Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Primera Edición, 2006/2007

TRABAJO: Factorización real

FINALISTA EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

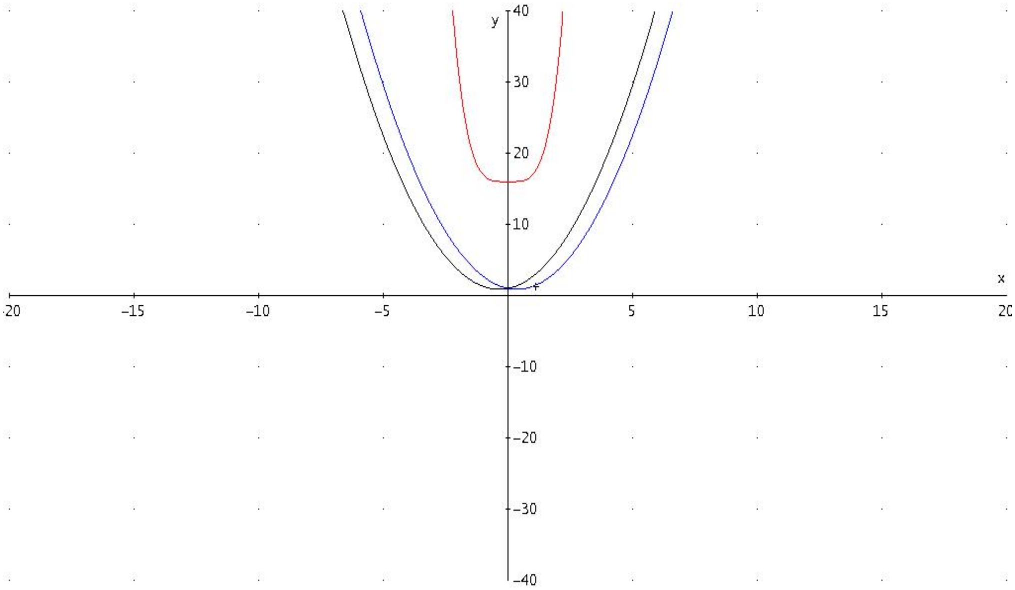
- Verónica Antoraz Onrubia
- Alejandro Barahona Álvarez
- Alba del Coso Estebaranz
- Johana Jacqueline Galanza Monta
- Sonia Márquez Marina
- Azucena Yagüe Revilla

TUTORES:

- Jesús Pablo Moreno González

CENTRO: IES Sierra de Ayllón (Ayllón, Segovia)

FACTORIZACIÓN REAL



Evaristo

Índice:

1. *JUSTIFICACIÓN*
2. *OBJETIVO*
3. *UN POCO DE HISTORIA*
4. *FACTORIZACIÓN ALGEBRÁICA REAL*
    - *Polinomios de segundo grado*
    - *Polinomios de grado tres*
    - *Polinomios de grado cuatro*
5. *RESULTADOS Y CUESTIONES*
6. *CONCLUSIONES*
7. *BIBLIOGRAFÍA*

1. JUSTIFICACIÓN

La idea del concurso surgió cuando el profesor puso el siguiente polinomio para descomponerlo en clase: $p(x) = (6x^4 - x^3 + 4x^2 - 2)\cdot(x-2)$.

Al intentar reducirlo por Ruffini no encontramos solución alguna y hasta el profesor se planteó si tenía solución real; después de esto el profesor se enteró del concurso y cuando nos lo propuso nos pareció buena idea y decidimos apuntarnos.

2. OBJETIVO

Son tres nuestras metas en este trabajo:

1. Crear algoritmos algebraicos para factorizar en el cuerpo de los números reales, polinomios de grado no superior a cuatro y con coeficientes reales, normalmente racionales. Para polinomios de grado superior, sabida es la imposibilidad de tales algoritmos *(Niels Henrik Abel, 1826)* y lo que pretendemos es encontrar métodos sencillos para factorizar algunos con condiciones especiales, como son los que descomponen en factores de grado uno con coeficientes enteros, habituales en nuestros libros de textos y que resolvemos por el débil método de Ruffini.
2. Los polinomios de grado cinco y en general impar, con coeficientes reales, tienen un factor de grado uno cuyo término independiente o solución real pretendemos encontrar, lo que nos permitiría reducir en uno el grado y pasar al caso par.
3. En general, si bien no pretendemos el inútil propósito de factorizar cualquier polinomio real, nos parece muy interesante poder calcular el número de factores reales que tiene, saber cuántos aunque no cuáles.

