

Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Tercera Edición, 2008/2009

TRABAJO: Cuadrilando Círculos

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE BACHILLERATO

AUTORES:

- o Héctor Rosa Álvarez
- o Adrián Tamayo Domínguez

TUTORES:

- o David Miguel del Río

CENTRO: IES Europa (Móstoles, Madrid)

AUTÓNOMA 40 años



III Premio de Estudiantes de Secundaria

Categoría: Bachillerato

CUADRICULANDO CÍRCULOS

Autores:

“Unos matemáticos muy matemáticos”

ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN.....	2
2.- OBJETIVOS.....	2
3. DESARROLLO	2
3.1. INVESTIGANDO CON CUADRADOS UNIDAD ORDENADOS RESPECTO A LOS EJES CARTESIANOS.....	2
3.1.1. Un primer intento del caso de dos dimensiones.....	2
3.1.2. Por fin la solución del caso bidimensional.....	6
3.1.3. Caso de tres dimensiones	8
3.1.4. Generalizando a dimensiones superiores	9
3.2. INVESTIGANDO CON UNIDADES DESORDENADAS RESPECTO A LOS EJES CARTESIANOS.....	11
3.2.1. Un primer intento del caso desordenado en dos dimensiones.....	11
3.2.2. Solución del caso desordenado en dos dimensiones	13
3.2.3. Planteando el caso de tres dimensiones	14
3.2.4. Buscando una estructura para la expresión n-dimensional (nD).....	15
3.2.5. Utilizando matrices	15
3.2.5.1. Caso unidimensional	16
3.2.5.2. Caso bidimensional	16
3.2.5.3. Caso tridimensional.....	16
3.2.5.4. Conjeturando una solución.....	18
3.2.6. Generalizando a dimensiones superiores	19
4. CONCLUSIONES	19

CUADRICULANDO CÍRCULOS

1.- INTRODUCCIÓN

Se nos plantea la siguiente pregunta: ¿Cuántos cuadraditos de lado 1 unidad pueden entrar en un círculo de radio R unidades? Demostraremos que es posible obtener el número exacto de cuadraditos, ordenados y desordenados respecto a los ejes cartesianos, que entran sin solaparse en un círculo de radio R y, mediante un proceso inductivo, llegaremos a generalizar para cualquier dimensión.

2.- OBJETIVOS

El principal objetivo del presente trabajo es el de aprender a desarrollar estrategias que permitan abordar problemas cuya solución no sea, en principio, fácil.

Para ello utilizaremos el método científico, la observación y la generalización de aquellas regularidades que encontremos.

Trataremos de resolver la situación planteada, sobre la que hemos de imponer una fuerte restricción: no vale cualquier recubrimiento. Éste debe ser de tal manera que no se solapen los cuadrados unidad y que éstos entren completamente dentro de la circunferencia de radio R unidades.

3. DESARROLLO

3.1. INVESTIGANDO CON CUADRADOS UNIDAD ORDENADOS RESPECTO A LOS EJES CARTESIANOS

3.1.1. Un primer intento del caso de dos dimensiones

Comenzamos experimentando con dibujos de círculos en los cuales colocamos de una forma ordenada, alineada con los ejes cartesianos, los cuadraditos de una unidad. Para ello utilizamos un programa gráfico (Geogebra) y, dada la simetría del problema, construimos un único cuadrante para después multiplicar lo obtenido por cuatro. Por tanto, lo que conseguimos es el número máximo de cuadraditos que caben en un círculo con la restricción de que estén ordenados respecto a los ejes. De esta manera la esquina inferior izquierda del primer cuadrado se encuentra en el origen de coordenadas. El número máximo trataremos de obtenerlo más adelante.

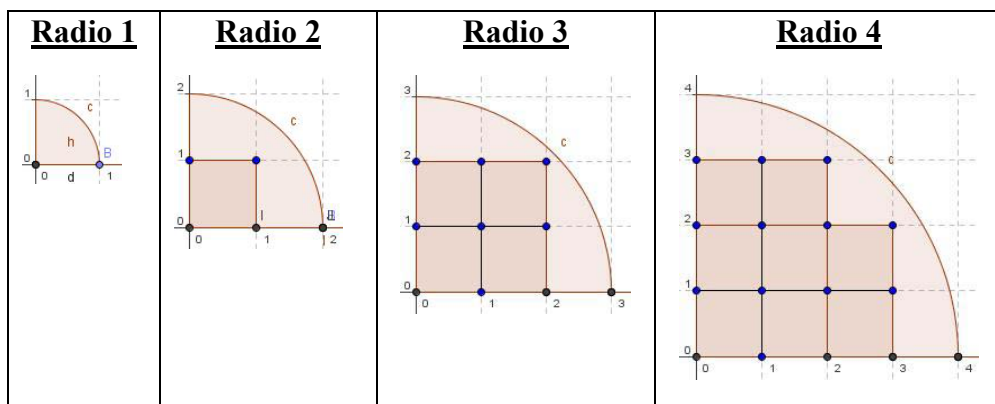


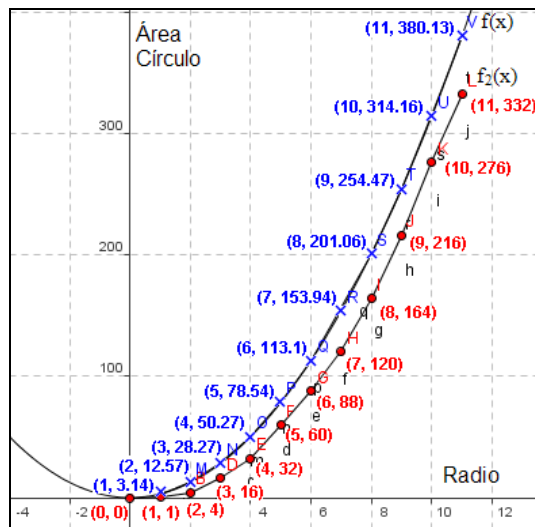
FIGURA 1- Buscamos todos los cuadrados enteros que hay en un cuadrante de un círculo de radio R unidades.

Tras la investigación experimental, obtenemos los datos que recogemos en la tabla 1.

Radio del círculo (R)	Área del círculo	Nº cuadrados unidad
1	3.14	0
2	12.56	4
3	28.27	16
4	50.26	32
5	78.54	60
6	113.10	88
7	153.93	120
8	201.06	164
9	254.46	216
10	314.16	276
11	380.13	332
12	452.38	392
13	530.92	476
14	615.75	556
15	706.85	644
16	804.24	732
17	907.92	832

TABLA 1.- Relación entre el radio del círculo, su área y el número de cuadraditos unidad que entran en él.

