Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Tercera Edición, 2008/2009

TRABAJO: Ecuaciones y funciones de segundo grado. Propiedades y aplicaciones

FINALISTA EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

- Víctor Ceballos Inza
- Manuel Díaz Martínez

TUTORES:

- Constantino de la Fuente Martínez

CENTRO: ESTAMAT Castilla y León (Burgos)

Ecuaciones y funciones de segundo grado

Propiedades y aplicaciones de la Regla de Hudde

Torbenuel

Χοντενιδο

Ιντροδυχχι ∫ν ψ αντεχεδεντεσ

Este trabajo no surgió como tal desde el principio. Al principio se trataba únicamente de unos “problemillas” interesantes para conocer más a fondo las ecuaciones de segundo grado.

Queríamos averiguar alguna propiedad que se cumpliera en todas ellas y que nos permitiera disminuir la operatoria para hallar sus soluciones, dado que este proceso puede resultar repetitivo y, sobretodo, repetitivo.

Según íbamos averiguando algunas de ellas, se nos ocurrían más posibles opciones por dónde investigar: algunas sugerentes y otras no tanto, algunas con solución y otras con carreteras cerradas al final del recorrido.

Entonces fue cuando nuestro profesor sacó a la luz la Regla de Hudde: la idea clave que nos permitió continuar en nuestra labor. Aquí es cuando empezamos a idear el trabajo a partir de los resultados que teníamos ya averiguados.

La Regla de Hudde nos permitió, a parte de seguir “trasteando” con ecuaciones, ampliar nuestro estudio a las progresiones y funciones. Es, en definitiva, el pilar fundamental que sostiene la sencilla investigación matemática que hemos realizado.

Οβφετιϖοσ

Nuestros propósitos a conseguir fueron surgiendo a la vez que progresaba nuestro estudio. Se resumen esencialmente en:

1. Averiguar útiles propiedades sobre las ecuaciones des segundo grado que facilitaran su resolución a simple vista.
2. Ser capaces de encontrar un método gracias al cual se pueda comprobar cómo serán las soluciones de una ecuación (enteras, decimales…) de un rápido vistazo.
3. Informarnos, un poco, sobre algunos matemáticos importantes de otras épocas y lugares cuyos descubrimientos afectan nuestra vida cotidiana.
4. Demostrar, por nuestra cuenta y usando nuestros propios métodos, la Regla de Hudde aplicada a diferentes tipos de ecuaciones y funciones.
5. Investigar si existe alguna relación entre las ecuaciones / funciones estudiadas en la Regla de Hudde, entre la 'original' y la resultante después del proceso.
6. Representar y estudiar sobre el eje de coordenadas las posiciones de las funciones objeto de nuestro estudio.

Ρεσυλταδοσ

Este es un resumen bastante amplio y con detalle de lo que ha supuesto nuestra investigación sobre ecuaciones y funciones.

1. Propiedades de las ecuaciones de segundo grado:

La idea del trabajo surge conforme estudiamos algunas propiedades de las ecuaciones de segundo grado como ampliación de lo que ya se conoce comúnmente sobre ellas.

1.1. Relación entre las soluciones de las ecuaciones de segundo grado:

En primer lugar optamos por cambiar los coeficientes de la ecuación, y comprobar si existe alguna relación entre las soluciones de la original y de la ya modificada:

1.1.1. Las ecuaciones $ax^2+bx+c=0$ y $cx^2+bx+a=0$

Nos planteamos las soluciones algebraicas de ambas ecuaciones:

I. $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

II. $\boldsymbol{cx^2+bx+a=0}$

$$x'=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ca}}{2c}$$

En una primera observación, nos damos cuenta que, si $\mathbf{a}=\mathbf{c}$, ambas ecuaciones son iguales.

$$ax^2+bx+c=cx^2+bx+a \qquad\qquad ax^2+c=cx^2+a$$

Para abarcar el problema, nos planteamos un ejemplo. Pero para asegurarnos de que no exista ningún inconveniente, preparamos los resultados de la primera ecuación:

$x_1 = 5$; $x_2 = -6$

>> $(x-5)\cdot(x+6) = x^2 + x - 30$

Una vez que tenemos la ecuación preparada, comenzamos propiamente el problema:

I. $\boldsymbol{x^2 + x - 30 = 0}$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-30)}}{2\cdot 1} = 5$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-30)}}{2 * 1} = -6$$

II. $\boldsymbol{-30x^2 + x + 1 = 0}$

$$x'_1 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4\cdot(-30)\cdot 1}}{2\cdot(-30)} = -\frac{1}{6}$$

$$x'_2 = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4\cdot(-30)\cdot 1}}{2\cdot(-30)} = \frac{1}{5}$$

A simple vista comprobamos que las soluciones de la segunda ecuación son las inversas de las de la primera. Enunciamos un teorema que más tarde intentaremos demostrar algebraicamente.

Teorema nº 1:

Las soluciones de:

$ax^2 + bx + c = 0$ ***y*** $cx^2 + bx + a = 0$

son números inversos dos a dos.

Ahora, como posible demostración, se nos ocurre multiplicar las soluciones. Conocemos que el producto de dos números inversos tiene como solución: *1*

De hecho, así lo demuestra la multiplicación de las soluciones de las ecuaciones del ejemplo:

$$x_1 \cdot x'_2 = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1 \qquad x_2 \cdot x'_1 = -6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 1$$

Pasamos a la demostración algebraica:

- $\underline{\boldsymbol{x_1 \cdot x'_2}}$

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ca}}{2c} = \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ca}\right)}{2a \cdot 2c}$$
$$= \frac{b^2+b\sqrt{b^2-4ca}-b\sqrt{b^2-4ac}-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(\sqrt{b^2-4ca}\right)}{4ac}$$
$$= \frac{b^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4ac} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4ac} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4ac} = \frac{4ac}{4ac} = 1$$

- $\underline{\boldsymbol{x_2 \cdot x'_1}}$

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{b^2-4ca}}{2c} = \frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b+\sqrt{b^2-4ca}\right)}{2a \cdot 2c}$$
$$= \frac{b^2-b\sqrt{b^2-4ca}+b\sqrt{b^2-4ac}-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(\sqrt{b^2-4ca}\right)}{4ac}$$
$$= \frac{b^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4ac} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4ac} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4ac} = \frac{4ac}{4ac} = 1$$

Queda demostrado algebraicamente que las soluciones de las ecuaciones:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad\qquad cx^2 + bx + a = 0$$

son inversas dos a dos, es decir, $\mathbf{x_1}$ es inversa a $\mathbf{x'_2}$; y $\mathbf{x_2}$ es inversa a $\mathbf{x'_1}$.

EJEMPLO

Denominación	$x_1 \cdot x'_1$	$x_1 \cdot x'_2$	$x_2 \cdot x'_1$	$x_2 \cdot x'_2$
Ejemplo	$5 \cdot \frac{1}{6}$	$5 \cdot \frac{1}{5}$	$-6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$	$-6 \cdot \frac{1}{5}$

Lógicamente los resultados inversos serán $\mathbf{5}$ respecto a $\mathbf{{}^{1}/_{5}}$ y $\mathbf{-6}$ respecto a $\mathbf{{}^{-1}/_{6}}$.

Otro sistema para intentar encontrar propiedades de las ecuaciones de segundo grado es cambiar los signos de uno o varios de sus coeficientes. En esta “técnica” se basan los dos siguientes casos:

1.1.2. Las ecuaciones $\underline{ax^2 + bx + c = 0}$ y $\underline{ax^2 - bx + c = 0}$

Puesto que en el caso anterior hemos llegado al resultado de una manera sencilla, clara y relativamente rápida, seguimos el mismo proceso:

I. $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

II. $\boldsymbol{ax^2 - bx + c = 0}$

$$x' = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por semejanza a la primera observación, si $\mathrm{b} = 0$, ambas ecuaciones son iguales.

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - bx + c \qquad\qquad ax^2 + c = ax^2 + c$$

En este caso, elegimos las soluciones...

$x_1 = 2$; $x_2 = -3$

>> $(x - 2) \cdot (x + 3) = x^2 + x - 6$

Una vez que tenemos la ecuación preparada, comenzamos propiamente el segundo problema:

I. $\boldsymbol{x^2 + x - 6 = 0}$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 \cdot \mathbf{1} \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = -3$$

II. $\boldsymbol{x^2 - x - 6 = 0}$

$$x'_1 = \frac{1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot \mathbf{1} \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = 3$$

$$x'_2 = \frac{1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = -2$$

Enunciamos de la posible propiedad en forma de teorema fruto de las observaciones a primera vista.