Teniendo en cuenta que los factores de grado uno son los cortes de la gráfica de la función polinómica con el eje de abcisas y que tales factores son rectas por dichos puntos de corte, representaremos algunos ejemplos de funciones polinómicas junto con sus factores, a fin de deducir alguna conclusión de la observación de sus gráficas.

3. UN POCO DE HISTORIA

La factorización ha sido un tema del cual han tratado numerosos matemáticos importantes, haciendo un recorrido por la historia de las matemáticas, específicamente con la solución de ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales.
La factorización es una de las herramientas más empleadas en el trabajo matemático para “transformar” una expresión algebraica de manera conveniente, para resolver algún problema.

Tiene una importancia apreciable a través de la historia, es la solución de ecuaciones algebraicas; de hecho, en un primer momento, la factorización surge ante la necesidad de solucionar ecuaciones de segundo grado.
Los babilonios, fueron los primeros que resolvieron, ecuaciones cuadráticas.

En unas tablillas descifradas por *Neugebaver*en 1930, cuya antigüedad es
de unos 4000 años, se encontraron soluciones a varias de estas ecuaciones, empleando el método conocido actualmente como “completar el cuadrado”.

Hace unos 4.000 años, los babilonios conocían la manera de encontrar la solución positiva de ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas. Tenían una "receta" muy precisa para resolver ecuaciones del tipo

$$x^2 - bx = c$$

El trabajo de los babilonios constituyó un logro notable, teniendo en cuenta que no contaban con la notación moderna y por su alto nivel de abstracción, al considerar las ecuaciones cuárticas como ecuaciones cuadráticas “disfrazadas” y resolverlas como tales.

Más adelante, matemáticos griegos, hindúes, árabes y europeos se dedicaron al estudio de estas ecuaciones y lograron avanzar a través del tiempo hasta encontrar la fórmula para resolver cualquier ecuación de segundo grado, es decir, una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a,\ b,\ c$ pueden ser números cualesquiera en cuyo desarrollo, los babilonios se valieron de factorizaciones simples que ya conocían. Posteriormente, los griegos y los árabes consiguieron resolver ecuaciones de segundo grado utilizando, también, el método de completar el cuadrado con
aplicación de áreas; ambas civilizaciones se valieron de representaciones geométricas para mostrar hechos algebraicos, como se evidencia en el II libro de los *Elementos* de Euclides.

La fórmula que permite encontrar las soluciones de cualquier ecuación de tercer grado (o ecuación cúbica) no se encontró sino hasta el siglo XVI en Italia. Una ecuación cúbica es de la forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ ,$$

donde $a,\ b,\ c$y d son números cualesquiera, y $a \neq 0$

Lo que tienen todas estas ecuaciones en especial, y que las hace ser de tercer grado, o cúbicas, es que la incógnita aparece elevada al exponente 3, y ese es el mayor exponente de la incógnita.
Por muchos siglos, antes del siglo XVI, los matemáticos intentaron encontrar la fórmula que sirviera para determinar las soluciones de cualquier ecuación cúbica, sin lograrlo. La gran proeza matemática de descubrir la fórmula, fue realizada por el matemático italiano Scipione del Ferro, en primer lugar, y más adelante por Nicolo Tartaglia quien la obtuvo por su cuenta, sin conocer el trabajo de Scipione. Sin embargo, la fórmula es conocida con el nombre de "fórmula de Cardano", porque otro matemático llamado Girolamo Cardano, quien estudió cuidadosamente las soluciones de Tartaglia y del Ferro, luego fue quien publicó la fórmula por primera vez en un gran tratado sobre resolución de ecuaciones titulado "Ars Magna".

Estas ecuaciones nos permiten encontrar las soluciones de las ecuaciones polinómicas de tercer grado y por tanto factorizar en los números complejos y en los reales, que es nuestro propósito. Es sabido que existen fórmulas similares para polinomios de grado cuatro pero no para grado superior a este; es más, Abel demostró que no existen tales fórmulas para estos grados superiores lo que nos lleva a pensar en la imposibilidad de encontrar métodos generales para factorizar tales polinomios.

Para este trabajo nos centraremos en polinomios con coeficientes reales y utilizaremos el *Teorema Fundamental del Algebra* que permite afirmar que tales polinomios factorizan en producto de factores de grado uno (correspondientes a las soluciones reales) y factores de grado dos cuyas soluciones no son reales sino complejas conjugadas.