Tras obtener estos resultados, vimos que la serie correspondiente al número de cuadraditos no nos llevaban a ninguna meta y pasamos a observar la relación que existía entre el número de cuadraditos y el área del círculo. Al hacerlo obtuvimos la siguiente gráfica:



GRÁFICA 1.- Donde $f(x)$ es igual al área del círculo, marcada con cruces, y donde $f_2(x)$ es igual al número de cuadraditos, marcada con puntos.

Podemos observar en la gráfica que el crecimiento de ambas curvas es similar, lo que quiere decir que ambos casos recogen un área muy parecida. Por tanto, en el infinito, $f_2(x)$ tiende a $f(x)$.

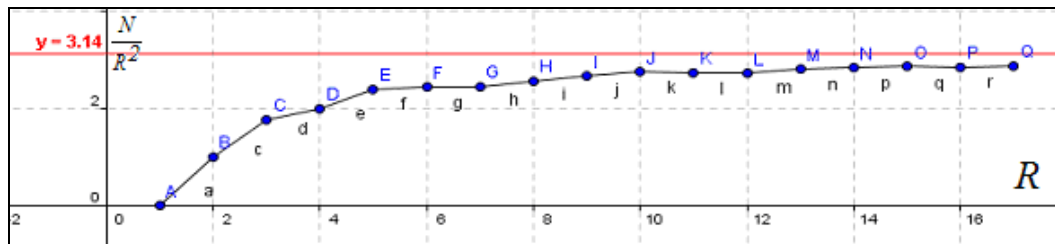
De esto se desprende la idea de que el número de cuadraditos cuando el radio del círculo tiende a infinito es igual al área del círculo. De esta manera, tenemos que:

$$N \leq \pi \cdot R^2 \quad [1]$$

donde N es el n° de cuadraditos y r es el radio del círculo.

Despejando de la inecuación [1] tenemos $\frac{N}{R^2} \leq \pi$ y deducimos que $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{N}{R^2} = \pi$ [2]

Para corroborar que [2] se cumplía, construimos la siguiente gráfica:



GRÁFICA 2.- Representa la tendencia de la expresión [2] hacia π cuando $R \rightarrow \infty$.

Por otra parte tratamos de encontrar la relación entre el área del círculo y el n° de cuadraditos llevando a cabo el cociente (C) entre éstos:

$$C = \frac{\text{área Círculo}}{n^\circ \text{ cuadraditos}} = \frac{\pi \cdot R^2}{N} \quad [3]$$

Como anteriormente observamos en el infinito N tiende a $\pi \cdot R^2$ y podemos definir un radio R_1 que corresponde al Radio del Círculo cuya Área es igual al Número de Cuadraditos.

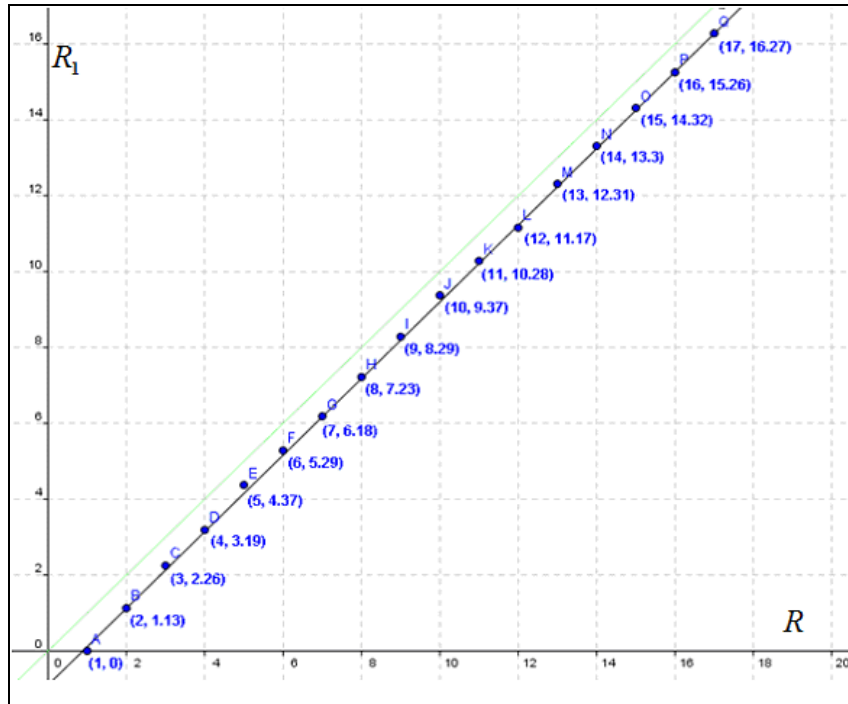
Así, si N se corresponde con el área de una circunferencia de radio R_1 , tenemos:

“CUADRICULANDO CÍRCULOS” – Unos matemáticos muy matemáticos

$$C = \frac{\text{áreaCírculo}}{n^{\circ} \text{cuadrados}} = \frac{\pi \cdot R^2}{N} = \frac{\pi \cdot R^2}{\pi \cdot R_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2} \Rightarrow R_1 = \sqrt{\frac{R^2}{C}} = \sqrt{\frac{R^2}{\frac{\pi \cdot R^2}{N}}} = \sqrt{\frac{N}{\pi}}$$

$$\text{Queda: } R_1 = \sqrt{\frac{N}{\pi}} \approx R \quad [4]$$

Tras obtener tal resultado, calculamos R_1 , que corresponde al Radio del Círculo cuya Área es igual al Número de Cuadrados obtenido en los círculos iniciales (RCANC). Tras calcularlo obtuvimos la siguiente gráfica:



GRÁFICA 3.- Representa el radio (R_1) de un círculo cuya área corresponde a los cuadrados englobados en una circunferencia de radio entero (R).

A partir de la gráfica 3 podemos hallar la recta aproximada que contiene estos puntos, calculando la diferencia entre los valores del radio de los círculos iniciales y los nuevos radios, es decir, $R - R_1$, donde R es el radio real y R_1 es RCANC:

Radio real	RCANC	Diferencia
1	0,5641896	0,4358104
2	1,1283792	0,8716208
3	2,2567583	0,7432417
4	3,1915382	0,8084618
5	4,3701937	0,6298063
6	5,2925674	0,7074326
7	6,1803872	0,8196128
8	7,2251520	0,7748480
9	8,2918596	0,7081404
10	9,3730213	0,6269787
11	10,2800235	0,7199765
12	11,1703839	0,8296161
13	12,3091635	0,6908365
14	13,3033942	0,6966058
15	14,3175266	0,6824734
16	15,2644304	0,7355696
17	16,2737158	0,7262842
18	17,2608822	0,7391178
19	18,2992350	0,7007650
20	19,3476724	0,6523276

Calculando la media de las diferencias obtenemos el punto en el que la recta corta al eje de abscisas. (0,7149763,0)