Teorema nº 2:

Las soluciones de:

$ax^2 + bx + c = 0$ ***y*** $ax^2 - bx + c = 0$

son números opuestos dos a dos.

En este caso, como posible demostración, se nos ocurre sumar las soluciones. Conocemos que la suma de dos números opuestos tiene como solución: *0*

De hecho, así lo demuestra la suma de las soluciones de las ecuaciones del ejemplo:

$$x_1 + x'_2 = 2 + (-2) = 0 \qquad\qquad x_2 + x'_1 = -3 + 3 = 0$$

Pasamos a la demostración algebraica:

- $\underline{\boldsymbol{x_1 + x'_2}}$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right) + \left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a}$$
$$= \frac{-b + b + \sqrt{b^2 - 4ac} - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{0}{2a} = 0$$

- $\underline{x_2 + x'_1}$

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)+\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{2a}$$
$$=\frac{-b+b-\sqrt{b^2-4ac}+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{0}{2a}=0$$

Queda demostrado algebraicamente que las soluciones de las ecuaciones:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad\qquad ax^2-bx+c=0$$

son opuestas dos a dos, es decir, $\mathbf{x_1}$ es opuesta a $\mathbf{x'_2}$; y $\mathbf{x_2}$ es opuesta a $\mathbf{x'_1}$.

EJEMPLO

Denominación	$x_1 + x'_1$	$x_1 + x'_2$	$x_2 + x'_1$	$x_2 + x'_2$
Ejemplo	$2+3$	$2+(-2)$	$-3+3$	$-3+(-2)$

Lógicamente los resultados opuestos serán $\mathbf{2}$ respecto a $-\mathbf{2}$ y $-\mathbf{3}$ respecto a $\mathbf{3}$.

1.1.3. Las ecuaciones $\underline{ax^2 + bx + c = 0}$ y $\underline{-ax^2 + bx - c = 0}$

Empezamos este problema de la misma manera que los anteriores, hallando las soluciones algebraicas de las dos ecuaciones:

I. $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

II. $\boldsymbol{-ax^2 + bx - c = 0}$

$$x' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a}$$

En este caso no consideramos necesario seguir el procedimiento anterior porque a simple vista se puede comprobar que las soluciones son opuestas.

Teorema nº 3:

Las soluciones de:

$ax^2 + bx + c = 0$ ***y*** $-ax^2 + bx - c = 0$

son números opuestos dos a dos.

Como hemos dicho anteriormente, la suma de dos números opuestos tiene como solución: *0*

Pasamos a la demostración algebraica:

- $\underline{\boldsymbol{x_1 + x'_1}}$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

- $\underline{x_2 + x'_2}$

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

Queda demostrado algebraicamente que las soluciones de las ecuaciones:

$ax^2 + bx + c = 0$ $\qquad$ $-ax^2 + bx - c = 0$

son opuestas dos a dos, es decir, **x_1** es opuesta a **x'_1** ; y **x_2** es opuesta a **x'_2**.

Así como en casos anteriores las soluciones de las ecuaciones se relacionaban ***x_1*** con ***x'_2***, en este último problema observamos que guardan relación ***x_1*** con ***x'_1*** y ***x_2*** con ***x'_2*** .

Si nos fijamos en las ecuaciones de los epígrafes 1.1.2 y 1.1.3 vemos que la ecuación $ax^2 - bx + c = 0$ es igual a la ecuación $-ax^2 + bx - c = 0$; sin más que cambiar de signo a una de ellas obtenemos la otra, luego tienen la misma solución, y el teorema 2 y el teorema 3 son el mismo.

1.1.4. *Otras cuestiones*

A la vez que descubrimos las propiedades de las ecuaciones de segundo grado anteriores, también probamos con otras posibles combinaciones.

Tras diferentes intentos, no obtuvimos ninguna propiedad, bien porque no existe o bien porque no tenemos los conocimientos necesarios para ello.

Por esto, enunciamos aquí estas combinaciones como una posible guía de trabajo para continuar la investigación por esta rama, aunque la nuestra se centre más adelante en otros aspectos.

a) ¿Qué relación existe entre las soluciones de las ecuaciones:

$ax^2 + bx + c = 0$ *y* $bx^2 + ax + c = 0$ *?*

b) ¿Qué relación existe entre las soluciones de las ecuaciones:

$ax^2 + bx + c = 0$ y $ax^2 + cx + b = 0$?

c) ¿Qué relación existe entre las soluciones de las ecuaciones:

$ax^2 + bx + c = 0$ y $-ax^2 + bx + c = 0$?

d) ¿Qué relación existe entre las soluciones de las ecuaciones:

$ax^2 + bx + c = 0$ y $ax^2 + bx - c = 0$?

1.2. <u>Cálculo de coeficientes que cumplen determinadas propiedades:</u>

Para seguir estudiando las propiedades de las ecuaciones de segundo grado, nos planteamos si podríamos hallar los coeficientes de estas ecuaciones partiendo de cómo queremos que sean las soluciones.

Partimos de un problema concreto que nos plantea el profesor:

1.2.1. Calcular el valor de ***p***, para que las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x = p$ sean números:

a) Enteros.
b) Decimales.

a) <u>Números enteros.</u>

Como se nos pregunta por la solución, el primer paso es despejarla, para saber cual es su valor:

$$x^2 + 3x = p$$
$$x(x + 3) = p$$
$$x + 3 = \frac{p}{x}$$
$$x = \frac{p}{x} - 3$$

Para que la solución sea un nº entero, ***p*** debe ser múltiplo de la propia solución, **x.** Continuamos...

$$x = \frac{p}{x} - 3$$
$$x^2 = p - 3x$$
$$x = \sqrt{p - 3x}$$

Como la expresión de la solución depende de ella misma, llegamos a un punto muerto. Seguimos por otro lado...

$$x^2 + 3x = p$$

$$x^2 + 3x - p = 0$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4p}}{2}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4p}}{2}$$

De esta expresión obtenemos algunas conclusiones:

- $-3 \pm \sqrt{9+4p}$ debe ser un número par, para que al dividirlo entre dos resulte un número entero.
- $\sqrt{9+4p}$ debe ser un número impar, para que al sumarlo a -3 quede un número par.
- Para que $\sqrt{9+4p}$ sea un número entero impar, $9+4p$ debe ser un cuadrado perfecto impar.

Entonces...

Si $\mathbf{9+4p=(2n-1)^2}$; $\mathbf{p=\frac{(2n-1)^2-9}{4}}$

Comprobamos con algunos ejemplos que si $9+4p$ cumple esta condición, los resultados de la ecuación son números enteros, tal y como estamos buscando:

$\sqrt{9+4p}=\sqrt{1}=1$; $x_1=-1$ $x_2=-2$

$\sqrt{9+4p}=\sqrt{9}=3$; $x_1=0$ $x_2=-3$

$\sqrt{9+4p}=\sqrt{25}=5$; $x_1=1$ $x_2=-4$

Enunciamos un posible teorema:

Teorema nº 4:

Para que las soluciones de $x^2+3x=p$ sean números enteros, ***p*** *debe ser de la forma:*

$$p=\frac{(2n-1)^2-9}{4}$$

siendo ***n*** *un número natural.*

Para poder hallar una relación entre los distintos valores que puede tener **_p_**, damos distintos valores a $9+4p$:

Si $9+4p=1$	;	$p=-2$
Si $9+4p=9$	;	$p=0$
Si $9+4p=25$	;	$p=4$
Si $9+4p=49$	;	$p=10$
Si $9+4p=81$	;	$p=18$
Si $9+4p=121$	;	$p=28$
Si $9+4p=144$	;	$p=40$

Los distintos valores de **_p_** forman una sucesión

Los distintos valores que puede adquirir **_p_** forman una sucesión:

$$-2,\quad 0,\quad 4,\quad 10,\quad 18,\quad 28,\quad 40,\ldots$$

Se trata de una sucesión, cuyo primer término es -2 y cuya ley de recurrencia es $S_n = S_{n-1}+2(n-1)$

A partir de una ley de recurrencia, se puede hallar el término general de una sucesión de dos maneras diferentes:

I.