4. FACTORIZACIÓN ALGEBRAICA REAL

- ***Polinomios de Segundo Grado***

  Todo polinomio con coeficientes R(los nuestros son Z) descompone en producto de polinomios de grado 2 y en caso de tener grado impar , en otro más de grado 1.
  Tales factores de grado 2, que por supuesto siguen teniendo coeficientes R , pueden resolverse en números complejos, es decir, puede que no tengan soluciones en R , pero seguro que sí que la tiene en números complejos *(Teorema Fundamental del Álgebra, D'Alembert 1746, Gauss 1799)* y además tales soluciones son conjugadas *(Newton, Aritmética Universales).*

  ¿Qué aspecto tienen los polinomios de grado 2 irreducibles en números reales?(con coeficientes reales)

¿Cómo obtener los factores a partir de la forma inicial del polinomio?

Para responder, vamos a estudiarlos caso por caso. La intención es deducir qué tipos de factores tendrá, observando los coeficientes:

i. *Polinomios de grado 2 con solución real doble:*

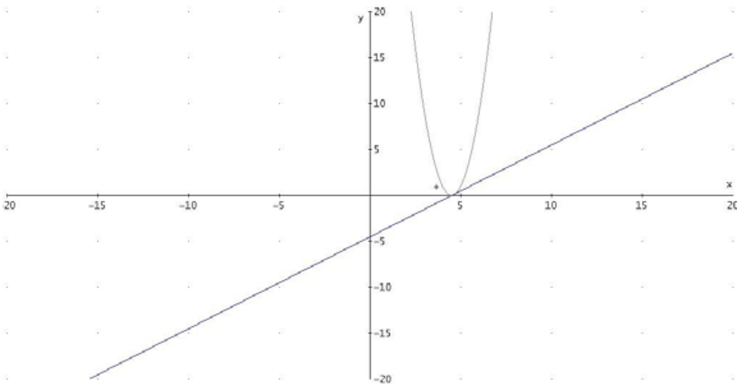
$$P(x) = (x-a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$$

Comparamos con el polinomio general:

$$x^2 + px + q \begin{cases} q > 0 \\ p = -2\sqrt{q};\ p^2 = 4 \cdot q \end{cases}$$

Ejemplo: $4x^2-36x+81 \;=$

$$\begin{array}{l} 4\left(x^2-\dfrac{36}{4}x+\dfrac{81}{4}\right)= \\ =4x^2-36x+81= \\ =4\cdot\left(x-\sqrt{\dfrac{81}{4}}\right)^2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} q>0 \\ p^2=4q \to \left(\dfrac{-36}{4}\right)^2=4\cdot\left(\dfrac{81}{4}\right) \\ p=\dfrac{b}{a}=\dfrac{-36}{4} \\ q=\dfrac{c}{a}=\dfrac{81}{4} \end{cases}$$



ii. *Polinomios de grado 2 con soluciones reales distintas* $(x-\alpha)\cdot(x-\beta)$ *:*

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\cdot\beta$$

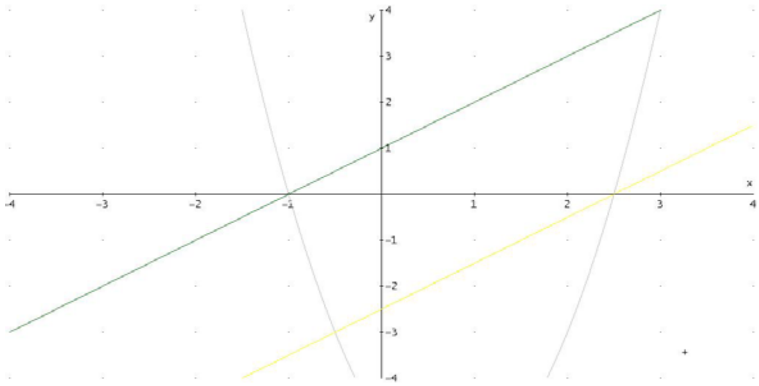
Comparo con $x^2+px+q\begin{cases} q=\alpha.\beta \\ \alpha+\beta=-p \end{cases}$

En definitiva se tratará de poner el término independiente como producto de dos números y cuya suma sea el opuesto del coeficiente en x. En la práctica, como los coeficientes son casi siempre enteros probaremos a descomponer como producto de dos factores.