Sabiendo que la recta de la gráfica anterior tiene una pendiente igual a 1 ($m = 1$), calculamos la función que pasa por esos puntos por medio de la ecuación punto pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

que en nuestro caso corresponde a $R_1 - y_1 = m(R - x_1)$; de esta manera sustituimos valores $y_1 = 0$; $m = 1$; $x_1 = 0.7149763$ y obtenemos

$$R_1 = R - 0.7149763$$

A continuación sustituimos R_1 en la fórmula [4], quedando lo siguiente:

$$\sqrt{\frac{N}{\pi}} = R - 0.7149763$$

Despejando N resulta la fórmula aproximada para el número de cuadraditos que buscábamos. Así, procedemos a despejar N :

$$\begin{aligned} \frac{N}{\pi} &= (R - 0.7149763)^2; N = \pi(R - 0.7149763)^2; N = \pi(R^2 - 1.4299526 \cdot R + 0.5111911); \\ N &= \pi \cdot R^2 - \pi \cdot 1.4299526 \cdot R + 0.5111911 \cdot \pi \end{aligned} \quad [5]$$

La expresión [5] no cumple la condición de solución entera que necesitamos para calcular los cuadrados unidad que caben de forma completa dentro de un círculo, así que abandonamos esta línea de investigación para continuar por un camino totalmente distinto.

3.1.2. Por fin la solución del caso bidimensional

Siguiendo con nuestra investigación, y tras una clase sobre la interpretación de las integrales como área, aplicamos esos conocimientos a nuestro problema, aunque en este caso no utilizamos diferenciales, sino columnas de base 1 unidad. De esta manera, pudimos obtener lo siguiente:

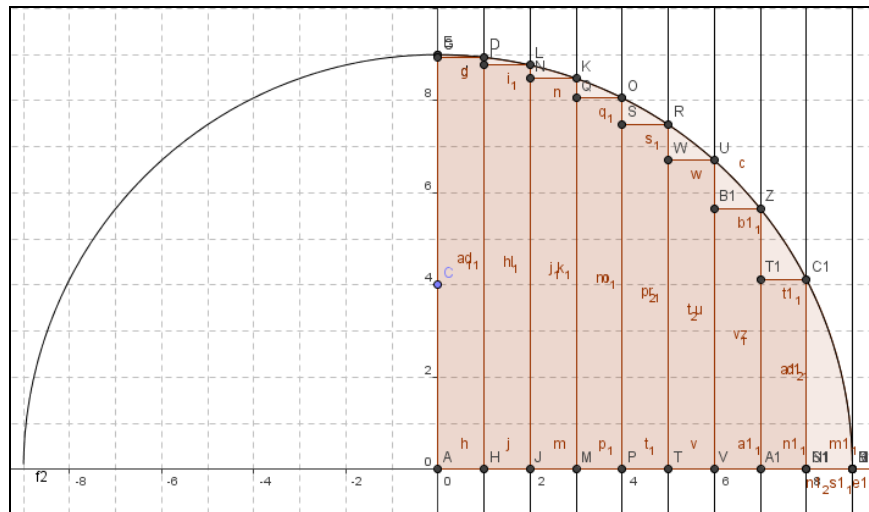


FIGURA 2.- Con ella, observamos las columnas que contienen el número de cuadraditos que buscamos.

Para la construcción de esta figura utilizamos la ecuación explícita de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = R^2 ; y = \pm \sqrt{R^2 - x^2} \quad [6]$$

Como se observa en la FIGURA 2, a medida que el radio se hace mayor, el número de columnas que contienen el número de cuadraditos enteros se hace mayor en una relación de R-1, es decir, todas las x enteras hasta R-1 forman x columnas que contienen el número de cuadraditos que conforman ese cuadrante, aunque con un valor decimal que hay que eliminar. Por lo tanto los valores de x van de 0=R-R hasta R-1:

$$x \in [0, R-1] \Rightarrow x \in [R-R, R-1] \quad [7]$$

Vamos a sustituir x por R-P₁ en la expresión [6], donde P₁ es un parámetro que varía desde P₁ = R hasta P₁ = 1. Esto nos permitirá hallar la fórmula general:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{R^2 - (R - P_1)^2} \\ y &= \sqrt{R^2 - R^2 + 2RP_1 - P_1^2} \\ y &= \sqrt{2RP_1 - P_1^2} \end{aligned}$$

De aquí podemos establecer la fórmula general:

$$y = \sqrt{2P_1R - P_1^2} \quad [8]$$

Aún así, los resultados que obtenemos al sustituir P₁ por los valor que van desde R a 1 no son exactos (no son apropiados para nuestra solución), sino que debemos truncar el resultado y mantener el número entero.

Para obtener el número exacto de cuadraditos del cuadrante, debemos sumar los valores enteros obtenidos de las fórmulas [8] particulares de cada P₁ y después multiplicarlo por cuatro para obtener el número de cuadraditos del círculo entero. De esta manera nos queda lo siguiente:

$$N = 4 \left[\sum_{P_1=1}^{R-1} E(\sqrt{2P_1R - P_1^2}) \right] \quad [9]$$

En esta fórmula, nuestro profesor nos aconsejó situar una E que simboliza que estamos calculando la parte entera. De esta manera, conseguimos señalar que truncamos los valores decimales. Para comprobarla, podemos observar el siguiente ejemplo:

En la expresión [9] llamaremos $f(P_1) = \sqrt{2P_1R - P_1^2}$

Radio 8 [donde P₁ = (1,7)]

$$f(1) = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 8 - 1^2} = \sqrt{15} = 3,87 \rightarrow 3$$

$$f(2) = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 8 - 2^2} = \sqrt{28} = 5,29 \rightarrow 5$$

$$f(3) = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 8 - 3^2} = \sqrt{39} = 6,24 \rightarrow 6$$

$$f(4) = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 8 - 4^2} = \sqrt{48} = 6,92 \rightarrow 6$$

$$f(5) = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 8 - 5^2} = \sqrt{55} = 7,41 \rightarrow 7$$

$$f(6) = \sqrt{2 \cdot 6 \cdot 8 - 6^2} = \sqrt{60} = 7,74 \rightarrow 7$$

$$f(7) = \sqrt{2 \cdot 7 \cdot 8 - 7^2} = \sqrt{63} = 7,93 \rightarrow 7$$

La suma de las partes enteras es: $3 + 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 7 = 41$. Como este resultado corresponde al número de cuadraditos de un cuadrante, es necesario multiplicarlo por 4: **$41 \cdot 4 = 164$**

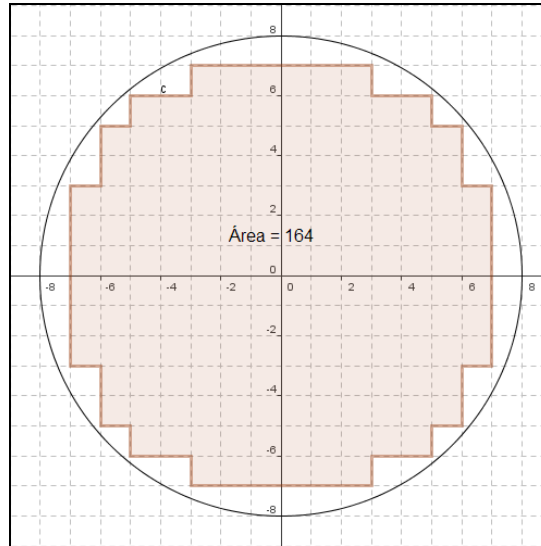


FIGURA 3.- Es un ejemplo que demuestra de una forma experimental que nuestra fórmula es capaz de hallar el número exacto de cuadraditos.

