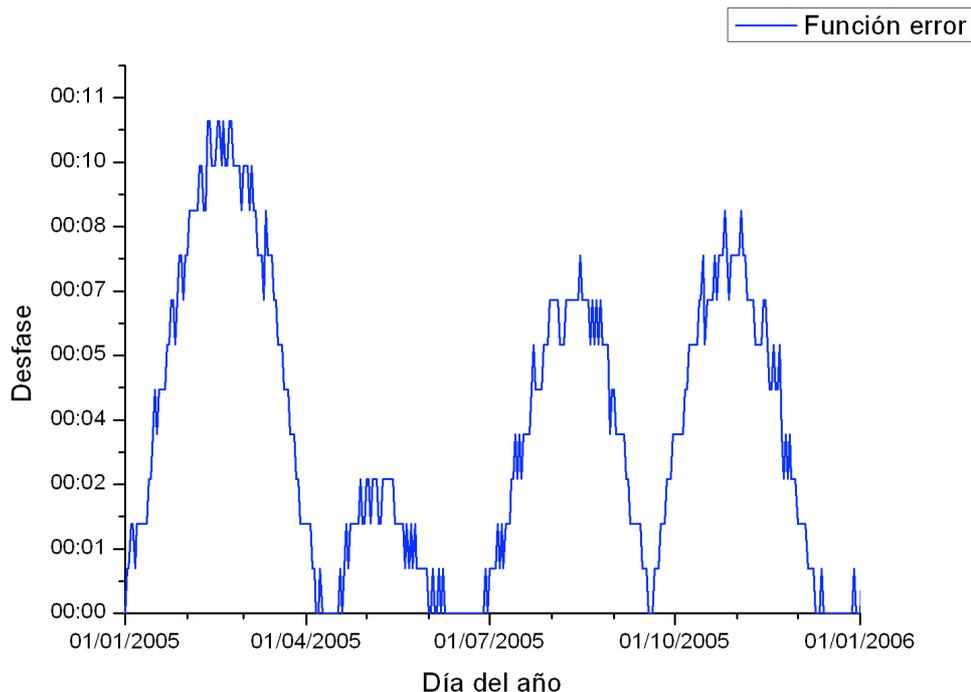
Aun así, debido a que en un principio aproximamos la gráfica original a una sinusoidal, existe un pequeño margen de error entre los datos extraídos inicialmente y los datos que se obtendrían de aplicar nuestra función ajustada manualmente.

Tanto unos valores como otros los mostramos en forma de gráfica a continuación a fin de facilitar el entendimiento. Estas gráficas reflejan las horas diarias de luz Solar a lo largo de un año, ya que el resultado es igualmente aplicable en cada año del cuatrienio:



Finalmente, para determinar el error existente entre ambas funciones, efectuamos la resta entre los datos de las dos gráficas, apreciando que llega a existir una diferencia máxima de hasta 11 minutos.

Este desfase a lo largo de un año queda reflejado en la siguiente gráfica:



Aun así, teniendo en cuenta que los datos iniciales que extrajimos de <http://www.tutiempo.net/> nos otorgaban una precisión de minutos, podemos afirmar que la gráfica que representa las horas diarias de Sol a lo largo del tiempo es prácticamente sinusoidal, y la función coseno que creamos es igualmente correcta.

Como última observación, añadir que los valores de horas diurnas a lo largo de un día son exactamente iguales para cualquier lugar localizado, al igual que Madrid-Cuatro Vientos, a una latitud de 40.24N, independientemente de la longitud a la que se encuentre dicho lugar.

4 - DATOS:

Los datos son iguales para los cuatro años, por lo que sólo reflejamos un único año.

Nota: Los datos del 29 de febrero de 2008 son iguales a los del 28 del mismo mes.