Ejemplo:

$$2x^2-3x-5=2\cdot\left(x^2+\frac{-3}{2}\cdot x+\frac{-5}{2}\right)=2\cdot\left(x-\left(\frac{5}{2}\right)\right)\cdot\left(x+\frac{2}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)\cdot(x+1)\begin{cases} q=\dfrac{5}{2}\cdot-\dfrac{2}{2}=\dfrac{-5}{2} \\ p=\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$



iii. Polinomio de grado 2 irreducible en números reales:
$x^2 + px + q$

$$(x-(a+bi))\cdot(x-(a-bi)) = x^2 - 2ax + (b^2 + a^2)$$

Comparando: $q = b^2 + a^2$ y $p = -2a$

Entonces $q > 0, \dfrac{p}{-2} = a \Rightarrow q - \left(\dfrac{p}{-2}\right)^2 = b^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} q > 0 \\ q - \dfrac{p^2}{4} > 0 \end{cases}$

Ejemplo:

$$x^2 - 6x + 25 = \begin{cases} 25 = 4^2 + 3^2 \\ -6 = -2 \cdot 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 10x + 40$$

El coeficiente de la x tiene que ser par. Lo dividimos entre 2 y obtenemos a:

$$a = \frac{10}{2} = 5$$

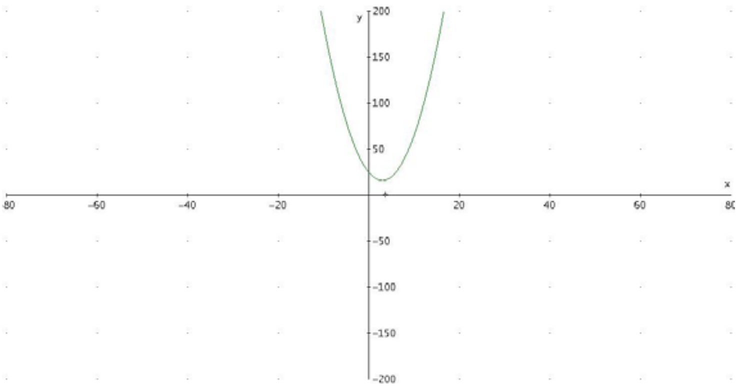
Para encontrar b le restamos al término independiente el cuadrado de a:

$$40 - 25 = 15 \to b = \sqrt{15}$$

Lo que es seguro es que todo polinomio de grado 2 con coeficientes reales, irreducible en números reales tiene el mismo signo en el mayor grado (x^2) que en el término independiente.

Ejemplo:

- $3x^2 + 8x - 5$ puede que sea irreducible en números reales.
- $3x^2 + 8x + 5$ sabemos que es reducible.



- ***Polinomios de Grado Tres***

Sabemos que todo polinomio con coeficientes reales: si tiene una solución compleja entonces también está su conjugada, luego van de dos en dos. Si el polinomio es de grado 3, una solución tiene que ser real.

1. 1º caso: Solución real triple

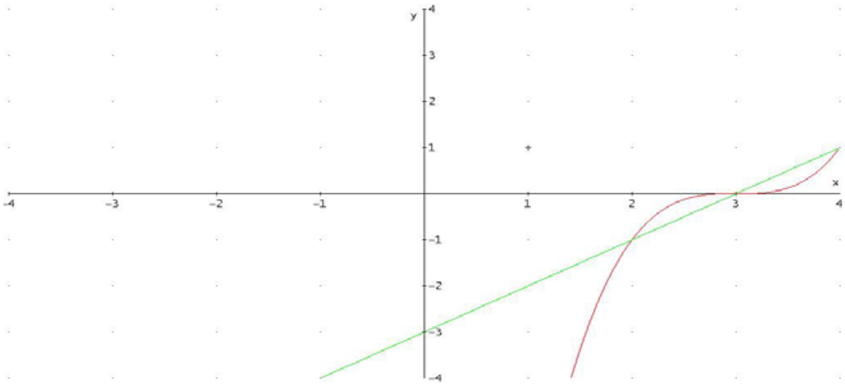
$$x^3 + px^2 + qx + r = (x-\alpha)^3$$
$$(x-\alpha)\cdot(x-\alpha)^2 = (x-\alpha)\cdot(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) = x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - \alpha^3$$

**Comparamos el polinomio obtenido con la forma del polinomio general y obtenemos las siguientes conclusiones:*

$$x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x - \alpha^3 = x^3 + px^2 + qx + r \begin{cases} \alpha = -\sqrt[3]{r} \\ q = 3\sqrt[3]{r^2} \\ p = -3\sqrt[3]{r} \end{cases}$$

Ejemplo:

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x-3)^3 \begin{cases} -3 = -\sqrt[3]{27} \\ 27 = 3\sqrt[3]{27^2} \\ -9 = -3\sqrt[3]{27} \end{cases}$$