3.1.3. Caso de tres dimensiones

Tras obtener la fórmula [9] que nos permitía averiguar el número de cuadraditos que entraban en una circunferencia (2 dimensiones, 2D), nuestro profesor nos animó a obtener otra para cubos y esferas (3 dimensiones, 3D) y, así, llegar a generalizar el problema para n dimensiones. En primer lugar, buscamos la fórmula de la esfera en Internet:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad [10]$$

Así, comenzamos como en el caso bidimensional. Al igual que en éste hubo que sustituir x por un parámetro $(R-P_1)$, supusimos que al despejar z (igualmente podríamos haber despejado x o y), x e y se podrían sustituir por otros parámetros, que pueden ser iguales o distintos entre ellos. De esta manera, sustituimos x por $(R-P_1)$ e y por $(R-P_2)$ y desarrollamos:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}; z = \sqrt{R^2 - (R-P_1)^2 - (R-P_2)^2}$$

$$z = \sqrt{R^2 - R^2 + 2RP_1 - P_1^2 - R^2 + 2RP_2 - P_2^2}$$

$$z = \sqrt{2R(P_1 + P_2) - (R^2 + P_1^2 + P_2^2)}$$

Por tanto, obtenemos como solución la fórmula:

$$z = \sqrt{2R(P_1 + P_2) - (R^2 + P_1^2 + P_2^2)} \quad [11]$$

Entonces, construimos un octante de esfera para introducir los cubos ordenados y, así, poder comprender qué significan P_1 y P_2 y qué valores toman. Como propuesta del profesor y tras haber averiguado experimentalmente el número de cubos que entraban, realizamos unas imágenes que indicaban el número de cubos por columna, representadas por cuadrados cada columna y con el número de cubos en el interior:

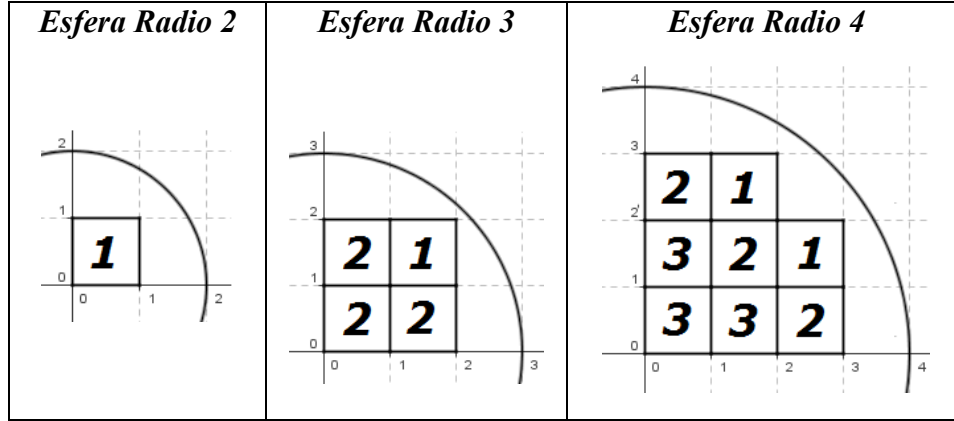


FIGURA 4.- Cubos unidad que caben en una esfera de radio R unidades. Cada columna está simbolizada con un cuadrado dentro del que se escribe el número de cubo apilados.

A partir de aquí, comprendimos que al sustituir x por $(R - P_1)$, lo que hacíamos era indicar las coordenadas de cada columna en el eje X , e igual, al sustituir y por $(R - P_2)$, indicábamos las coordenadas en el eje Y . Entonces, el resultado de z obtenido nos indica el punto de corte entre las coordenadas x e y , dadas por los parámetros, y la superficie de la esfera. De ahí, que sea necesario eliminar la parte decimal del resultado obtenido para hallar el número de cubos.

De esta manera, sería necesario multiplicar el número de cubos en cada octante por 8, obteniendo como fórmula general la siguiente:

$$N = 8 \left[\sum_{P_1, P_2=1}^{R-1} E \left(\sqrt{2R(P_1 + P_2) - (R^2 + P_1^2 + P_2^2)} \right) \right] \quad [12]$$

donde E es la función “parte entera”, R es el radio de la esfera y P_1 y P_2 son parámetros que varían de 1 a $R - 1$.

3.1.4. Generalizando a dimensiones superiores

Observando, las fórmulas de 2D y 3D, pudimos hallar, antes de encontrar una fórmula que generalizara todo, la fórmula referente a 4D. Sin embargo, no es posible demostrarla experimentalmente, ya que es imposible representar la cuarta dimensión, sólo su proyección en 3D o 2D, lo que sería demasiado complicado. De esta manera, comenzamos igual que en 2D y 3D, dedujimos la fórmula de lo que sería una hipersfera. Así, tenemos lo siguiente:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2 \quad [13]$$

Despejamos w y sustituimos y , x y z , por los parámetros $(R - P_1)$, $(R - P_2)$, $(R - P_3)$, respectivamente. Finalmente, resultó la siguiente expresión:

$$w = \sqrt{R^2 - (R - P_1)^2 - (R - P_2)^2 - (R - P_3)^2}$$

$$w = \sqrt{2R(P_1 + P_2 + P_3) - (2R^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)}$$

Así, a partir de las fórmulas obtenidas en 2D, 3D y 4D, determinamos una fórmula para n dimensiones:

$$2D: y = \sqrt{2RP_1 - P_1^2} \quad [14]$$

$$3D: z = \sqrt{2R(P_1 + P_2) - (R^2 + P_1^2 + P_2^2)} \quad [15]$$

$$4D: w = \sqrt{2R(P_1 + P_2 + P_3) - (2R^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)} \quad [16]$$

...

$$nD: c = \sqrt{2R\left(\sum_{i=1}^{n-1} P_i\right) - ((n-2)R^2 + \sum_{i=1}^{n-1} P_i^2)} \quad [17]$$

De esta manera, hemos obtenido una fórmula que es capaz de hallar el número de *cuadrados* de cada columna n-dimensional y en la que n corresponde a la dimensión.

