Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Segunda Edición, 2007/2008

TRABAJO: Cocientes obtenidos en una división entre polinomios en los que el grado del dividendo es inferior al grado del divisor

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

- Guillermo Julián Moreno
- Juan Carlos Román Guerra
- Miguel Blanco González

TUTORES:

- Carmen Zamarro de Santos

CENTRO: IES Valdebernardo (Madrid)

AUTÓNOMA 4ñ0s

Fundación Vodafone España

Obra Social CosmoCaixa

Cocientes obtenidos en una división entre polinomios
en las que el grado del dividendo es inferior al grado del divisor

Índice

1. Introducción y antecedentes

En clase nos explicaron que una división de polinomios se acaba cuando el grado del resto es menor que el grado del divisor.

Pero igual que las divisiones de números se pueden continuar sacando decimales, uno de nosotros pensó una forma de continuar también las divisiones de polinomios: utilizando potencias de x de exponente negativo. Los coeficientes de estas x serán los "decimales".

2. Objetivos

El objetivo principal es la búsqueda de diferentes tipos de "decimales" obtenidos al dividir dos polinomios cuando el grado del resto es menor que el grado del divisor. Dichos tipos tendrán que ser semejantes a los obtenidos en divisiones con números normales, como pueden ser decimales exactos, irracionales, periódicos puros y mixtos.

3. Desarrollo

Seguidamente se explicarán los tipos de "decimales" obtenidos, su proceso y ejemplos; además de paralelismos o similitudes con los decimales conseguidos de divisiones numéricas.

EXACTOS

El cociente obtenido tiene un final determinado, y en él se encuentran monomios de grado negativo. Esto es similar a dividir un número natural entre un 1 seguido de ceros.

Proceso: División entre un monomio.
Ejemplo:

$$\frac{2x^2 + 3x - 2}{x} = 2x + 3 - \mathbf{2x^{-1}}$$

PERIÓDICOS PUROS

Este tipo de cocientes repiten un monomio o una serie de ellos ininterrumpidamente hasta el infinito que aparece desde la primera cifra decimal, que tiene siempre exponente *-1*. El paralelismo de este tipo de decimales con los decimales numéricos serían las divisiones entre nueves.

Proceso: División entre $x^n \pm 1$.
Ejemplo: $(7x^2 - 5x + 8) : (x - 1)$

	7	-5	8			
1		7	2	10	10	…
	7	2	**10**	**10**	**10**	…

Observación: El número de cifras del período obtenidas al dividir entre $x^n \pm 1$ es n si se divide entre $x^n - 1$ y $2n$ si se divide entre $x^n + 1$.
Ejemplo: $(7x^2 - 5x + 8) : (x + 1)$

	7	-5	8				
-1		-7	12	-20	20	-20	…
	7	-12	**20**	**-20**	**20**	**-20**	…

PERIÓDICOS MIXTOS

Estos cocientes tienen un período que se presenta después de la primera cifra decimal, es decir, cuya primera cifra del período tiene exponente -2 o menor. En los números naturales se obtienen dividiendo entre nueves seguidos de ceros.

Proceso: División de un periódico puro entre x^n. Simplificándolo se obtiene mediante la división de un polinomio entre $x^{n+m} \pm x^n$.

Ejemplo: $[(4x^3 + 3x^2 + 2) : (x^2 + 1)] : x$

1º -> Obtenemos el periódico puro. El método usado para esta división se explicará en el anexo.

	4	3	0	2										
-1			-4	-3	4	1	-4	-1	4	1	-4	-1	4	1
	4	3	**-4**	**-1**	**4**	**1**	-4	-1	4	1	-4	-1	4	1
			$\underbrace{\hphantom{-4\ -1\ 4\ 1}}_{}$											

Período

2º -> Dividimos entre *x*:

$$\frac{4x + 3 - 4x^{-1} - 1x^{-2} + 4x^{-3} + 1x^{-4}}{x} = 4 + \mathbf{3x^{-1}} \boldsymbol{- 4x^{-2} - 1x^{-3} + 4x^{-4} + 1x^{-5}}$$

Anteperíodo

IRRACIONALES

Un cociente irracional no presenta ninguna repetición.

Ejemplo: $(3x^2 + 9x - 1) : (x^2 + x + 1)$

$3x^2$	$+9x$	-1		x^2	$+x$	$+1$	
$-3x^2$	$-3x$	-3		3	$6x^{-1}$	$-10x^{-2}$	…
	$6x$	-4	$0x^{-1}$				
	$-6x$	-6	$-6x^{-1}$				
		-10	$-6x^{-1}$	$0x^{-2}$			
		10	$10x^{-1}$	$-10x^{-2}$			
		…	…	…			

Progresiones geométricas

Si se obtienen dividiendo entre $x^n \pm m$, siendo m distinto de 1, los resultados se corresponden con progresiones geométricas de razón m.