$$\begin{array}{rrcl}
 & S_n & = S_{n-1} & + \ 2(n-1) \\
 & S_{n-1} & = S_{n-2} & + \ 2(n-2) \\
+ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
 & S_3 & = S_2 & + \ 2(2) \\
 & S_2 & = S_1 & + \ 2(1) \\
\hline
 & S_n & = S_1 & + \ 2\left(\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)\right)
\end{array}$$

Como $S_1=-2$; $S_n=n^2-n-2$

II. $$\underbrace{-2,\ 0,\ 4,\ 10,\ 18,\ 28,\ 40,\ \dots}$$
$$\underbrace{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \dots}$$
$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \dots$$

Esto indica que el término general es de 2º grado $\rightarrow$ $S_n = \boldsymbol{an^2 + bn + c}$

$$S_1 = -2 \qquad S_2 = 0 \qquad S_4 = 10$$

$$\left.\begin{aligned} -2 &= a + b + c \\ 0 &= 2^2a + 2b + c \\ 10 &= 4^2a + 4b + c \end{aligned}\right\} \quad a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = -2$$

Entonces... : $\rightarrow$ $\boldsymbol{S_n = n^2 - n - 2}$

Llegados a este punto, y conociendo cuáles pueden ser los valores de ***p***, reformulamos el teorema:

Teorema nº 4:

Para que las soluciones de $x^2 + 3x = p$ *sean números enteros,* ***p*** *debe ser un término de la sucesión definida por:*

$$\boldsymbol{S_n} = n^2 - n - 2$$

siendo ***n*** *un número natural.*

En el otro enunciado del teorema 4 teníamos que

$$p = \frac{(2n-1)^2 - 9}{4}$$

Si hacemos las operaciones, queda:

$$p = \frac{(2n-1)^2 - 9}{4} = \frac{4n^2 - 4n + 1 - 9}{4} = \frac{4n^2 - 4n - 8}{4} = n^2 - n - 2$$

que coincide con la otra que hemos obtenido.

b) <u>Números enteros.</u>

Lógicamente, cuando el valor de ***p*** sea un número que no se encuentra en mencionada sucesión, las soluciones de $x^2 + 3x = p$ serán números decimales [siempre y cuando los valores de ***p*** sean a la vez mayores que $-9/4$].

c) <u>Otras soluciones.</u>

Si los valores de ***p*** fueran menores que $-9/4$, el discriminante de la ecuación [$\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$] tendría un valor negativo; por lo que $x^2 + 3x = p$ no tendría solución real:

- Para que exista una solución real, el discriminante [$\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$] deber ser ≥ 0 :

$$9 + 4p \geq 0$$
$$4p \geq -9$$
$$p \geq -\frac{9}{4}$$

- Para que exista solución real, $p \geq -9/4$.

1.2.2. Generalización del problema:

Una vez que comprobamos que este problema no tiene demasiada dificultad, se nos ocurre generalizarle:

*¿Qué posible relación puede existir entre **b** y **p** para que las soluciones de la ecuación $x^2 + bx = p$ sean números enteros?*

Entonces, enfocamos el problema por el mismo camino:

$$x^2 + bx = p$$

$$x^2 + bx - p = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4p}}{2}$$

Para que las soluciones de esta ecuación sean números enteros, $b^2 + 4p$ debe ser un cuadrado perfecto, al igual que en el problema anterior. A este número le denominamos q^2. Entonces:

$$b^2 + 4p = q^2$$

Al sustituir en la ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4p}}{2} = \frac{-b \pm \sqrt{q^2}}{2} = \frac{-b \pm q}{2}$$

nos damos cuenta de que ***b*** y ***q*** debe tener la misma paridad. Es decir, que para que su suma sea par ambos deben se pares o ambos deben ser impares.

Así que con estos damos empezamos la resolución. Como partimos de una ecuación con tres incógnitas, comenzamos dando valores a ***b*** para observar lo que ocurre con las demás:

Si $b = 1$, y como entonces ***q*** también debe ser impar,

$q = 1$, entonces $p = 0$ y $x_1 = -1$; $x_2 = 0$

$q = 3$, entonces $p = 2$ y $x_1 = -2$; $x_2 = 1$

$q = 5$, entonces $p = 6$ y $x_1 = -3$; $x_2 = 2$

$q = 7$, entonces $p = 12$ y $x_1 = -4$; $x_2 = 3$

Estos valores que adquieren las diferentes incógnitas forman sucesiones, cuyos términos generales averiguamos tras un largo período de observación y operatoria:

$q = 2m - 1$

$p = m^2 - m$

$$x = \left| \begin{array}{l} x_1 = -m \\ x_2 = m - 1 \end{array} \right.$$

Realizamos el mismo proceso dando otros valores a ***b***:

Si $b = 2$, y como entonces ***q*** también debe ser par,

$q = 2$, entonces $p = 0$ y $x_1 = 0$; $x_2 = -2$

$q = 4$, entonces $p = 3$ y $x_1 = 1$; $x_2 = -3$

$q = 6$, entonces $p = 8$ y $x_1 = 2$; $x_2 = -4$

$q = 8$, entonces $p = 15$ y $x_1 = 3$; $x_2 = -5$

De aquí:

$q = 2m$

$p = m^2 - 1$

$$x = \left| \begin{array}{l} x_1 = m - 1 \\ x_2 = -m - 1 \end{array} \right.$$

Si $b = 3$, y como entonces $\boldsymbol{q}$ también debe ser impar,

$q = 1$, entonces $p = -2$ y $x_1 = -2$; $x_2 = -1$

$q = 3$, entonces $p = 0$ y $x_1 = -3$; $x_2 = 0$

$q = 5$, entonces $p = 4$ y $x_1 = -4$; $x_2 = 1$

$q = 7$, entonces $p = 10$ y $x_1 = -5$; $x_2 = 2$

De aquí:

$$q = 2m - 1$$

$$p = m^2 - m - 2$$

$$x = \left| \begin{array}{l} x_1 = -m - 1 \\ x_2 = m - 2 \end{array} \right.$$

Si $b = 4$, y como entonces $\boldsymbol{q}$ también debe ser par,

$q = 2$, entonces $p = -3$ y $x_1 = -1$; $x_2 = -3$

$q = 4$, entonces $p = 0$ y $x_1 = 0$; $x_2 = -4$

$q = 6$, entonces $p = 5$ y $x_1 = 1$; $x_2 = -5$

$q = 8$, entonces $p = 12$ y $x_1 = 2$; $x_2 = -6$

De aquí:

$$q = 2m$$

$$p = m^2 - 4$$

$$x = \left| \begin{array}{l} x_1 = m - 2 \\ x_2 = -m - 2 \end{array} \right.$$

Mientras observábamos estos y otros ejemplos nos damos cuenta de ciertas regularidades. Pero estas regularidades difieren según ***b*** adquiera un valor par o impar. Entonces, decidimos hallar la generalización diferenciado dichos valores:

Si $b = 2n - 1$, entonces:

$$q = 2m - 1$$

$$p = (m^2 - m) - (n^2 - n)$$

$$x = \left| \begin{array}{l} x_1 = m - n \\ x_2 = -m - n + 1 \end{array} \right.$$

Si $b = 2n$, entonces:

$$q = 2m$$

$$p = m^2 - n^2$$

$$x = \left| \begin{array}{l} x_1 = m - n \\ x_2 = -m - n \end{array} \right.$$

siendo ***n*** y ***m*** números naturales.

2. La Regla de Hudde para ecuaciones con una solución doble

2.1. Biografía de Johann Hudde:

Johann Hudde fue un matemático holandés que trabajó con máximos y mínimos y con la teoría de las ecuaciones.

El padre de Johann Hudde era *Hudde Gerrit* (1595-1647), un comerciante adinerado que actuó como un miembro de Ámsterdam en el Consejo de Administración de la Compañía Holandesa de las Indias Orientales desde 1632.

La madre de Johann fue *María de Jonas Witsen*.

Desde 1648, Johann asistió a la Universidad de Leiden, donde estudió derecho. Sin embargo, en Leiden, se introdujo a las matemáticas avanzadas, donde recibió clases privadas de su maestro *van Schooten*[1]. Desde 1654 hasta 1663, Hudde trabajo las matemáticas como parte del grupo de 'investigación geométrica' de *van Schooten*.

Desde 1663 trabajó en diversas funciones para el Ayuntamiento de Ámsterdam como jurado, canciller, y como diputado para el almirantazgo. También, al igual que su padre, se vio involucrado con la Compañía Holandesa de las Indias Orientales.