Partiendo de esta fórmula, conseguimos otra que era capaz de hallar el número de *unidades* (cuadrados, cubos, hipercubos...) que entran en un *recinto* (circunferencias, esferas, hiperesferas...). Procederemos a explicarlo en dos pasos:

1.- Debemos hallar el sumatorio de las partes enteras de cada una de las soluciones dadas por las fórmulas [17] al sustituir los parámetros para obtener el número de *unidades* que entran en un cuadrante, octante, etc.

2.- Además, como podemos observar en las fórmulas [9] y [12], el resultado de los sumatorios de las fórmulas [14], [15] y [16] debe ser multiplicado por 4 (2^2) en el caso de 2D, por 8 (2^3) en el de 3D, deducimos que por 16 (2^4) el de 4D y, por tanto, multiplicado por 2^n (donde n es la dimensión) en el de nD.

$$2D: N = 4 \left[\sum_{P_1=1}^{R-1} E(\sqrt{2P_1R - P_1^2}) \right]$$

$$3D: N = 8 \left[\sum_{P_1, P_2=1}^{R-1} E\left(\sqrt{2R(P_1 + P_2) - (R^2 + P_1^2 + P_2^2)}\right) \right]$$

$$4D: N = 16 \left[\sum_{P_1, P_2, P_3=1}^{R-1} E\left(\sqrt{2R(P_1 + P_2 + P_3) - (2R^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)}\right) \right]$$

...

$$nD: N = 2^n \left[\sum_{P_i=1}^{R-1} E\left(\sqrt{2R\left(\sum_{i=1}^{n-1} P_i\right) - ((n-2)R^2 - \sum_{i=1}^{n-1} P_i^2)}\right) \right] \quad [18]$$

Donde:

N es el número de unidades (Cuadrados, cubos, hipercubos) ordenadas que entran en un recinto. (circunferencias, esferas, hiperesferas...).

n es la dimensión del espacio en cuestión.

P_i es el número de parámetros necesarios según la dimensión, y correspondientes al número de la dimensión que tratemos menos 1 (n-1).

E es la función parte entera.

R es el radio del *recinto* (circunferencias, esferas, hiperesferas...)

3.2. INVESTIGANDO CON UNIDADES DESORDENADAS RESPECTO A LOS EJES CARTESIANOS

3.2.1. Un primer intento del caso desordenado en dos dimensiones

Tras haber obtenido esta solución nuestro profesor nos propuso hallar una fórmula general que encontrase el número máximo de cuadraditos que pueden entrar en un círculo. Esto significa que introducimos la complicación de que los cuadrados interiores al círculo no tienen porqué estar estrictamente ordenados conforme los ejes cartesianos; en cambio, podían situarse ligeramente desplazados unos respecto a otros, intentando ocupar el máximo espacio posible.

Para abordar tal problema, comenzamos aplicando la misma fórmula que dio lugar a la solución del apartado anterior, aunque señalando que el centro del círculo a tratar esta situado al azar en el plano de coordenadas. Esta fórmula es la siguiente:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Despejando y sustituyendo x por (R - 1), obtenemos lo siguiente:

$$y = \sqrt{-2R - 1 - 2Rx_0 - 2x_0 + x_0^2 + y_0}$$

Como veíamos que aquellas operaciones no nos iban a llevar a ningún resultado elegante, decidimos dejarlo de lado y continuar por un camino totalmente distinto.

Este camino consistía en cuadrar los círculos, es decir, calcular un cuadrado que tuviera un área igual al del círculo dado. De esta manera, pretendíamos obtener igualmente el mismo número de cuadrados enteros, pero de una forma más sencilla, ya que los lados del cuadrado no son circulares, obviamente. Para calcular dicho cuadrado debíamos hallar su lado. Para ello partimos del radio del círculo. Comenzamos igualando el área del cuadrado (l^2) al área del círculo (πR^2):

$$l^2 = \pi R^2 \Rightarrow l = R\sqrt{\pi} \quad [19]$$

A continuación, sustituimos los valores en la fórmula [19] y después truncamos la parte decimal porque buscamos únicamente resultados enteros para obtener el número de cuadraditos unidad:

$$R = 1 \Rightarrow l = 1\sqrt{\pi} = 1,77... \rightarrow 1$$

$$R = 2 \Rightarrow l = 2\sqrt{\pi} = 3,54... \rightarrow 3$$

$$R = 3 \Rightarrow l = 3\sqrt{\pi} = 5,31... \rightarrow 5$$

$$R = 4 \Rightarrow l = 4\sqrt{\pi} = 7,08... \rightarrow 7$$

$$R = 5 \Rightarrow l = 5\sqrt{\pi} = 8,86... \rightarrow 8$$

Según los datos obtenidos, el número de cuadrados unidad que entra en cada cuadrado, y pensamos que también en cada círculo, es el siguiente:

$$R = 1; l = 1 \rightarrow l^2 = 1^2 = 1 \text{ cuadradito unidad}$$

$$R = 2; l = 3 \rightarrow l^2 = 3^2 = 9 \text{ cuadraditos unidad}$$

$$R = 3; l = 5 \rightarrow l^2 = 5^2 = 25 \text{ cuadraditos unidad}$$

$$R = 4; l = 7 \rightarrow l^2 = 7^2 = 49 \text{ cuadraditos unidad}$$

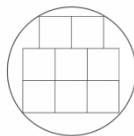
$$R = 5; l = 8 \rightarrow l^2 = 8^2 = 64 \text{ cuadraditos unidad}$$

Para comprobar si estos datos se cumplían experimentalmente, pasamos a realizar los siguientes círculos:

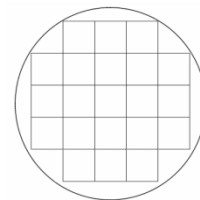
Radio 1 $\rightarrow$ 1 cuadradito



Radio 2 $\rightarrow$ 8 cuadraditos



Radio 3 $\rightarrow$ 21 cuadraditos



Radio 4 → 40 cuadraditos

Radio 5 → 65 cuadraditos

Radio 6 → 96 cuadraditos

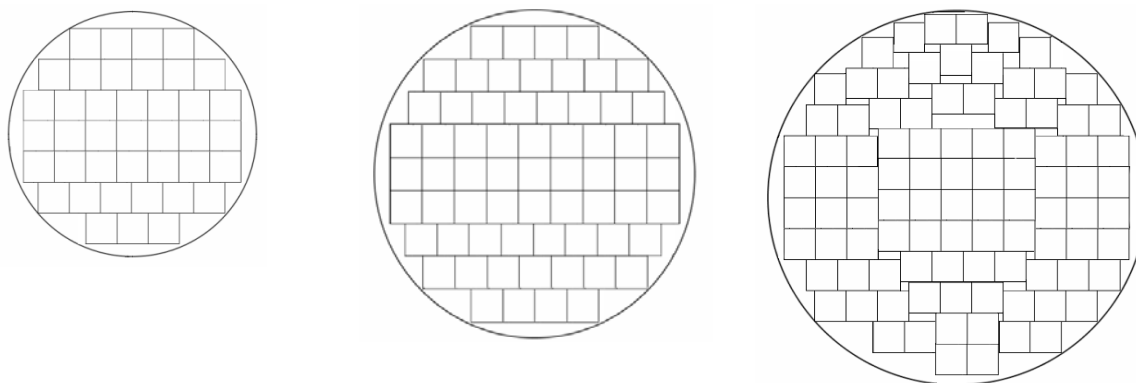


FIGURA 5.- Cuadrados unidad que caben en una circunferencia de radio R unidades considerando que no tienen porqué estar ordenados con respecto a los ejes coordenados.

Con estos ejemplos comprendemos que es falsa la premisa de la que partimos, por lo que, a partir de los datos obtenidos tratamos de confeccionar una nueva ecuación.

3.2.2. Solución del caso desordenado en dos dimensiones

Vamos a observar las relaciones entre la serie de números obtenida en la gráfica 5 de forma experimental.

RADIO 1	RADIO 2	RADIO 3	RADIO 4	RADIO 5	RADIO 6
1	8	21	40	65	96

SERIE 1: Corresponde a la relación entre el número máximo de cuadrados y el radio de la circunferencia.

En esta tabla apreciamos unas relaciones que es necesario destacar y que nos ayudarán a conseguir una fórmula general:

- Primera relación:

RADIO 1	RADIO 2	RADIO 3	RADIO 4	RADIO 5	RADIO 6
$1 = 1 \cdot 1$	$8 = 2 \cdot 4$	$21 = 3 \cdot 7$	$40 = 4 \cdot 10$	$65 = 5 \cdot 13$	$96 = 6 \cdot 16$

TABLA 2.- Buscando regularidades en la serie 1

En la tabla 2 observamos que el radio está multiplicado por la siguiente serie de números: 1, 4, 7, 10, 13, 16... Para averiguar la relación entre ellos, intentaremos sacar una fórmula.

1	4	7	10	13	16
	+3	+3	+3	+3	+3

TABLA 3.- Los factores que multiplican al radio en la serie 1 forman una sucesión aritmética

Hemos obtenido una sucesión aritmética que podemos averiguar mediante su fórmula general. Así, el término general es $a_R = a_1 + (R-1)d$; donde a_1 es el primer término de la sucesión, R es el radio y d es la diferencia entre los términos.

$$\text{Obtenemos: } a_R = 1 + 3(R-1) = 3R - 2$$

Ahora volvemos a la tabla 2, donde habíamos visto que los factores de la tabla 3 estaban multiplicados por el radio. Así, la fórmula de la SERIE 1 será:

$$M = R(3R - 2) = 3R^2 - 2R \quad [20]$$

donde M es el número máximo de cuadrados unidad y R el radio del círculo.

- Segunda relación:

RADIO 1	RADIO 2	RADIO 3	RADIO 4	RADIO 5	RADIO 6
$1 = 1^2 - 0^2$	$8 = 3^2 - 1^2$	$21 = 5^2 - 2^2$	$40 = 7^2 - 3^2$	$65 = 9^2 - 4^2$	$96 = 11^2 - 5^2$

TABLA 4.- Otra forma de expresar la serie 1

En la tabla 4 observamos que existen dos sucesiones diferentes cuyos términos al cuadrado se restan entre sí:

a) Primera sucesión: 1, 3, 5, 7, 9, 11... Se puede advertir que son números impares consecutivos lo que nos facilita la labor, ya que su fórmula será: $2R - 1$.

b) Segunda sucesión: 0, 1, 2, 3, 4... Los números de la serie se obtienen al restar 1 al radio: $R - 1$.

Por tanto, obtenemos una fórmula para la segunda relación: $(2R - 1)^2 - (R - 1)^2$

Al desarrollar obtenemos la fórmula [20], como era de esperar.

Concluimos así que la fórmula para obtener el número (M) máximo de cuadraditos unidad que entran de forma desordenada en un círculo de radio R es:

$$M = 3R^2 - 2R \quad [20]$$

3.2.3. Planteando el caso de tres dimensiones

Al igual que con los cuadraditos ordenados, procedemos a buscar fórmulas para la tercera dimensión y, así, intentar generalizar para n dimensiones. Utilizando un programa de diseño 3D obtenemos los siguientes datos experimentales, aunque no podemos asegurar que sean el número exacto de cubos, pues con tres dimensiones se complica mucho la labor.

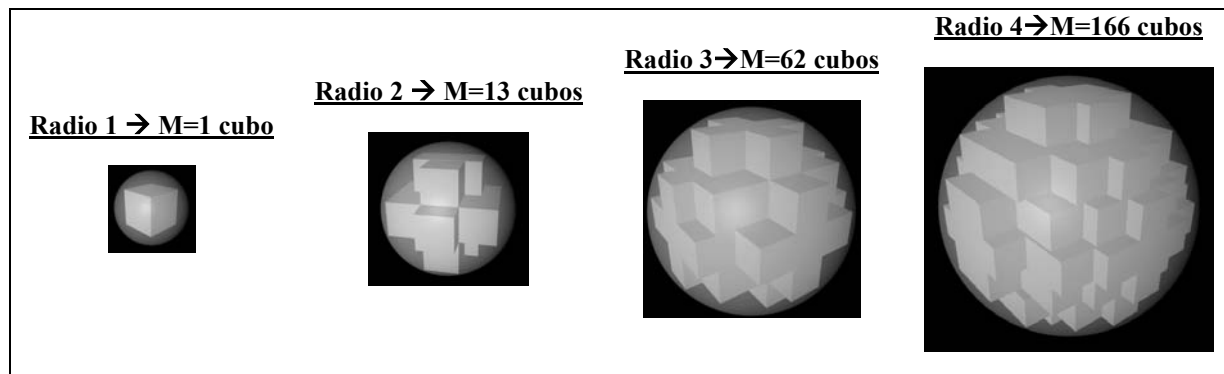


FIGURA 6.- Cubos unidad que caben en una circunferencia de radio R unidades considerando que no tienen que estar ordenados con respecto a los ejes coordenados.

Después de tratar de relacionar todos los valores de la serie obtenida experimentalmente, no llegamos a ningún resultado. Por ello vamos a tratar de encontrar una generalización de las expresiones para las diferentes dimensiones, empezando por el caso unidimensional.