Día del año	Salida Sol	Puesta Sol	Horas de Sol	Nuestra función	Error de ajuste
1	8:09	17:30	9:21	9:20	0:00
2	8:09	17:31	9:22	9:20	0:01
3	8:09	17:32	9:23	9:21	0:01
4	8:09	17:33	9:24	9:21	0:02
5	8:09	17:34	9:25	9:22	0:02
6	8:09	17:34	9:25	9:23	0:01
7	8:09	17:35	9:26	9:23	0:02
8	8:09	17:36	9:27	9:24	0:02
9	8:09	17:37	9:28	9:25	0:02
10	8:09	17:38	9:29	9:26	0:02
11	8:09	17:39	9:30	9:27	0:02
12	8:09	17:40	9:31	9:28	0:02
13	8:08	17:41	9:33	9:29	0:03
14	8:08	17:42	9:34	9:30	0:03
15	8:08	17:44	9:36	9:31	0:04
16	8:07	17:45	9:38	9:32	0:05
17	8:07	17:46	9:39	9:34	0:04
18	8:06	17:47	9:41	9:35	0:05
19	8:06	17:48	9:42	9:36	0:05
20	8:06	17:49	9:43	9:37	0:05
21	8:05	17:50	9:45	9:39	0:05
22	8:04	17:51	9:47	9:40	0:06
23	8:04	17:53	9:49	9:42	0:06
24	8:03	17:54	9:51	9:43	0:07
25	8:02	17:55	9:53	9:45	0:07
26	8:02	17:56	9:54	9:47	0:06
27	8:01	17:57	9:56	9:48	0:07
28	8:00	17:59	9:59	9:50	0:08
29	7:59	18:00	10:01	9:52	0:08
30	7:59	18:01	10:02	9:54	0:07
31	7:58	18:02	10:04	9:55	0:08
32	7:57	18:03	10:06	9:57	0:08
33	7:56	18:05	10:09	9:59	0:09
34	7:55	18:06	10:11	10:01	0:09
35	7:54	18:07	10:13	10:03	0:09
36	7:53	18:08	10:15	10:05	0:09
37	7:52	18:09	10:17	10:07	0:09
38	7:51	18:11	10:20	10:09	0:10
39	7:50	18:12	10:22	10:11	0:10
40	7:49	18:13	10:24	10:14	0:09
41	7:48	18:14	10:26	10:16	0:09
42	7:46	18:16	10:30	10:18	0:11

Día del año	Salida Sol	Puesta Sol	Horas de Sol	Nuestra función	Error de ajuste
43	7:45	18:17	10:32	10:20	0:11
44	7:44	18:18	10:34	10:23	0:10
45	7:43	18:19	10:36	10:25	0:10
46	7:42	18:20	10:38	10:27	0:10
47	7:40	18:22	10:42	10:30	0:11
48	7:39	18:23	10:44	10:32	0:11
49	7:38	18:24	10:46	10:35	0:10
50	7:36	18:25	10:49	10:37	0:11
51	7:35	18:26	10:51	10:40	0:10
52	7:34	18:27	10:53	10:42	0:10
53	7:32	18:29	10:57	10:45	0:11
54	7:31	18:30	10:59	10:47	0:11
55	7:30	18:31	11:01	10:50	0:10
56	7:28	18:32	11:04	10:53	0:10
57	7:27	18:33	11:06	10:55	0:10
58	7:25	18:34	11:09	10:58	0:10
59	7:24	18:35	11:11	11:01	0:09
60	7:22	18:36	11:14	11:03	0:10
61	7:21	18:38	11:17	11:06	0:10
62	7:19	18:39	11:20	11:09	0:10
63	7:18	18:40	11:22	11:12	0:09
64	7:16	18:41	11:25	11:14	0:10
65	7:15	18:42	11:27	11:17	0:09
66	7:13	18:43	11:30	11:20	0:09
67	7:12	18:44	11:32	11:23	0:08
68	7:10	18:45	11:35	11:26	0:08
69	7:08	18:46	11:38	11:29	0:08
70	7:07	18:47	11:40	11:32	0:07
71	7:05	18:49	11:44	11:34	0:09
72	7:04	18:50	11:46	11:37	0:08
73	7:02	18:51	11:49	11:40	0:08
74	7:00	18:52	11:52	11:43	0:08
75	6:59	18:53	11:54	11:46	0:07
76	6:57	18:54	11:57	11:49	0:07
77	6:56	18:55	11:59	11:52	0:06
78	6:54	18:56	12:02	11:55	0:06
79	6:52	18:57	12:05	11:58	0:06
80	6:51	18:58	12:07	12:01	0:05
81	6:49	18:59	12:10	12:04	0:05
82	6:47	19:00	12:13	12:07	0:05
83	6:46	19:01	12:15	12:10	0:04
84	6:44	19:02	12:18	12:13	0:04
85	6:42	19:03	12:21	12:16	0:04
86	6:41	19:04	12:23	12:19	0:03
87	6:39	19:05	12:26	12:22	0:03
88	6:38	19:06	12:28	12:25	0:02
89	6:36	19:07	12:31	12:28	0:02