Desempeñó durante 30 años el cargo de alcalde de Ámsterdam, siendo el primer mandato en torno a 1670. Políticamente, fue considerado moderado.

Todo el trabajo matemático de Hudde tuvo lugar antes de que empezaran sus labores políticas en 1663. Hudde trabajado con máximos y mínimos y con la teoría de ecuaciones. Encontró un método ingenioso para encontrar múltiples raíces de una ecuación que es esencialmente el método moderno de búsqueda del mayor factor común de un polinomio y sus derivados.

Un ejemplo de la regla Hudde apareció primero en *Exercitatione mathematicae* (escrito por *Van Schooten* en 1657).

En 1658 escribió una carta titulada *Epistola secunda, de maximis et minimis* (segunda carta en relación con máximos y mínimos) que envió a *van Schooten* y éste la publicó como un apéndice en su edición de *La Géométrie (Descartes)* en 1659.

[1] **Frans van Schooten** fue un matemático holandés que promovió la extensión de la geometría cartesiana.

Una amplia exposición de la norma de Hudde fue dada en una carta que escribió el 21 de noviembre de 1659, que no se publicó en la época, pero se publicó en la polémica *Newton - Leibniz* sobre quién merece prioridad para descubrir el cálculo.

La carta de Hudde fue publicada como parte de las pruebas, ya que Newton se refiere a la regla Hudde muchas veces. Leibniz también estudió manuscritos de Hudde e informó del hallazgo de excelentes resultados. Los manuscritos tuvieron una importante influencia en la introducción de Leibniz del cálculo.

Pero Hudde aportó muchas más destacadas contribuciones. En 1657 dirigió la inundación de parte de Holanda para bloquear el avance del ejército francés.

También trabajó en la óptica, y publicó su breve tratado *Specilla et circularia* en 1656. No parecen haber sobrevivido copias de la presente, pero se han encontrado dos versiones originales, una en Londres y otra en Hannover.

Hudde también se escribía con *Huygens*[2] sobre los problemas de mantenimiento del canal y juntos emprendieron una revisión de la parte inferior del río Rin, con el fin de que pudiesen producir una estrategia para evitar la colmatación de los ríos.

Hudde utilizó su posición para promover estudios académicos. Él mismo estudio la filosofía de Spinoza y consiguió que *Burchardus de Volder*[3] pudiera acceder a la Universidad de Leiden en 1670.

Fue un hombre muy respetado y de gran influencia.

[2] **Christiaan Huygens** fue un matemático holandés que patentó el primer reloj de péndulo, que aumentó considerablemente la exactitud de la medida del tiempo.

[3] **Burchardus de Volder** fue el primer hombre en enseñar filosofía natural en Holanda usando demostraciones experimentales durante sus exposiciones.

2.2. Enunciado y demostración:

Una vez que conocemos un poco más sobre Johann Hudde, nos centramos en su Regla:

Si una ecuación tiene una raíz doble y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria, de forma que el primer término de la progresión multiplica al primer término de la ecuación y así sucesivamente, el producto obtenido es una ecuación que tiene la raíz dada.

Ahora, nos proponemos demostrar la regla para una ecuación de grado ***n***, es decir, para cualquier ecuación. Partimos de una demostración que encontramos ya hecha, pero que nos proponemos "desmenuzar" y comprender.

El primer problema con el que nos encontramos es éste:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i$$

El profesor nos explica que:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ \dots + c_n x^n$$

Es decir, que se trata de la escritura algebraica de una función polinómica de grado ***n*** de forma "comprimida".

Después de esto, aprendemos la escritura, también comprimida, algebraica de una progresión aritmética:

$$(a + id)_{i=0}^{n}$$

en la que ***a*** es el primer término y ***d*** la diferencia.

Aquí empieza la demostración:

Si $f(x) = (x-e)^2 \sum_{i=1}^{n} c_i x^i$ es una función con ***e*** como raíz doble, entonces:

$$f(x) = (x-e)^2 \sum_{i=1}^{n} c_i x^i = (x^2 - 2ex + e^2) \sum_{i=1}^{n} c_i x^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \left(x^{i+2} - 2ex^{i+1} + e^2 x^i \right)$$

Ahora multiplicamos a esta ecuación por los sucesivos términos de la progresión:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left[\left(x^{i+2} \right)(a + id) - \left(2ex^{i+1} \right)[a + (i+1)d] + \left(e^2 x^i \right)[a + (i+2)d] \right]$$

Sustituimos ***x*** por ***e***:

$$F(e) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left[\left(e^{i+2} \right)(a + id) - \left(2ee^{i+1} \right)[a + (i+1)d] + \left(e^2 e^i \right)[a + (i+2)d] \right]$$

$$F(e) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left[\left(e^{i+2} \right)(a + id) - \left(2e^{i+2} \right)[a + (i+1)d] + \left(e^{i+2} \right)[a + (i+2)d] \right]$$

$$F(e) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(e^{i+2} \right) \left[(a + id) - 2[a + (i+1)d] + [a + (i+2)d] \right]$$

$$F(e) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(e^{i+2} \right) [a + id - 2a - 2id - 2d + a + id + 2d]$$

$$F(e) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(e^{i+2} \right) [0]$$

$$F(e) = 0$$

Como al sustituir, la función se iguala a cero, queda demostrado que ***e*** es solución tanto de ***f(x)*** como de ***F(x)***.

Queda demostrada la regla de Hudde.

2.3. La Regla de Hudde para ecuaciones de segundo grado:

Después de conocer la regla de Hudde, nos dispusimos a trabajarla con las ecuaciones de segundo grado. Queríamos entender el efecto de la Regla de Hudde en una ecuación de segundo grado.

Primero queremos volverla a demostrar, pero para el caso concreto de ecuaciones de segundo grado, utilizando un proceso más sencillo que en el caso general.

Según la regla de Hudde, si **E1** tiene solución doble, entonces **E2**[4] también tiene esa solución, aunque simple.

E1 » $ax^2 + bx + c = 0$
E2 » $apx^2 + b(p + d)x + c(p + 2d) = 0$

Soluciones de E1: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a}$

Ahora nos proponemos hallar las soluciones de **E2:**

$$x' = \frac{-b(p+d) \pm \sqrt{b^2(p+d)^2 - 4apc(p+2d)}}{2ap}$$

Hay que tener en cuenta que como $b^2 - 4ac$ es igual al discriminante de **E1**[5], y éste debe ser cero dado que se trata de una ecuación con solución doble, $b^2 = 4ac$

$$x' = \frac{-b(p+d) \pm \sqrt{b^2(p^2 + 2pd + d^2) - b^2p(p+2d)}}{2ap}$$

$$x' = \frac{-b(p+d) \pm \sqrt{b^2(p^2 + 2pd + d^2 - p^2 - 2pd)}}{2ap}$$

$$x' = \frac{-b(p+d) \pm \sqrt{b^2d^2}}{2ap}$$

[4] **E2** es la transformada de **E1** por la progresión.

[5] Esta igualdad se utilizará de aquí en adelante en los procesos de operatoria del trabajo.

$$x' = \frac{-b(p+d) \pm bd}{2ap}$$

$$x'_1 = \frac{-b(p+d) + bd}{2ap} = \frac{-b(p+d-d)}{2ap} = \frac{-b}{2a}$$

$$x'_2 = \frac{-b(p+d) - bd}{2ap} = \frac{-b(p+d+d)}{2ap} = \frac{-b}{2a} \cdot \frac{(p+2d)}{p}$$

Al demostrar la regla para este caso concreto, averiguamos, de paso, la relación entre las soluciones de **E2**:

Teorema nº 5:

La relación entre las soluciones de la ecuación de segundo grado multiplicada por la progresión aritmética es que una de ellas es igual a la otra multiplicada por el cociente entre el último y el primer término de la progresión utilizados.

Ahora nos preguntamos, ¿y si ***p=0***?, ¿se cumplirá la regla?