3.2.4. Buscando una estructura para la expresión n-dimensional (nD)

En el caso unidimensional tendremos una recta de una longitud R donde cabrán R *unidades* de forma exacta. Por lo tanto, la fórmula para el número (M) máximo de *cuadrados* 1D será la siguiente:

$$M = R \quad [21]$$

Al relacionar las estructuras de las fórmulas [20] y [21] podemos postular la estructura para 3D y de ahí, para n-dimensiones.

$$1D: M = R \quad [21] \quad (\text{para 1D la variable R aparece elevada a 1})$$

$$2D: M = 3R^2 - 2R \quad [20] \quad \text{donde M es el número máximo de cuadrados unidad (para 2D aparece la suma de } R^2 \text{ y R multiplicadas por 3 y -2, respectivamente)}$$

$$3D: M = x_1R^3 + x_2R^2 + x_3R \quad [22] \quad \text{donde M es el número máximo de cubos unidad (suponemos que para 3D aparecerá una suma de } R^3, R^2 \text{ y R, multiplicadas por } x_1, x_2 \text{ y } x_3 \text{ que desconocemos)}$$

...

...

$$nD: M = x_1R^n + x_2R^{(n-1)} + \dots + x_{(n-1)}R^2 + x_nR \quad [23] \quad \text{donde M es el número máximo de unidades de recubrimiento nDimensionales (ésta será la estructura general que obtendríamos. Los términos que componen la fórmula [23] corresponden a lo siguiente: M = número de } \textit{elementos unidad del recubrimiento}; x_i = \text{incógnitas que más tarde explicaremos cómo obtener; R = el radio; n = dimensión)}$$

3.2.5. Utilizando matrices

Para la obtención de las incógnitas x_i podemos utilizar matrices, ya que en cada una de las fórmulas [21] a [23] tenemos incógnitas que podemos situar en las filas de una matriz sustituyendo R y M por los valores correspondientes a cada *recinto* y distintos en cada fila al

variar R . Esto significa que para hallar x_i debemos conocer el número de *unidades* de $(i-1)$ *recintos*, ya que la matriz, la primera fila (donde $R = 1$) contiene únicamente el número 1, puesto que cualquier *recinto* de $R = 1$ contiene 1 *unidad*. La columna de la matriz ampliada contendrá el número de *unidades* pertenecientes al radio propio de cada fila de la matriz.

Para comprobar la eficacia de este método y poner un ejemplo vamos a aplicarlo a los casos 1D y 2D:

3.2.5.1. Caso unidimensional

Como $n = 1$ obtenemos una única ecuación:

$$x_1 R_1 = M_1 \quad [24]$$

donde $R_1 = 1$ y $M_1 = 1$ (si es radio es 1, el número M máximo de unidades de recubrimiento es 1), por lo que $x_1 = 1$, que se correspondería con la matriz del *sistema*:

$$(1 \ 1) \rightarrow x_1 = 1$$

Por tanto, la solución general del sistema [24] es la ecuación [21] $\mathbf{R} = \mathbf{M}$, como ya sabíamos.

3.2.5.2. Caso bidimensional

Como $n = 2$, obtenemos un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 R_1^2 + x_2 R_1 = M_1 \\ x_1 R_2^2 + x_2 R_2 = M_2 \end{cases} \quad [25]$$

Utilizamos la circunferencia de $R_1 = 1$ cuya $M_1 = 1$ (si es radio es 1 únicamente cabe un cuadrado unidad, es decir $M=1$), además de la circunferencia de $R_2 = 2$ y cuya $M_2 = 8$ (en una circunferencia de radio 2 caben 8 cuadrados unidad, por lo que $M=8$).

Así escribimos la siguiente matriz del sistema [25]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{2^a - 4 \cdot 1^a} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema [25] es la ecuación [20] $3\mathbf{R}^2 - 2\mathbf{R} = \mathbf{M}$, que ya conocíamos.

3.2.5.3. Caso tridimensional

Tras comprobar que nuestro método funcionaba, lo utilizamos para 3D, del cual conocemos varios casos de manera experimental. Veamos, como $n = 3$, escribimos un sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 R_1^3 + x_2 R_1^2 + x_3 R_1 = M_1 \\ x_1 R_2^3 + x_2 R_2^2 + x_3 R_2 = M_2 \\ x_1 R_3^3 + x_2 R_3^2 + x_3 R_3 = M_3 \end{cases} \quad [26]$$

Utilizamos la circunferencia de $R_1 = 1$ cuya M_1 es 1 (en una esfera de radio 1 cabe un cubo unidad, por lo que M_1 es 1); la circunferencia de $R_2 = 2$ cuya $M_2 = 13$ (en una esfera de radio 2 caben 13 cubos unidad, por lo que M_2 es 13) y la circunferencia de $R_3 = 3$ y cuya $M_3 = 62$ (en una esfera de radio 3 caben 62 cubos unidad, por lo que M_3 es 62).

Así, obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 13 \\ 27 & 9 & 3 & 62 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3^a - 27 \cdot 1^a \\ 2^a - 8 \cdot 1^a}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 5 \\ 0 & -18 & -24 & 35 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot 3^a - 9 \cdot 2^a} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13}{3} \\ x_2 = -\frac{15}{2} \\ x_3 = \frac{25}{6} \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema [26] será la ecuación [22] una vez sustituidos x_1 , x_2 y x_3 :

$$\frac{13}{3} R^3 - \frac{15}{2} R^2 + \frac{25}{6} R = M \quad [27]$$

Ahora pasaremos a comprobar si la ecuación [27] nos devuelve los mismos valores que los obtenidos experimentalmente por nosotros:

Esfera $R=1$: experimentalmente el número de cubos es 1. Aplicamos la ecuación [27].

$$\frac{13}{3} R^3 - \frac{15}{2} R^2 + \frac{25}{6} R = \frac{13}{3} \cdot 1^3 - \frac{15}{2} \cdot 1^2 + \frac{25}{6} \cdot 1 = M = 1$$

Esfera $R=2$: experimentalmente el número de cubos es 13. Aplicamos la ecuación [27].

$$\frac{13}{3} R^3 - \frac{15}{2} R^2 + \frac{25}{6} R = \frac{13}{3} \cdot 2^3 - \frac{15}{2} \cdot 2^2 + \frac{25}{6} \cdot 2 = M = 13$$

Esfera $R=3$: experimentalmente el número de cubos es 61. Aplicamos la ecuación [27].

$$\frac{13}{3} R^3 - \frac{15}{2} R^2 + \frac{25}{6} R = \frac{13}{3} \cdot 3^3 - \frac{15}{2} \cdot 3^2 + \frac{25}{6} \cdot 3 = M = 62$$

Esfera $R = 4$: experimentalmente el número de cubos es 166, valor que no hemos utilizado para construir la matriz y con el que, por tanto, no tiene porque cumplirse la igualdad. Aplicamos la ecuación [27].

$$\frac{13}{3} R^3 - \frac{15}{2} R^2 + \frac{25}{6} R = \frac{13}{3} \cdot 4^3 - \frac{15}{2} \cdot 4^2 + \frac{25}{6} \cdot 4 = M = 174$$

Al obtener 174 cubos y compararlo con nuestro resultado experimental de 166, nos percatamos de que no se cumple la ecuación y que nuestros cálculos experimentales son fallidos.