Día del año	Salida Sol	Puesta Sol	Horas de Sol	Nuestra función	Error de ajuste
90	6:34	19:08	12:34	12:31	0:02
91	6:33	19:09	12:36	12:33	0:02
92	6:31	19:10	12:39	12:36	0:02
93	6:29	19:11	12:42	12:39	0:02
94	6:28	19:12	12:44	12:42	0:01
95	6:26	19:13	12:47	12:45	0:01
96	6:25	19:14	12:49	12:48	0:00
97	6:23	19:15	12:52	12:51	0:00
98	6:21	19:17	12:56	12:54	0:01
99	6:20	19:18	12:58	12:57	0:00
100	6:18	19:19	13:01	13:00	0:00
101	6:17	19:20	13:03	13:02	0:00
102	6:15	19:21	13:06	13:05	0:00
103	6:14	19:22	13:08	13:08	0:00
104	6:12	19:23	13:11	13:11	0:00
105	6:10	19:24	13:14	13:14	0:00
106	6:09	19:25	13:16	13:16	0:00
107	6:07	19:26	13:19	13:19	0:00
108	6:06	19:27	13:21	13:22	0:01
109	6:04	19:28	13:24	13:24	0:00
110	6:03	19:29	13:26	13:27	0:01
111	6:02	19:30	13:28	13:30	0:02
112	6:00	19:31	13:31	13:32	0:01
113	5:59	19:32	13:33	13:35	0:02
114	5:57	19:33	13:36	13:38	0:02
115	5:56	19:34	13:38	13:40	0:02
116	5:54	19:35	13:41	13:43	0:02
117	5:53	19:36	13:43	13:45	0:02
118	5:52	19:37	13:45	13:48	0:03
119	5:50	19:38	13:48	13:50	0:02
120	5:49	19:39	13:50	13:52	0:02
121	5:48	19:40	13:52	13:55	0:03
122	5:47	19:41	13:54	13:57	0:03
123	5:45	19:42	13:57	13:59	0:02
124	5:44	19:43	13:59	14:02	0:03
125	5:43	19:44	14:01	14:04	0:03
126	5:42	19:45	14:03	14:06	0:03
127	5:40	19:46	14:06	14:08	0:02
128	5:39	19:47	14:08	14:10	0:02
129	5:38	19:48	14:10	14:13	0:03
130	5:37	19:49	14:12	14:15	0:03
131	5:36	19:50	14:14	14:17	0:03
132	5:35	19:51	14:16	14:19	0:03
133	5:34	19:52	14:18	14:21	0:03
134	5:33	19:53	14:20	14:23	0:03
135	5:32	19:54	14:22	14:24	0:02
136	5:31	19:55	14:24	14:26	0:02