E2 » $apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) = 0$

Como $p = 0$, entonces:

$$apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) = bdx + c2d$$

$$x = \frac{2cd}{bd} = \frac{2c}{b}$$

¿Existirá alguna relación entre $^{2c}/_{b}$ y $^{-b}/_{2a}$?

$$\frac{2c}{b} = \frac{-b}{2a}$$

$$4ac = b^2$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

Comprobamos que la regla se cumple y, además, averiguamos una importante equivalencia:

Teorema nº 6:

En una ecuación de segundo grado con solución doble se cumple que:

$$\frac{2c}{b} = \frac{-b}{2a}$$

2.4. Algunas propiedades de la Regla de Hudde para ecuaciones de segundo grado:

I. Siendo **E1** una ecuación de solución doble, tiene el discriminante igual a cero[6], pero nos preguntamos… ¿cuál será el valor del discriminante de la ecuación **E2**, que es la resultante de multiplicar a ***a, b***, y ***c*** de E1 por ***p***, ***p+d*** y ***p+2d*** (términos sucesivos de una progresión aritmética)?

E1 » $ax^2 + bx + c = 0$
E2 » $apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) = 0$

$$x = \frac{-b(p+d) \pm \sqrt{[b(p+d)]^2 - 4apc(p+2d)}}{2ap}$$

△ **E2 =**

$$[b(p+d)]^2 - 4apc(p+2d) =$$

$$[b(p+d)]^2 - 4apc(p+2d) =$$

$$b^2(p+d)^2 - 4apc(p+2d) =$$

$$b^2(p^2 + 2pd + d^2) - 4ac(p^2 + 2pd) =$$

$$b^2(p^2 + 2pd) + b^2d^2 - 4ac(p^2 + 2pd) =$$

$$(b^2 - 4ac)(p^2 + 2pd) + b^2d^2$$

Como curiosidad obtenemos el valor del discriminante de E2:
$(b^2 - 4ac)(p^2 + 2pd) + b^2d^2$

[6] Para que una ecuación de segundo grado tenga solución doble, su discriminante debe ser nulo para que su valor sea igual que el de su opuesto.

II. Una vez ya demostrado la regla de Hudde (epígrafe 1.3), nos propusimos "darle la vuelta", de forma que, partiendo de **E1** (con solución doble), queremos hallar los términos sucesivos de la progresión aritmética por los que tenemos que multiplicar a ***a***, ***b*** y ***c*** de E1 para que consigamos las soluciones de E2 que queramos.

Denominamos ***-y*** a la solución doble de E1:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2yx + y^2 = 0 \qquad x_1 = -y \;\; ; \;\; x_2 = -y$$

$$a_1 = 1 \;;\; b_1 = 2y \;;\; c_1 = y^2$$

Si lo que queremos es que las soluciones de E2 sean ***q*** y ***-y***,[7] entonces la ecuación será:

$$(x+y)(x-q) = x^2 + xy - xq - yq = x^2 + (y-q)x - yq = 0$$

$$a_2 = 1 \;;\; b_2 = (y-q);\;\; c_2 = -yq$$

Entonces, la progresión aritmética por la que hemos multiplicado a la ecuación E1 para obtener E2 será:

$$p = \frac{a_2}{a_1} = 1$$

$$p + d = \frac{b_2}{b_1} = \frac{y-q}{2y}$$

$$p + 2d = \frac{c_2}{c_1} = \frac{-yq}{y^2} = \frac{-q}{y}$$

[7] Una de las soluciones tiene que ser igual a la solución doble de la ecuación anterior, dado que ya está demostrada la regla de Hudde.

Ahora demostramos que estos términos forman parte efectivamente de una progresión aritmética:

$$(p+d)-p=(p+2d)-(p+d)$$

$$\frac{y-q}{2y}-1=\frac{-q}{y}-\frac{y-q}{2y}$$

$$\frac{(y-q)-2y}{2y}=\frac{-2q-(y-q)}{2y}$$

$$\frac{-y-q}{2y}=\frac{-y-q}{2y}$$

Con la resolución de este sencillo pero interesante problema sobre la demostración de la regla de Hudde aplicada al estudio de ecuaciones de segundo grado, nos adentramos en el estudio de funciones cuadráticas.

3. La Regla de Hudde y las funciones cuadráticas

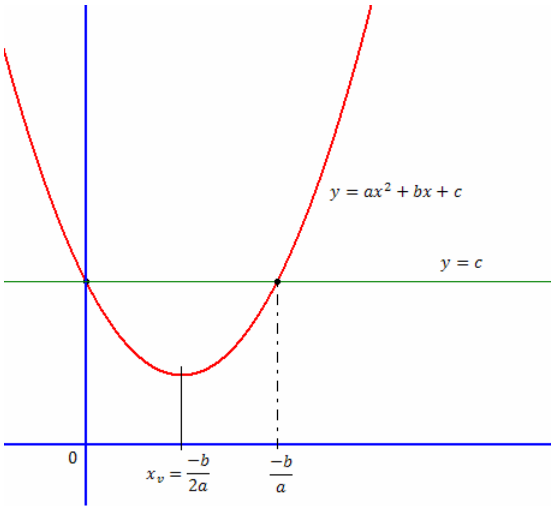
Para continuar con el trabajo, dejamos la ecuación con la que hemos estafo trabajando, $ax^2 + bx + c = 0$, y pasamos a la función[8] correspondiente: $ax^2 + bx + c = y$, de manera que realizamos un rápido estudio de su punto más característico: el vértice.

3.1. Estudio de las parábolas

En primer lugar, averiguamos la abscisa del vértice de F1:

F1 » $ax^2 + bx + c = y$

Esta parábola es simétrica respecto a una recta que pasa por el vértice y es paralela al eje 0Y. Por lo tanto, la parábola corta a la recta $y = c$ en dos puntos simétricos:



Hallamos las abcisas de esos dos puntos:

$$\left.\begin{matrix} y = ax^2 + bx + c \\ y = c \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad ax^2 + bx = 0 \quad \rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = {}^{-b}/_{a} \end{matrix}\right.$$

[8] Damos por supuesto que la Regla de Hudde se cumple, obviamente, tanto para ecuaciones de segundo grado como para las funciones cuadráticas asociadas a las ecuaciones. Las soluciones de las ecuaciones son los puntos de corte de la función con el eje 0X.

Entonces, la abscisa del vértice es el punto medio de ***x₁*** y ***x'₂***:

$$x_v = \frac{0 - {}^{b}/_{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$$

Nos damos cuenta que este valor es el mismo que el de la solución doble de E1. Como las raíces de una función coinciden con sus puntos de corte con el eje X, concluimos que el vértice de las funciones con raíz doble[9] coincide con dicha raíz:

E1 » $ax^2 + bx + c = 0$

$$\left.\begin{array}{r} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$$

Como partimos de que **E1** tiene solución doble, entonces:

$$x_v = x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

[9] La solución doble de E1 se corresponde con la raíz doble de F1. De aquí en adelante ambos términos se utilizarán como sinónimos.

Una vez visto esto, nos proponemos averiguar la abscisa y la ordenada del vértice de **F2**.

F2 » $apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) = y$

Si partimos de la ecuación del vértice ya demostrada anteriormente:

F1 » $ax^2 + bx + c = y$ $\qquad x_v = -b/2a$

Entonces es fácil hallar el vértice de la parábola de F2, atendiendo únicamente a la denominación algebraica de sus coeficientes:

F2 » $apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) = y$ $\qquad x_v = -b(p+d)/2ap$

Ya tenemos la abscisa, ahora veamos cuál sería el valor de la ordenada. Conociendo el valor de abscisas del vértice, para hallar su ordenada basta con sustituir en la fórmula de la ecuación:

$$\begin{cases} x_v = -b(p+d)/2ap \\ y_v = apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) \end{cases}$$

$$y_v = ap \cdot \left(\frac{-b(p+d)}{2ap}\right)^2 + b \cdot (p+d) \cdot \frac{-b(p+d)}{2ap} + c \cdot (p+2d)$$

$$y_v = ap \cdot \frac{b^2(p+d)^2}{4a^2p^2} + b \cdot (p+d) \cdot \frac{-b(p+d)}{2ap} + c \cdot (p+2d)$$

$$y_v = \frac{b^2(p+d)^2}{4ap} - \frac{b^2(p+d)^2}{2ap} + c \cdot (p+2d)$$

$$y_v = -\frac{b^2(p+d)^2}{4ap} + c \cdot (p+2d)$$

$$y_v = \frac{4ap \cdot c \cdot (p+2d)}{4ap} - \frac{b^2(p+d)^2}{4ap}$$

$$y_v = \frac{4acp^2 + 8acpd}{4ap} - \frac{b^2(p^2 + 2pd + d^2)}{4ap}$$

$$y_v = \frac{4acp^2 + 8acpd - b^2p^2 - 2b^2pd - b^2d^2}{4ap}$$

$$y_v = \frac{(4acp^2 - b^2p^2) + (8acpd\ - 2b^2pd) - b^2d^2}{4ap}$$

$$y_v = \frac{-p^2(-4ac + b^2) - 2pd(-4ac + b^2) - b^2d^2}{4ap}$$

Como $b^2 - 4ac = 0$, queda:

$$y_v = \frac{-b^2d^2}{4ap} = \frac{-d^2}{p} \cdot \frac{b^2}{4a}$$

Como $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} = 0$; $\mathrm{b}^2 = 4\mathrm{ac}$; $\frac{\mathrm{b}^2}{4\mathrm{a}} = \mathrm{c}$

$$y_v = \frac{-cd^2}{p}$$

Por tanto, el valor del vértice de **F2** es el punto:

$$\left(\frac{-b(p + d)}{2ap} \quad , \quad \frac{-cd^2}{p} \right)$$

Ya conocemos el valor de los vértices de ambas funciones.