2. 2º caso: Solución real doble y otra simple

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x-\alpha)^2 \cdot (x-\beta)$$

$$(x-\alpha)^2 \cdot (x-\beta) = x^3 - \beta x^2 - 2\alpha x^2 + 2\alpha\beta x + \alpha^2 x - \alpha^2 \beta =$$

$$= x^3 - (\beta + 2\alpha) x^2 + (2\alpha\beta + \alpha^2) x - \alpha^2 \beta$$

**Puesto que es muy difícil obtener conclusiones generales, suponemos el coeficiente “p”=0:*

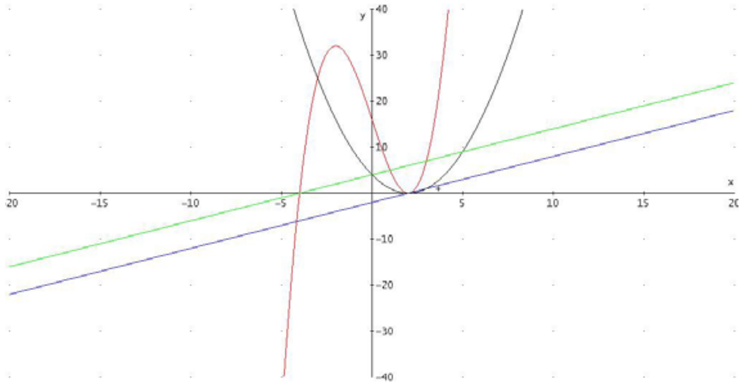
$$\left.\begin{array}{l} p = 0 \\ \beta + 2\alpha = 0 \\ \beta = -2\alpha \\ \alpha = \dfrac{\beta}{-2} \end{array}\right\} x^3 + (-4\alpha^2 + \alpha^2)x - \alpha^2(-2\alpha) = x^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3$$

**Comparamos el polinomio obtenido con la forma del polinomio general y obtenemos las siguientes conclusiones:*

$$x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3 = x^3 + qx + r \begin{cases} (p = 0, q < 0) \\ \alpha = \sqrt[3]{\dfrac{r}{2}} \\ r = 2\left(\sqrt{\dfrac{q}{-3}}\right)^3 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2 \cdot (x+4) \begin{cases} 2 = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} \\ 16 = 2\left(\sqrt{\dfrac{-12}{-3}}\right)^3 \end{cases}$$



3. 3º caso: Una real y dos complejas conjugadas

$$(x-\alpha)\cdot(x-(a+bi))\cdot(x-(a-bi)) = (x-\alpha)\cdot((x-a)+bi)\cdot((x-a)-bi) =$$
$$= (x-\alpha)\cdot((x-a)^2 - (bi)^2) = (x-a)^2 x - (bi)^2 x - (x-a)^2\alpha + (bi)^2\alpha =$$
$$= (x^2 - 2ax + a^2)x - (bi)^2 x - (x^2 - 2ax + a^2)\alpha + (bi)^2\alpha =$$
$$= x^3 - 2ax^2 + a^2 x - (bi)^2 x - \alpha x^2 + 2a\alpha x - a^2\alpha + (bi)^2\alpha =$$
$$= x^3 - (2a+\alpha)x^2 + (a^2 + 2a\alpha - (bi)^2)x + (-a^2 + (bi)^2)\alpha =$$
$$= x^3 - (2a+\alpha)x^2 + (a^2 + 2a\alpha + b^2)x - (a^2 + b^2)\alpha$$

**Puesto que parece muy complicado encontrar conclusiones generales, suponemos “p”=0:* ¡¡ $a \neq 0$ y $b \neq 0$!!

$$\left.\begin{array}{l} p = 0 \\ 2a + \alpha = 0 \\ \alpha = -2a \end{array}\right\} x^3 + (a^2 + 2a\alpha + b^2)x - (a^2 + b^2)\alpha$$

** Comparamos el polinomio obtenido con la forma del polinomio general:*

$x^3 + (a^2 + 2a\alpha + b^2)x - (a^2 + b^2)\alpha = x^3 + qx + r$

$\cdot q = a^2 + 2a\cdot(-2a) + b^2 = a^2 - 4a^2 + b^2$

$\cdot r = (a^2 + b^2)\cdot(-2a) = (q + 4a^2)\alpha = (q + \alpha^2)\alpha$

$r = (q + 4a^2)\cdot(-2a)$

** Lo mejor es observar que el polinomio quedaría:*

$x^3 + qx + (q + \alpha^2)\alpha$

** Ya sólo hay que buscar* α

Ejemplo: $x^3 + 5x - 18$

** Comparamos con la forma general del polinomio:*

$$x^3 + 5x - 18 = x^3 + qx + (q + \alpha^2)\alpha \left\{\begin{array}{l} q = 5 \\ 18 = (5 + \alpha^2)\alpha \end{array}\right.$$