3.2.5.4. Conjeturando una solución

Tras observar nuestro intento fallido, comprendimos que quizás cupieran más cubos de los hallados por nosotros. En el hipotético caso de que en las esferas de radios 2 y 3, utilizadas para construir el sistema, entrara un cubo más en cada una (algo que es muy probable), quedarían 14 cubos en la esfera de radio 2 y 63 en la de radio 3. De esta manera obtendríamos una fórmula para el caso tridimensional con características en común con las fórmulas de 1D y 2D, que sería la siguiente:

Como $n = 3$ (caso tridimensional), escribimos el sistema de tres ecuaciones [26]:

$$\begin{cases} x_1 R_1^3 + x_2 R_1^2 + x_3 R_1 = M_1 \\ x_1 R_2^3 + x_2 R_2^2 + x_3 R_2 = M_2 \\ x_1 R_3^3 + x_2 R_3^2 + x_3 R_3 = M_3 \end{cases}$$

Utilizamos la circunferencia de $R_1 = 1$ cuya $M_1 = 1$, la circunferencia de $R_2 = 2$ cuya $M_2 = 14$ y la circunferencia de $R_3 = 3$ y cuya $M_3 = 63$ (los M_i indican el número de cubos unidad que caben en la esfera de radio R_i).

Así, obtenemos la siguiente matriz del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 14 \\ 27 & 9 & 3 & 63 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 3^a-27 \cdot 1^a \\ 2^a-8 \cdot 1^a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 6 \\ 0 & -18 & -24 & 36 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot 3^a - 9 \cdot 2^a} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot 3^a - 9 \cdot 2^a} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Por tanto, tras sustituir x_1 , x_2 y x_3 obtenemos la expresión:

$$4R^3 - 6R^2 + 3R = M \quad [28]$$

Como podemos observar en la fórmula [28], x_1 , x_2 y x_3 son números enteros, lo que facilita el trabajo y, además, aporta rasgos en común con las fórmulas de 1D y 2D, [21] y [20] respectivamente.

$$1D: \quad M = R \quad [21]$$

$$2D: \quad M = 3R^2 - 2R \quad [20]$$

$$3D: \quad M = 4R^3 - 6R^2 + 3R \quad [28]$$

$$4D: \quad M = 5R^4 + K_1 R^3 + K_2 R^2 + 4R \quad [29]$$

Tal y como se aprecia las fórmulas halladas presentan las siguientes propiedades:

- 1) El grado de la función corresponde a n , donde n es la dimensión.

- 2) El término que multiplica a R^n es igual a $(n + 1)$.
- 3) El término que multiplica a R es igual a n .
- 4) La suma de todos los coeficientes (con su signo) que multiplican a las variables es 1.
- 5) Debido a que, según la propiedad 4, todos los términos deben sumar 1, nos resta la siguiente ecuación: $(n + 1) + K + n = 2n + 1 + K$. Por tanto, para que el resultado sea 1, K ($K_1 + K_2 + \dots + K_{(n-2)}$) debe ser $-2n$, es decir, los términos que aparecen entre R^n y R deben sumar $-2n$.

3.2.6. Generalizando a dimensiones superiores

Según nuestro método de obtención de fórmulas mediante matrices conjeturamos que para nD podemos expresarlo todo en una matriz como la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^n & \dots & 2^3 & 2^2 & 2^1 & M_1 \\ 3^n & \dots & 3^3 & 3^2 & 3^1 & M_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^n & \dots & n^3 & n^2 & n^1 & M_n \end{pmatrix}$$

donde los M_i indican el número de *elementos unidad* que rellenan de forma desordenada el recinto n -dimensional.

A partir de esta matriz, y teniendo en cuenta las propiedades anteriores, podemos establecer cómo fórmula general para nD la siguiente, a pesar de que existan términos que no podemos hallar ($K_1 + K_2 + \dots + K_{(n-2)}$):

$$nD: M = (n + 1)R^n + K_1 R^{n-1} + K_2 R^{n-2} + \dots + K_{n-3} R^3 + K_{n-2} R^2 + nR = (n + 1)R^n + \sum_{i=1}^{n-2} K_i R^{n-i} + nR$$

[30]

4. CONCLUSIONES

- 1) En el caso de *unidades* ordenadas respecto a los ejes cartesianos, hemos podido determinar una fórmula general con la que obtener el número exacto de *unidades* que entran en un *recinto* en cualquier dimensión, perceptible o no. Esta fórmula es la siguiente:

$$N = 2^n \left[\sum_{P_i=1}^{R-1} E \left(\sqrt{2R \left(\sum_{i=1}^{n-1} P_i \right) - ((n-2)R^2 - \sum_{i=1}^{n-1} P_i^2)} \right) \right]$$

Donde:

N es el número de unidades (Cuadrados, cubos, hipercubos) ordenadas que entran en un recinto. (circunferencias, esferas, hiperesferas...).

n es la dimensión del espacio en cuestión.

P_i es el número de parámetros necesarios según la dimensión, y correspondientes al número de la dimensión que tratemos menos 1 ($n-1$).

E es la función parte entera.

R es el radio del *recinto* (circunferencias, esferas, hiperesferas...)

- 2) En el caso de *unidades* desordenadas respecto a los ejes cartesianos, hemos podido determinar una fórmula general para 2 dimensiones y hemos postulado una fórmula para 3 dimensiones (debido a su complejidad) y hemos generalizado la estructura de las expresiones para n dimensiones.

2D: $3R^2 - 2R = M$ donde R es el radio de la circunferencia y M es el número de cuadrados unidad que caben completamente dentro de ella	3D: $4R^3 - 6R^2 + 3R = M$ (POSTULADO) donde R es el radio de la esfera y M es el número de cuadrados unidad que caben completamente dentro de ella
$nD: M = (n+1)R^n + \sum_{i=1}^{n-2} K_i R^{n-i} + nR$ (GENERALIZACIÓN) donde R es el radio del recinto; M es el número de unidades de recubrimiento que caben completamente dentro del recinto; n es la dimensión y los parámetros K_i son coeficientes a determinar en cada caso	