3.2. Posiciones relativas de las parábolas:

Para continuar la investigación, nos preguntamos cuál será la relación entre las posiciones de las parábolas **F1** y **F2** una vez representadas en un eje de coordenadas. Para estudiar esta cuestión, hacemos una especie de "clasificación" de las posibles F2 según los valores que adquieran ***p*** y ***d.***

3.2.1. $d \neq 0$

Dentro de este apartado, también diferenciamos los casos según los valores de ***p.***

- Si ***p≠0*** y ***p≠1:***

$$\begin{cases} \mathbf{F1} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \\ \mathbf{F2} \Rightarrow y = apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) \end{cases}$$

Como $p \neq 1$ y $d \neq 0$, entonces:

$$ax^2 + bx + c = apx^2 + bx(p+d) + c(p+2d)$$

$$0 = ax^2(1-p) + bx[1-(p+d)] + c[1-(p+2d)]$$

$$x = \frac{-b[1-(p+d)] \pm \sqrt{b^2[(1-(p+d)]^2 - 4ac(1-p)[1-(p+2d)]}}{2a(1-p)}$$

$$x = \frac{-b[1-(p+d)] \pm \sqrt{b^2(1-p-d)^2 - 4ac(1-p)(1-p-2d)}}{2a(1-p)}$$

$$x = \frac{-b[1-(p+d)] \pm \sqrt{b^2(1-2p+p^2-2d+2pd+d^2) - b^2(1-2p-2d+p^2+2pd)}}{2a(1-p)}$$

$$x = \frac{-b[1-(p+d)] \pm \sqrt{b^2 d^2}}{2a(1-p)}$$

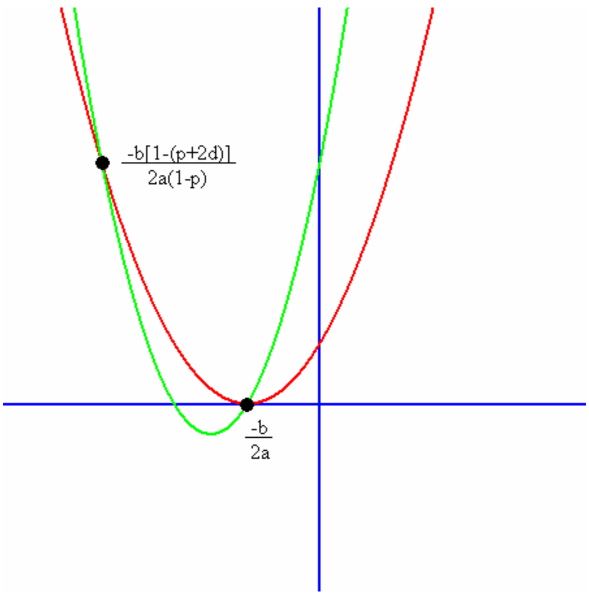
$$x = \frac{-b[1-(p+d)] \pm bd}{2a(1-p)}$$

Entonces hay dos puntos en común entre F1 y F2, siendo uno de ellos el vértice de la primera (parábola F1):

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b\,[1-(p+2d)]}{2a(1-p)}$$

Ilustramos el caso:



- Si ***p=1:***

$$\begin{cases} \mathbf{F1} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \\ \mathbf{F2} \Rightarrow y = apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) \end{cases}$$

Como $p = 1$ y $d \neq 0$, entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{F1} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \\ \mathbf{F2} \Rightarrow y = ax^2 + b(d+1)x + c(2d+1) \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + b(d+1)x + c(2d+1)$$

$$bx + c = b(d+1)x + c(2d+1)$$

$$bx - b(d+1)x = c(2d+1) - c$$

$$bx - bdx + bx = 2cd + c - c$$

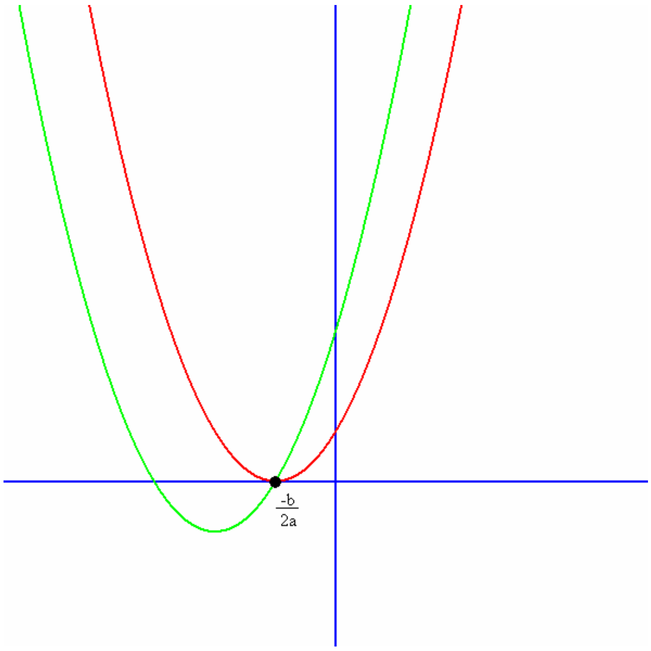
$$-bdx = 2cd$$

$$-bx = 2c$$

Entonces sólo hay un punto en común, que es el vértice de la primera, de coordenadas: (-b/2a, 0):

$$x = {}^{-2c}/_{b} = {}^{-b}/_{2a}$$

Ilustración:



- Si ***p=0:***

$$\begin{cases} \mathbf{F1} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \\ \mathbf{F2} \Rightarrow y = apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) \end{cases}$$

Como $p = 0$ y $d \neq 0$, entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{F1} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \\ \mathbf{F2} \Rightarrow y = bdx + c2d \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = bdx + c2d$$

$$0 = ax^2 + b(1-d)x + c(1-2d)$$

$$x = \frac{-b(1-d) \pm \sqrt{b^2(1-d)^2 - 4ac(1-2d)}}{2a}$$

$$x = \frac{-b(1-d) \pm \sqrt{b^2(1-2d+d^2) - b^2(1-2d)}}{2a}$$

$$x = \frac{-b(1-d) \pm \sqrt{b^2(1-2d-1+2d)}}{2a}$$

$$x = \frac{-b(1-d) \pm \sqrt{b^2d^2}}{2a}$$

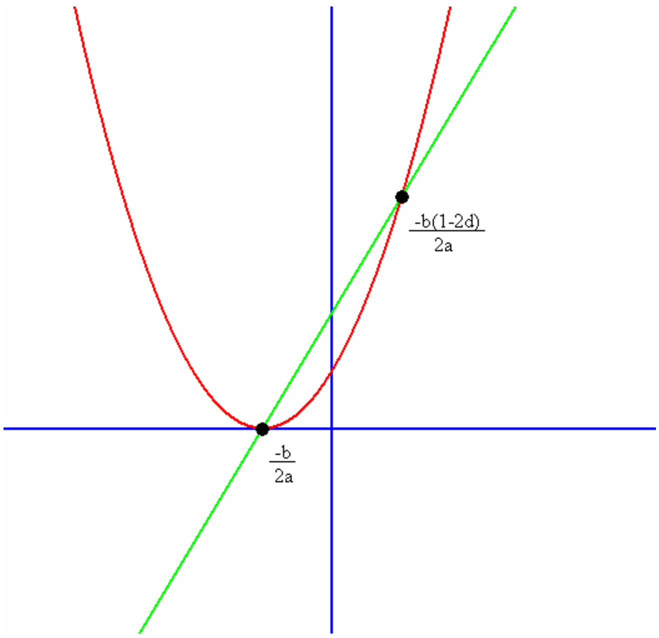
$$x = \frac{-b(1-d) \pm bd}{2a}$$

Entonces F2 es una recta y tiene dos puntos de corte con la parábola F1.