** En el polinomio anterior hemos dado a "q" el valor de 5 ya que "r" (18) ha de ser "q" (o sea 5) por algo elevado al cuadrado y multiplicado todo esto por ese algo al que denominamos* α *. En este caso podemos deducir fácilmente que* α *=2.*
Cuando α *sea entero, es muy sencillo encontrarla con este método que por tanto resuelve los casos habituales de clase a los cuales aplicamos Ruffini.*

** Suponemos ahora los coeficientes "p" y "q"=0:*

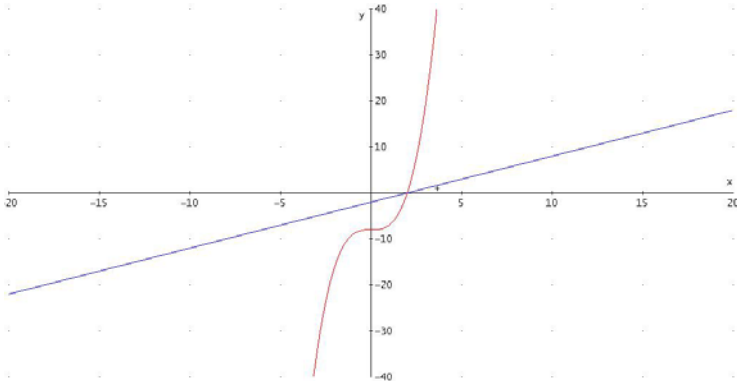
$$\left.\begin{array}{l} p = q = 0 \\ 2a + \alpha = 0 = a^2 + 2a\alpha + b^2 \end{array}\right\} x^3 - (a^2 + b^2)\alpha$$

** Comparamos ahora con la forma del polinomio general y obtenemos las siguientes conclusiones:* $x^3 - (a^2 + b^2)\alpha = x^3 + r$

- ✓ *Observamos que la solución real es:* $\alpha = \sqrt[3]{-r}$.
- ✓ *Como p=0 y q=0 y* $r = -(a^2 + b^2).\alpha$ *tenemos tres ecuaciones de las que podríamos deducir a, b y* α

Ejemplo:

$$x^3+(-8)=(x-2)\cdot(x-(-1+\sqrt{3}\cdot i))\cdot(x-(-1+\sqrt{3}\cdot i))\begin{cases}\cdot\alpha=\sqrt[3]{8}=2\\ \cdot 8=(a^2+b^2)\alpha\rightarrow 8=(1+b^2)\cdot 2\rightarrow\\ \rightarrow 1+b^2=4\rightarrow b^2=3\rightarrow b=\sqrt{3}\\ \cdot p=2a+\alpha=0\rightarrow 2a+2=0\rightarrow a=-1\\ \cdot q=(a^2+2a\alpha+b^2)=0\end{cases}$$



- ***Polinomios de Grado Cuatro***

Una de las principales cuestiones que nos planteamos a la hora de hacer este trabajo fue si sería lo mismo factorizar que encontrar las soluciones de un polinomio y, si seríamos capaces de encontrar algún polinomio que no tuviese soluciones pero al cual pudiésemos factorizar en R.
Aquí tenemos el caso que demuestra la equivocación de la mayoría de los libros didácticos apropiados a nuestro curso, pues afirman que encontrar las soluciones de un polinomio es lo mismo que factorizarlo:

$$x^4+1\Rightarrow x^4=-1$$

Sabemos que no existe ningún número real con exponente par que de cómo resultado un número negativo, por lo que nuestro polinomio no tiene soluciones reales.
No obstante, este polinomio puede ser descompuesto en el producto de dos polinomios de 2º grado de la siguiente forma:

$$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)$$

Demostración:

$$(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1)\cdot(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)=x^4+\sqrt{2}\cdot x^3+x^2-\sqrt{2}\cdot x^3+(\sqrt{2}\cdot x)^2-\sqrt{2}\cdot x+x^2+\sqrt{2}\cdot x+1=$$
$$x^4-\sqrt{2}\cdot x^3+\sqrt{2}\cdot x^3+x^2-2x^2+x^2-\sqrt{2}\cdot x+\sqrt{2}\cdot x+1=x^4+1$$