Día del año	Salida Sol	Puesta Sol	Horas de Sol	Nuestra función	Error de ajuste
137	5:30	19:56	14:26	14:28	0:02
138	5:29	19:57	14:28	14:30	0:02
139	5:28	19:58	14:30	14:32	0:02
140	5:27	19:59	14:32	14:33	0:01
141	5:27	20:00	14:33	14:35	0:02
142	5:26	20:01	14:35	14:36	0:01
143	5:25	20:01	14:36	14:38	0:02
144	5:24	20:02	14:38	14:39	0:01
145	5:24	20:03	14:39	14:41	0:02
146	5:23	20:04	14:41	14:42	0:01
147	5:22	20:05	14:43	14:44	0:01
148	5:22	20:06	14:44	14:45	0:01
149	5:21	20:06	14:45	14:46	0:01
150	5:20	20:07	14:47	14:48	0:01
151	5:20	20:08	14:48	14:49	0:01
152	5:19	20:09	14:50	14:50	0:00
153	5:19	20:10	14:51	14:51	0:00
154	5:19	20:10	14:51	14:52	0:01
155	5:18	20:11	14:53	14:53	0:00
156	5:18	20:12	14:54	14:54	0:00
157	5:18	20:12	14:54	14:55	0:01
158	5:17	20:13	14:56	14:56	0:00
159	5:17	20:13	14:56	14:57	0:01
160	5:17	20:14	14:57	14:57	0:00
161	5:17	20:15	14:58	14:58	0:00
162	5:16	20:15	14:59	14:59	0:00
163	5:16	20:16	15:00	14:59	0:00
164	5:16	20:16	15:00	15:00	0:00
165	5:16	20:17	15:01	15:00	0:00
166	5:16	20:17	15:01	15:01	0:00
167	5:16	20:17	15:01	15:01	0:00
168	5:16	20:18	15:02	15:01	0:00
169	5:16	20:18	15:02	15:02	0:00
170	5:16	20:19	15:03	15:02	0:00
171	5:16	20:19	15:03	15:02	0:00
172	5:17	20:19	15:02	15:02	0:00
173	5:17	20:19	15:02	15:02	0:00
174	5:17	20:20	15:03	15:03	0:00
175	5:17	20:20	15:03	15:02	0:00
176	5:17	20:20	15:03	15:02	0:00
177	5:18	20:20	15:02	15:02	0:00
178	5:18	20:20	15:02	15:02	0:00
179	5:18	20:20	15:02	15:02	0:00
180	5:19	20:20	15:01	15:02	0:01
181	5:19	20:20	15:01	15:01	0:00
182	5:20	20:20	15:00	15:01	0:01
183	5:20	20:20	15:00	15:01	0:01

Día del año	Salida Sol	Puesta Sol	Horas de Sol	Nuestra función	Error de ajuste
184	5:21	20:20	14:59	15:00	0:01
185	5:21	20:20	14:59	15:00	0:01
186	5:22	20:19	14:57	14:59	0:02
187	5:22	20:19	14:57	14:58	0:01
188	5:23	20:19	14:56	14:58	0:02
189	5:23	20:19	14:56	14:57	0:01
190	5:24	20:18	14:54	14:56	0:02
191	5:25	20:18	14:53	14:55	0:02
192	5:25	20:18	14:53	14:55	0:02
193	5:26	20:17	14:51	14:54	0:03
194	5:27	20:17	14:50	14:53	0:03
195	5:28	20:16	14:48	14:52	0:04
196	5:28	20:16	14:48	14:51	0:03
197	5:29	20:15	14:46	14:50	0:04
198	5:30	20:15	14:45	14:48	0:03
199	5:31	20:14	14:43	14:47	0:04
200	5:31	20:13	14:42	14:46	0:04
201	5:32	20:13	14:41	14:45	0:04
202	5:33	20:12	14:39	14:43	0:04
203	5:34	20:11	14:37	14:42	0:05
204	5:35	20:10	14:35	14:41	0:06
205	5:36	20:10	14:34	14:39	0:05
206	5:36	20:09	14:33	14:38	0:05
207	5:37	20:08	14:31	14:36	0:05
208	5:38	20:07	14:29	14:34	0:05
209	5:39	20:06	14:27	14:33	0:06
210	5:40	20:05	14:25	14:31	0:06
211	5:41	20:04	14:23	14:29	0:06
212	5:42	20:03	14:21	14:28	0:07
213	5:43	20:02	14:19	14:26	0:07
214	5:44	20:01	14:17	14:24	0:07
215	5:45	20:00	14:15	14:22	0:07
216	5:46	19:59	14:13	14:20	0:07
217	5:46	19:58	14:12	14:18	0:06
218	5:47	19:57	14:10	14:16	0:06
219	5:48	19:56	14:08	14:14	0:06
220	5:49	19:54	14:05	14:12	0:07
221	5:50	19:53	14:03	14:10	0:07
222	5:51	19:52	14:01	14:08	0:07
223	5:52	19:51	13:59	14:06	0:07
224	5:53	19:49	13:56	14:03	0:07
225	5:54	19:48	13:54	14:01	0:07
226	5:55	19:47	13:52	13:59	0:07
227	5:56	19:45	13:49	13:57	0:08
228	5:57	19:44	13:47	13:54	0:07
229	5:58	19:43	13:45	13:52	0:07
230	5:59	19:41	13:42	13:49	0:07