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b(1-2d)}{2a}$$

Demostración ilustrativa:



- Si ***p=-1:***

$$\begin{cases} \mathbf{F1} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \\ \mathbf{F2} \Rightarrow y = apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) \end{cases}$$

Como $p = -1$ y $d \neq 0$, entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{F1} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \\ \mathbf{F2} \Rightarrow y = -ax^2 + bx(d-1) + c(2d-1) \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = -ax^2 + b(d-1)x + c(2d-1)$$

$$0 = 2ax^2 + b(2-d)x + c(2-2d)$$

$$x = \frac{-b(2-d) \pm \sqrt{b^2(4-4d+d^2) - 8ac(2-2d)}}{4a}$$

$$x = \frac{-b(2-d) \pm \sqrt{b^2(4-4d+d^2) - b^2(4-4d)}}{4a}$$

$$x = \frac{-b(2-d) \pm \sqrt{b^2(4-4d+d^2-4+4d)}}{4a}$$

$$x = \frac{-b(2-d) \pm \sqrt{b^2d^2}}{4a}$$

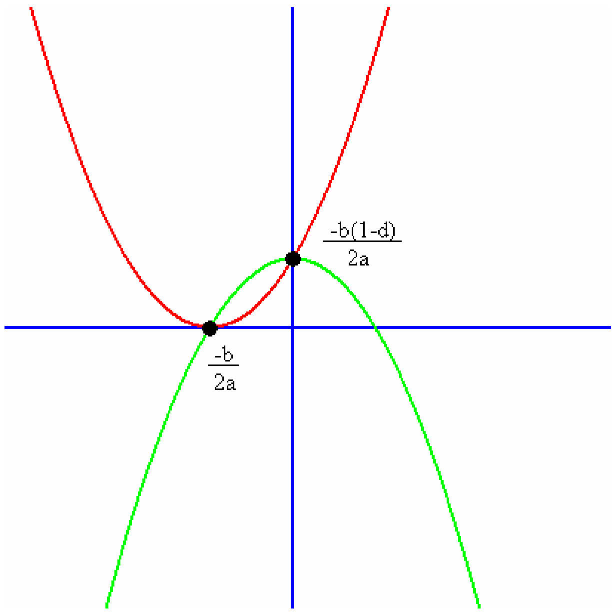
$$x = \frac{-b(2-d) \pm bd}{4a}$$

Entonces, los puntos de corte entre las dos parábolas son sus vértices respectivos:

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b(1-d)}{2a}$$

Representación:



3.2.2. $d = 0$

Volvemos a diferenciar los casos según los valores de ***p.***

- Si ***p≠1:***

$$\begin{cases} \mathbf{F1} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \\ \mathbf{F2} \Rightarrow y = apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) \end{cases}$$

Como $p \neq 1$ y $d = 0$, entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{F1} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \\ \mathbf{F2} \Rightarrow y = apx^2 + bpx + cp \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = apx^2 + bpx + cp$$

$$ax^2 - apx^2 + bx - bpx + c - cp = 0$$

$$ax^2 - apx^2 + bx - bpx + c - cp = 0$$

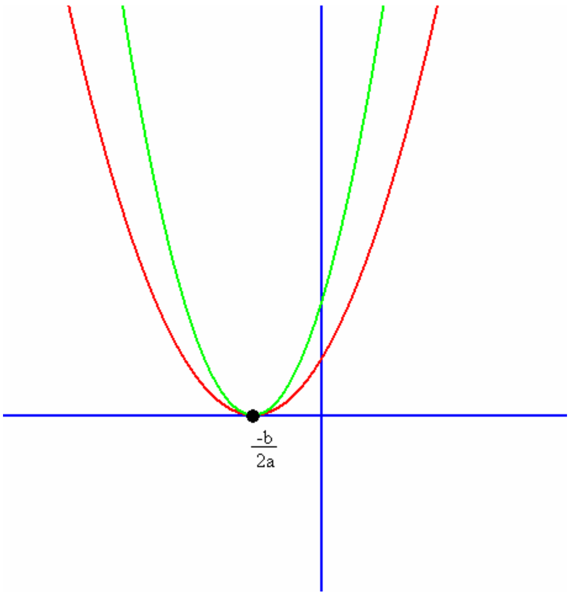
$$ax^2(1-p) + bx(1-p) + c(1-p) = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Entonces tienen un punto en común que coincide con el vértice de la primera.

$$x = x_1 = x_2 = {}^{-b}/_{2a}$$

Ilustración:



- Si ***p=1:***

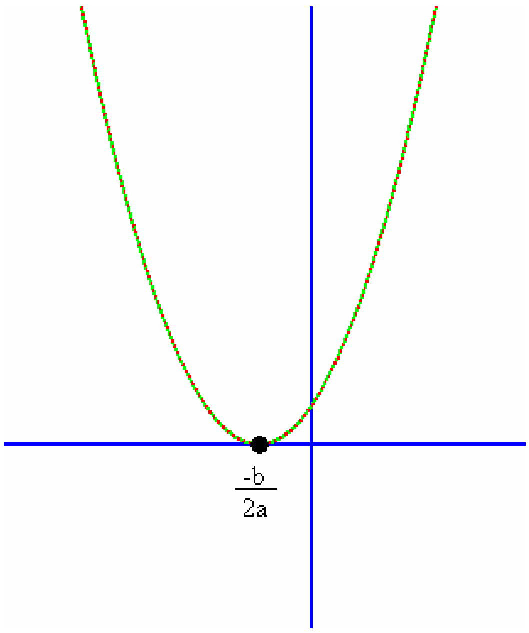
$$\begin{cases} \mathbf{F1} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \\ \mathbf{F2} \Rightarrow y = apx^2 + b(p+d)x + c(p+2d) \end{cases}$$

Como $p = 1$ y $d = 0$, entonces:

$$\begin{cases} \mathbf{F1} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \\ \mathbf{F2} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c$$

Lógicamente, las dos parábolas coinciden, por lo que tienen en común todos sus puntos:



4. La Regla de Hudde con progresiones geométricas:

Cuando creíamos que nuestro trabajo sobre Hudde llegaba a su fin por la gran cantidad de cambios y variaciones que ya habíamos introducido, se nos ocurrió aún uno más: sustituir las progresiones aritméticas por progresiones geométricas. ¿Seguirá existiendo alguna relación?

Para averiguarlo, empezamos como si se tratara de la demostración de la regla de Hudde original:

E1 » $ax^2 + bx + c = 0$
E3 » $apx^2 + bprx + cpr^2 = 0$

Lo primero que advertimos es que la ecuación E3[10], se puede simplificar dado que ***p*** está multiplicando todos sus términos y debe ser distinto de cero, porque si $p = 0$ no tenemos ecuación.

E3 » $apx^2 + bprx + cpr^2 = ax^2 + brx + cr^2 = 0$

Así, aplicamos la fórmula cuadrática para obtener las soluciones de ambas ecuaciones:

Soluciones de E1: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Soluciones de E3: $x' = \frac{-br \pm \sqrt{(br)^2-4acr^2}}{2a}$

Para buscar alguna relación, dividimos las soluciones de **E3** entre las de **E1:**

$$\frac{\frac{-br \pm \sqrt{(br)^2-4acr^2}}{2a}}{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}} = \frac{-br \pm \sqrt{(br)^2-4acr^2}}{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}} = \frac{-br \pm r\sqrt{b^2-4ac}}{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}} = \frac{r \cdot (-b \pm \sqrt{b^2-4ac})}{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}} = r$$

[10] **E3** resulta de multiplicar los coeficientes de E1 por términos sucesivos de una progresión geométrica: ***p***, ***pr*** y ***pr²***.