** A continuación plantearemos el caso general para polinomios de este tipo:*

$x^4 + c$ para *c>0*

** Sabemos que este polinomio es igual al producto de dos de segundo grado en los cuales el término independiente es la raíz de "c", para que, al multiplicarlos entre sí nos quede c como término independiente en el polinomio de cuarto grado.*

$$x^4 + c = (x^2 \pm .... + \sqrt{c})\cdot(x^2 \pm .... + \sqrt{c})$$

** Para facilitar los cálculos sacamos como factor común a la "c":*

$$c\left(\frac{x^4}{c} + 1\right) = c\left(\left(\frac{x}{\sqrt[4]{c}}\right)^4 + 1\right)$$

** Ahora vamos a intentar encontrar los dos polinomios de segundo grado cuyo producto nos dé el polinomio anterior, para ello llamaremos a* $\frac{x}{\sqrt[4]{c}}$ *"y":*

$$c\cdot(y^4 + 1) = c\cdot(y^2 - \sqrt{2}\cdot y + 1)\cdot(y^2 + \sqrt{2}\cdot y + 1)$$

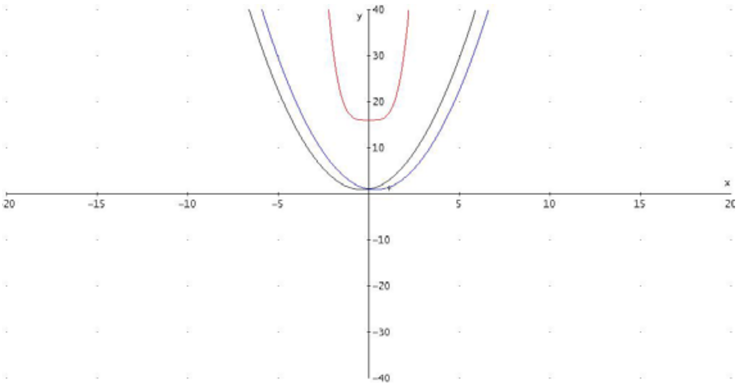
** Volvemos a utilizar* $\frac{x}{\sqrt[4]{c}}$ *en lugar de "y":*

$$c\cdot(y^2 - \sqrt{2}\cdot y + 1)\cdot(y^2 + \sqrt{2}\cdot y + 1) = c\cdot\left(\left(\frac{x}{\sqrt[4]{c}}\right)^2 - \sqrt{2}\cdot\frac{x}{\sqrt[4]{c}} + 1\right)\cdot\left(\left(\frac{x}{\sqrt[4]{c}}\right)^2 + \sqrt{2}\cdot\frac{x}{\sqrt[4]{c}} + 1\right) =$$

$$= c\cdot\left(\frac{x^2}{\sqrt{c}} - \sqrt{2}\cdot\frac{x}{\sqrt[4]{c}} + 1\right)\cdot\left(\frac{x^2}{\sqrt{c}} + \sqrt{2}\cdot\frac{x}{\sqrt[4]{c}} + 1\right)$$

** Por tanto, el polinomio* $x^4 + c$ *quedaría factorizado como ya hemos visto.*

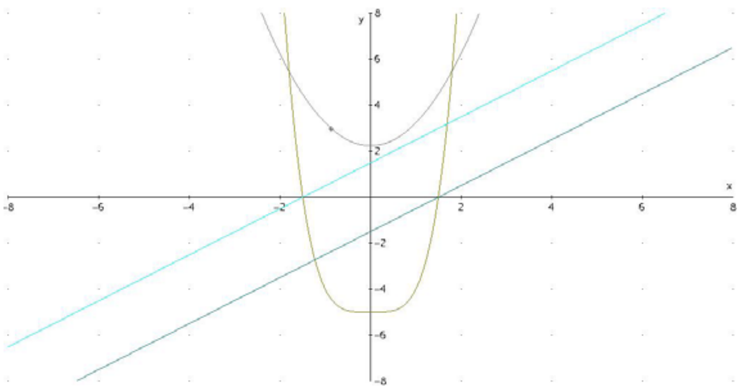
Ejemplo: $x^4+16=16.\left(\frac{x^2}{4}-\sqrt{2}\frac{x}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{x^2}{4}+\sqrt{2}\frac{x}{2}+1\right)$



En el caso de polinomios del tipo x^4-c para *c>0* la factorización es diferente y esta ya sabíamos hacerla en los ejercicios habituales de clase, sacando las soluciones reales y a continuación haciendo la división Euclídea para obtener el factor irreducible de grado 2. En general quedaría:

$$x^4-c=\left(x^2+\sqrt{c}\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{c}\right)=\left(x^2+\sqrt{c}\right)\cdot\left(x+\sqrt[4]{c}\right)\cdot\left(x-\sqrt[4]{c}\right)$$

Ejemplo: $x^4-5=\left(x^2+\sqrt{5}\right)\cdot\left(x+\sqrt[4]{5}\right)\cdot\left(x-\sqrt[4]{5}\right)$



En los dos casos observamos cierta relación entre el polinomio de grado 4 y los factores fe grado dos, "el vértice de la primera es el punto medio del de los factores de grado dos". ¿Ocurrirá esto para todo polinomio de grado 4 y en general par?