Día del año	Salida Sol	Puesta Sol	Horas de Sol	Nuestra función	Error de ajuste
231	6:00	19:40	13:40	13:47	0:07
232	6:01	19:39	13:38	13:44	0:06
233	6:02	19:37	13:35	13:42	0:07
234	6:03	19:36	13:33	13:39	0:06
235	6:04	19:34	13:30	13:37	0:07
236	6:05	19:33	13:28	13:34	0:06
237	6:06	19:31	13:25	13:32	0:07
238	6:07	19:30	13:23	13:29	0:06
239	6:08	19:28	13:20	13:26	0:06
240	6:09	19:27	13:18	13:24	0:06
241	6:10	19:25	13:15	13:21	0:06
242	6:10	19:24	13:14	13:18	0:04
243	6:11	19:22	13:11	13:16	0:05
244	6:12	19:20	13:08	13:13	0:05
245	6:13	19:19	13:06	13:10	0:04
246	6:14	19:17	13:03	13:07	0:04
247	6:15	19:16	13:01	13:05	0:04
248	6:16	19:14	12:58	13:02	0:04
249	6:17	19:12	12:55	12:59	0:04
250	6:18	19:11	12:53	12:56	0:03
251	6:19	19:09	12:50	12:53	0:03
252	6:20	19:08	12:48	12:50	0:02
253	6:21	19:06	12:45	12:47	0:02
254	6:22	19:04	12:42	12:44	0:02
255	6:23	19:03	12:40	12:42	0:02
256	6:24	19:01	12:37	12:39	0:02
257	6:25	18:59	12:34	12:36	0:02
258	6:26	18:58	12:32	12:33	0:01
259	6:27	18:56	12:29	12:30	0:01
260	6:28	18:54	12:26	12:27	0:01
261	6:29	18:53	12:24	12:24	0:00
262	6:30	18:51	12:21	12:21	0:00
263	6:31	18:49	12:18	12:18	0:00
264	6:31	18:48	12:17	12:15	0:01
265	6:32	18:46	12:14	12:12	0:01
266	6:33	18:44	12:11	12:09	0:01
267	6:34	18:43	12:09	12:06	0:02
268	6:35	18:41	12:06	12:03	0:02
269	6:36	18:39	12:03	12:00	0:02
270	6:37	18:38	12:01	11:57	0:03
271	6:38	18:36	11:58	11:54	0:03
272	6:39	18:34	11:55	11:51	0:03
273	6:40	18:33	11:53	11:48	0:04
274	6:41	18:31	11:50	11:45	0:04
275	6:42	18:29	11:47	11:42	0:04
276	6:43	18:28	11:45	11:40	0:04
277	6:44	18:26	11:42	11:37	0:04