Ejemplo: $(3x^2 + 3x - 2) : (x + 2)$

	3	3	-2					
-2		-6	6	-8	16	-32	64	…
	3	-3	4	-8	16	-32	64	…

Razón = -2

También se pueden crear otro tipo de irracionales haciendo divisiones de Ruffini encadenadas. A continuación aparecerán diversos ejemplos:

Progresiones aritméticas

En este caso vamos a conseguir una progresión aritmética de diferencia 1, es decir, los números naturales.

Proceso: Conseguir un periódico puro cuyo período tenga una única cifra, y que esta sea 1. Posteriormente se divide dicho período entre $x - 1$ para obtener la progresión.

Ejemplo: $[(-2x^2 + 4x - 1) : (x - 1)] : (x - 1)$

	-2	4	-1											
1		-2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	-2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		-2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	-2	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

De esta forma se puede obtener cualquier progresión aritmética, simplemente cambiando el período obtenido. Por ejemplo, ahora vamos a obtener los números pares.

Proceso: El mismo que el anterior, simplemente que ahora vamos a obtener un decimal cuyo período sea 2 y no 1.

Ejemplo: $[(2x^4 + x^3 - 10x^2 + 11x - 2) : (x - 1)] : (x-1)$

	2	1	-10	11	-2									
1		2	3	-7	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	2	3	-7	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1		2	5	-2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	2	5	-2	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**

A partir de estos dos últimos ejemplos, se encuentra el método de hallar la suma de los primeros términos de una progresión aritmética. Una vez hallados los términos de la progresión, se realiza otra división entre x – 1.

Ejemplo: *[[(2x² +1) : (x - 1)] : (x - 1)] : (x – 1)*

	2	0	1											
1		2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	2	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1			-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	2	-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		2	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
	2	0	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**45**	**55**	**66**	**78**

Progresiones salteadas

Estos cocientes presentan dos progresiones diferentes, cuyos términos se turnan para aparecer.

Proceso: El período tendrá dos cifras, y ambas serán diferentes, por lo que hay que dividir entre $x^2 - 1$.

	5	-2	-3	3	1									
			5	-2	2	1	3	1	3	1	3	1	3	1
	5	-2	2	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1
1			5	-2	7	1	10	2	13	3	16	4	19	5
	5	-2	7	**1**	**10**	**2**	**13**	**3**	**16**	**4**	**19**	**5**	**22**	**6**

En negro se marca una progresión, cuya diferencia es 1, y en gris la otra cuya diferencia es 3.

4. Conclusiones

Mediante divisiones polinómicas se han conseguido encontrar cocientes que guardan similitudes con los diversos tipos de decimales obtenidos con divisiones numéricas. A continuación aparecen los métodos para obtener cada uno de ellos

Decimal exacto: $p(x) : x$
Periódico puro: $p(x) : (x^n \pm 1)$
Periódico mixto: $[p(x) : (x^n \pm 1)] : x$

5. Preguntas abiertas

1. ¿Se podrá conseguir la sucesión de los cuadrados perfectos?
2. ¿Se podrá conseguir la serie irracional 10110011100011110000…?
3. ¿Qué ocurriría si se dividiese entre x con exponente negativo, como por ejemplo entre $x^{-2} + 3$? ¿Valdría el método de Ruffini moviendo dos lugares, pero hacia la izquierda?

6. Anexos. Método de Ruffini General

El método usado en todas las divisiones de este trabajo es el llamado método de Ruffini, al cual se han hecho modificaciones para que se pueda dividir entre divisores $x^n \pm m$. A continuación se describe este método.

Guarda muchas similitudes con el método normal de Ruffini, de hecho la única diferencia reside en el desplazamiento horizontal de las cifras:

En el método normal de Ruffini, las cifras se multiplican por *m* y se suman a la cifra siguiente. En este caso el 1 se multiplica por el divisor, 2 y se suma a la siguiente cifra, 3; y así sucesivamente:

$(x^2 + 3x + 6) : (x - 2)$

	1	3	6
2		2	10
	1	5	16

Para el método general, en el que la *x* tiene un exponente mayor que 1, el número multiplicado por *m* no se suma a la siguiente cifra, sino que se desplaza 2 lugares, o el número que indique el exponente.

$(2x^3 + 3x^2 - 2x + 3) : (x^2 - 2)$

	2	3	-2	3
2			4	6
	2	3	2	9

Por tanto, para el método general, en el que *x* tiene un exponente mayor que 1, el número multiplicado por *m* se desplaza n lugares.