Teorema nº 7:

*Al multiplicar una ecuación de segundo grado por términos sucesivos de una progresión geométrica se obtiene otra con soluciones directamente proporcionales a las soluciones de la primera, siendo la razón **(r)** de la progresión la constante de proporcionalidad.*

Enunciado y demostrado el teorema, y para cerrar este capítulo, revertimos el proceso. Queremos hallar los coeficientes de **E3** partiendo de las soluciones de **E1** (como ya hicimos con la regla de Hudde y las ecuaciones de segundo grado correspondientes)

Entonces:

E1 » $ax^2 + bx + c = 0$

Soluciones de E1: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ahora hallamos las soluciones ***x'₁*** y ***x'₂*** (soluciones de **E1**):

$$\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) r = \frac{-br \pm r\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-br \pm \sqrt{(br)^2 - 4acr^2}}{2a}$$

A partir de estas soluciones, hallamos la ecuación $a'x^2 + b'x + c' = 0$ (que corresponde con **E3**):

$$x = \frac{-br \pm \sqrt{(br)^2 - 4acr^2}}{2a}$$

$$2ax = -br \pm \sqrt{(br)^2 - 4acr^2}$$

$$2ax + br = \sqrt{(br)^2 - 4acr^2}$$

$$(2ax + br)^2 = (br)^2 - 4acr^2$$

$$4a^2x^2 + 4abrx + (br)^2 = (br)^2 - 4acr^2$$

$$4a^2x^2 + 4abrx + (br)^2 - (br)^2 + 4acr^2 = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abrx + 4acr^2 = 0$$

$$ax^2 + brx + cr^2 = 0$$

Si $a'x^2 + b'x + c' = ax^2 + brx + cr^2$, entonces:

$$a' = a$$

$$b' = br$$

$$c' = cr^2$$

Comprobamos de nuevo el teorema anterior. Aquí concluye esta rama del trabajo, aun existiendo más caminos por los que continuar.

5. La Regla de Hudde para funciones cúbicas:

Como último apartado del trabajo, nos proponemos abarcar el tema que llevamos tratando todo el trabajo, pero una vez más con una pequeña variación: funciones de tercer grado.

Enseguida nos damos cuenta de la dificultad de este tema, sobre todo porque no podemos hallar las raíces de las funciones con una fórmula tan sencilla como la que usábamos anteriormente.

Solución: la regla de Ruffini[11]. Con este método podremos averiguar si un número es raíz de la función con solo dividirla entre este.

Con este boceto 'en mente' del proceso comenzamos por la demostración, como hicimos en el epígrafe 1.3, de este caso concreto:

Caso concreto:

Siendo la función cúbica $f(x) = (x-3)^2 \cdot (x-2)$, con solución doble ***3,*** y la progresión aritmética ***0, 2, 4, 6,*** con diferencia ***2,*** se debe cumplir que ***F(x),*** resultante de ***f(x)*** por la progresión, tenga también como solución ***3.*** Y así es:

$$f(x) = (x-3)^2 \cdot (x-2)$$

$$f(x) = (x^2 - 6x + 9) \cdot (x-2)$$

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$$

Como $p = 0$; $(p+d) = 2$; $(p+2d) = 4$; $(p+3d) = 6$:

$$F(x) = -16x^2 + 84x - 108$$

Con $\boldsymbol{x_1 = 3}$; $x_2 = {}^{9}/_{4}$.

Para este caso concreto comprobamos que la regla se cumple una vez más. Pasamos a la generalización:

[11] **Paolo Ruffini** fue un matemático italiano. Estudió Matemáticas, Literatura, Filosofía, Medicina y Biología en la Universidad de Módena. Entre sus aportaciones a las matemáticas se encuentran las bases de la teoría de las transformaciones de ecuaciones y la regla del cálculo aproximado de las raíces de las ecuaciones.

En álgebra, la **Regla de Ruffini** nos permite dividir un polinomio entre un binomio de la forma (x − r) (siendo r un número real). También nos permite localizar raíces de un polinomio y factorizarlo.

<u>Generalización:</u>

Siendo la función cúbica $f(x) = (x-a)^2 \cdot (x-b)$, con solución doble ***a,*** y la progresión aritmética ***p, p+d, p+2d, p+3d,*** con diferencia ***d,*** se debe cumplir que ***F(x),*** resultante de ***f(x)*** por la progresión, tenga también como solución ***a.*** Y así es:

$$f(x) = (x-a)^2 \cdot (x-b)$$

$$f(x) = (x^2 - 2ax + a^2) \cdot (x-b)$$

$$f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x - bx^2 + 2abx - a^2b$$

$$f(x) = x^3 - x^2(2a+b) + x(a^2+2ab) - a^2b$$

Ya conocemos las raíces de esta función ($x_1 = a \;\; ; \;\; x_2 = b$). Ahora la multiplicamos por la progresión:

$$F(x) = px^3 - x^2(2a+b)(p+d) + x(a^2+2ab)(p+2d) - a^2b(p+3d)$$

$$F(x) = px^3 - x^2\,(2ap + bp + 2ad + bd) + x(a^2p + 2a^2d + 2abp + 4abd) - (a^2bp + 3a^2bd)$$

Es ahora cuando utilizamos la regla de Ruffini para comprobar que, efectivamente, ***a*** es solución de ***F(x).***

Si esto se cumple, el resto de la división debe ser cero.

	x^3	x^2	x	
	p	$-(2ap+bp+2ad+bd)$ $-2ap-bp-2ad-bd$	$(a^2p+2a^2d+2abp+4abd)$	$-(a^2bp+3a^2bd)$ $-a^2bp-3a^2bd$
a		ap	$-a^2p-abp-2a^2d-abd$	a^2bp+3a^2bd
	p	$-ap-bp-2ad-bd$	$abp+3abd$	$\boxed{0}$

Comprobamos que la división sí que es exacta. Por lo tanto, la regla de Hudde se cumple también para ecuaciones / funciones cúbicas.

A partir de este punto, se puede profundizar mucho más en este interesante campo. Estas investigaciones sobrepasarían el límite de nuestro trabajo, por lo que éste aquí termina.

No obstante, dejamos esta rama abierta, como pueden existir muchas otras, para que si alguien está interesado en el asunto pueda continuar por sí mismo y compruebe la satisfacción de lograr un resultado ya esperado o la intriga de una secuencia de relaciones aparentemente inexistentes a primera vista.

Χονχλυσιονεσ

Mientras hemos desarrollado el trabajo, y al final del mismo, hemos ido recogiendo unas cuantas ideas como conclusiones de todo lo que hemos conseguido:

- Nos hemos acostumbrado a trabajar con letras: operaciones, cambios de ecuaciones, fórmulas algebraicas, etc. Esto es bueno de cara al futuro y para conseguir manejo en el tema.
- Estamos satisfechos del número y de la calidad de los resultados conseguidos, algunos de ellos realmente curiosos y bastante aplicables a otras situaciones en las que intervengan las ecuaciones o las funciones trabajadas.
- El trabajo con funciones cúbicas no se ha desarrollado suficientemente; podría se una línea de trabajo para una posible continuación del mismo.
- El apartado de progresiones geométricas nos permitió descubrir la relación entre las soluciones de las ecuaciones, pero al ser una relación tan “lógica” no nos permitió continuar por ese camino. Pensábamos que iba a dar más juego ese tema.
- La parte inicial del trabajo; el intercambio de coeficientes en las ecuaciones, no se continuó porque no se encontraban relaciones notables. Quizás pueda ser otra vía abierta para seguir trabajando.

Βιβλιογραφ{α

Textos escritos:

BOYER, C. B., 1986. Historia de la matemática. Alianza Editorial, Madrid.

GRATTAN-GUINESS, I., 1984. Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica. Alianza Editorial, Madrid.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. M. 1992. Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVIII. Alianza Editorial, Madrid.

ALONSO MARTÍNEZ, Mª M., GAZTELU ALBERO, I., OLIVEIRA GONZÁLEZ, Mª J., COLERA JIMÉNEZ, J., 2008. Matemáticas 4. Opción B. Grupo Anaya, S. A., Madrid.

Consultas online (direcciones web):

O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. Hudde biography: http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Hudde.html

O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. Schooten summary: http://www.gap-system.org/~history/Mathematicians/Schooten.html

O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. Huygens summary: http://www.gap-system.org/~history/Mathematicians/Huygens.html

O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. De Volder summary: http://www.gap-system.org/~history/Mathematicians/Devolder.html

Paolo Ruffini: http://es.wikipedia.org/wiki/Paolo_Ruffini

Regla de Ruffini: http://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Ruffini

Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVIII – Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=128663