Día del año	Salida Sol	Puesta Sol	Horas de Sol	Nuestra función	Error de ajuste
278	6:45	18:24	11:39	11:34	0:04
279	6:46	18:23	11:37	11:31	0:05
280	6:47	18:21	11:34	11:28	0:05
281	6:48	18:20	11:32	11:25	0:06
282	6:49	18:18	11:29	11:22	0:06
283	6:50	18:16	11:26	11:19	0:06
284	6:51	18:15	11:24	11:17	0:06
285	6:52	18:13	11:21	11:14	0:06
286	6:53	18:12	11:19	11:11	0:07
287	6:54	18:10	11:16	11:08	0:07
288	6:55	18:09	11:14	11:05	0:08
289	6:57	18:07	11:10	11:03	0:06
290	6:58	18:06	11:08	11:00	0:07
291	6:59	18:04	11:05	10:57	0:07
292	7:00	18:03	11:03	10:55	0:07
293	7:01	18:01	11:00	10:52	0:07
294	7:02	18:00	10:58	10:49	0:08
295	7:03	17:58	10:55	10:47	0:07
296	7:04	17:57	10:53	10:44	0:08
297	7:05	17:56	10:51	10:42	0:08
298	7:06	17:54	10:48	10:39	0:08
299	7:07	17:53	10:46	10:36	0:09
300	7:09	17:52	10:43	10:34	0:08
301	7:10	17:50	10:40	10:32	0:07
302	7:11	17:49	10:38	10:29	0:08
303	7:12	17:48	10:36	10:27	0:08
304	7:13	17:46	10:33	10:24	0:08
305	7:14	17:45	10:31	10:22	0:08
306	7:15	17:44	10:29	10:20	0:08
307	7:16	17:43	10:27	10:17	0:09
308	7:18	17:42	10:24	10:15	0:08
309	7:19	17:41	10:22	10:13	0:08
310	7:20	17:39	10:19	10:11	0:07
311	7:21	17:38	10:17	10:09	0:07
312	7:22	17:37	10:15	10:07	0:07
313	7:23	17:36	10:13	10:05	0:07
314	7:25	17:35	10:10	10:03	0:06
315	7:26	17:34	10:08	10:01	0:06
316	7:27	17:33	10:06	9:59	0:06
317	7:28	17:32	10:04	9:57	0:06
318	7:29	17:32	10:03	9:55	0:07
319	7:30	17:31	10:01	9:53	0:07
320	7:32	17:30	9:58	9:51	0:06
321	7:33	17:29	9:56	9:50	0:05
322	7:34	17:28	9:54	9:48	0:05
323	7:35	17:28	9:53	9:46	0:06
324	7:36	17:27	9:51	9:45	0:05

Día del año	Salida Sol	Puesta Sol	Horas de Sol	Nuestra función	Error de ajuste
325	7:37	17:26	9:49	9:43	0:05
326	7:38	17:26	9:48	9:41	0:06
327	7:40	17:25	9:45	9:40	0:04
328	7:41	17:24	9:43	9:39	0:03
329	7:42	17:24	9:42	9:37	0:04
330	7:43	17:23	9:40	9:36	0:03
331	7:44	17:23	9:39	9:34	0:04
332	7:45	17:22	9:37	9:33	0:03
333	7:46	17:22	9:36	9:32	0:03
334	7:47	17:22	9:35	9:31	0:03
335	7:48	17:21	9:33	9:30	0:02
336	7:49	17:21	9:32	9:29	0:02
337	7:50	17:21	9:31	9:28	0:02
338	7:51	17:21	9:30	9:27	0:02
339	7:52	17:21	9:29	9:26	0:02
340	7:53	17:20	9:27	9:25	0:01
341	7:54	17:20	9:26	9:24	0:01
342	7:55	17:20	9:25	9:23	0:01
343	7:56	17:20	9:24	9:22	0:01
344	7:57	17:20	9:23	9:22	0:00
345	7:58	17:20	9:22	9:21	0:00
346	7:58	17:20	9:22	9:21	0:00
347	7:59	17:21	9:22	9:20	0:01
348	8:00	17:21	9:21	9:20	0:00
349	8:01	17:21	9:20	9:19	0:00
350	8:01	17:21	9:20	9:19	0:00
351	8:02	17:21	9:19	9:18	0:00
352	8:03	17:22	9:19	9:18	0:00
353	8:03	17:22	9:19	9:18	0:00
354	8:04	17:23	9:19	9:18	0:00
355	8:05	17:23	9:18	9:18	0:00
356	8:05	17:23	9:18	9:18	0:00
357	8:06	17:24	9:18	9:18	0:00
358	8:06	17:24	9:18	9:18	0:00
359	8:07	17:25	9:18	9:18	0:00
360	8:07	17:26	9:19	9:18	0:00
361	8:07	17:26	9:19	9:18	0:00
362	8:08	17:27	9:19	9:18	0:00
363	8:08	17:28	9:20	9:18	0:01
364	8:08	17:28	9:20	9:19	0:00
365	8:09	17:29	9:20	9:19	0:00