5. RESULTADOS Y CUESTIONES.

Conseguimos nuestro propósito en grado dos. Para el tercer grado hemos tenido que suponer cero el coeficiente de grado dos, lo cual no es mucho suponer porque según el profesor se puede lograr siempre con un cambio de variable adecuado. En el caso de grado cuatro nos limitamos a estudiar los del tipo $x^4 \pm c$. Hemos dados ejemplos de todos ellos y detallado cómo se llega a su factorización. También hemos hecho sus representaciones gráficas. Sin embargo son muchas más las dudas que los hallazgos:

- Al ver que en los polinomios de grado 2 había una solución compleja y una conjugada, ¿se podría saber si los polinomios de grado mayor a 2 que sean pares y con similar aspecto a éste tienen soluciones complejas y su respectiva conjugada?

- ¿Se puede sacar una fórmula o regla general para los polinomios de grado 3 del tipo que sea para factorizar sin tener que pasar por las fórmulas de Cardano para encontrar soluciones?

- Para poder hacer algo con los polinomios de grado 4 tuvimos que suponer que p y q eran 0 así sólo tendría el término en x y el término independiente. Siendo así ¿se puede sacar una fórmula para los polinomios de dos términos o se podría sacar otra fórmula para factorizar con los cuatro términos de los polinomios de cuarto grado?

- ¿Se podría conocer el número de factores que va a tener un polinomio con coeficientes enteros, aunque no podamos sabes cuáles son estos factores?

- Hemos observado que al aumentar de grado, aumenta la dificultad de encontrar conclusiones generales, pero…¿podría suceder que al aumentar el grado llegase un momento en el que las conclusiones llegasen a repetirse y existiese alguna relación por ejemplo entre polinomios de grado 16 y polinomios de grado 2, 4 y 8?

6. CONCLUSIONES

- Me ha parecido de gran interés, he descubierto multitud de cosas que desconocía, hemos sacado, para mi parecer, muy buenas conclusiones que pueden ser de gran utilidad a la hora de factorizar.
  Respecto al trabajo, podría decir que ha sido muy bueno y que había muy buen ambiente.
  Hemos tenido, gracias al instituto y sobre todo al profesor, todos los medios necesarios.
  Espero que esta experiencia se vuelva a repetir. Aunque hemos tenido algunas dificultades al ser alumnos de diferentes pueblos por eso hemos utilizado las horas libres, los recreos…

- Desde mi punto de vista, el concurso me a parecido una gran oportunidad para aprender multitud de cosas y sobre todo, para cambiar en cierto modo mi forma de ver las matemáticas, pues me he dado cuenta de que las matemáticas no son simplemente memorizar fórmulas y hacer cuentas, sino que es algo mucho más interesante y que es algo infinito, algo en lo que nunca terminaríamos de investigar por completo ni de sacar todas la fórmulas y conclusiones existentes.

- Como decía mi compañera en el comentario anterior, no hemos tenido todo el tiempo que nos habría gustado, creo que si lo hubiésemos tenido, habríamos obtenido mejores conclusiones, que era el objetivo de nuestro trabajo.

- Al principio me resultaba difícil de entender ya que no estaba acostumbrada a pensar tanto; pero luego a medida que fuimos avanzando en el "trabajo" me fue gustando cada vez más. Ahora, después de hacerlo me gustan mucho más las matemáticas ya que lo comprendo todo mucho mejor y no pienso en las matemáticas como algo mecánico y sin lógica. Tengo poco más que añadir pues el desarrollo del concurso ha ido muy bien, y hemos alcanzado más o menos los objetivos que nos habíamos planteado al iniciar este proyecto aun así nos hubiera gustado descubrir más cosas interesantes.

7. BIBLIOGRAFÍA

- Elementos de Álgebra Abstracta, A. Clark
- El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros Días, Morris Kline
- Libros de Texto de 4º ESO y 1ºBCNS
- Programa "Derive"
- Algunas Páginas Web