

# Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

**Tercera Edición, 2008/2009**

**TRABAJO: Un papel de altos vuelos**

*FINALISTA EN LA CATEGORÍA DE BACHILLERATO*

## **AUTORES:**

- o Sara Correyero Plaza
- o María Medina Pérez

## **TUTORES:**

- o María José Herrero
- o Antonio J. Ocaña Ávila

**CENTRO: IES María Guerrero (Madrid)**

**AUTÓNOMA 40 años**



# Un papel de altos vuelos



# El vuelo de un avión de papel



**Marley**

## ÍNDICE

• BREVE RESUMEN DE LA INVESTIGACIÓN	Página 2
• JUSTIFICACIÓN	Página 2
• ANTECEDENTES	Página 2
• OBJETIVOS	Página 3
- METODOLOGÍA EMPLEADA	Página 3
- Materiales utilizados	Página 3
- Descripción del procedimiento experimental	Página 4
• EXPLICACIÓN DE LA FÍSICA DEL PROYECTO	Página 4
• OBJETIVO 1	Página 5
- INVESTIGACIÓN PRELIMINAR	Página 7
- SEGUNDO OBJETIVO	Página 8
- TERCER OBJETIVO	Página 10
• ESTUDIO DETALLADO DEL MODELO A	Página 10
• INTERPOLACIÓN DEL MODELO A	Página 12
• ESTUDIO DETALLADO DEL MODELO B	Página 14
• INTERPOLACIÓN DEL MODELO B	Página 16
• CONCLUSIONES	Página 17
• POSIBLES MEJORAS Y AMPLIACIONES	Página 17
• CONSTRUCCIÓN DETALLADA DEL MODELO B ÓPTIMO	Página 18
• VALORACIÓN PERSONAL	Página 19
• BIBLIOGRAFÍA	Página 19

## BREVE RESUMEN DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de este trabajo es estudiar la incidencia que las posibles variaciones que se pueden introducir en la construcción de diversos aviones de papel tienen en su tiempo de vuelo.

La idea es lanzar aviones de papel del mismo modelo con pequeñas variaciones en su diseño y con una misma velocidad de salida e ir midiendo su tiempo de vuelo. Para ello hemos tenido que construir una lanzadera que nos permitiese lanzar los aviones con la misma velocidad y ángulo.

El diseño y construcción de la lanzadera lo realizamos en el tercer trimestre del curso 2007/08. La construimos adaptando un carril de aire mediante el cual, con la ayuda de distintas pesas, podíamos modificar la velocidad de lanzamiento de los aviones.

Las medidas del vuelo de los aviones las tomamos durante el verano del 2008 en el gimnasio del instituto. Utilizamos papeles de distinta densidad.

Utilizamos la interpolación para buscar la función matemática que mejor se adaptase a la función experimental “tiempo de vuelo”. Calculando el máximo del polinomio encontramos el modelo óptimo de avión.

También comparamos la interpolación de Newton y de Lagrange y programamos estas nuevas funciones.

## JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO

En un primer momento, pensamos en hacer un trabajo de investigación relacionado con el mundo de los aviones y la aerodinámica. Buscamos en Internet temas relacionados y, como era previsible por tratarse de una ciencia avanzada, encontramos una cantidad inmensa de investigaciones sobre aeronáutica, pero que no estaban a nuestro nivel, sino a un nivel claramente superior al asequible en Bachillerato. Por lo tanto, estudiar algo relacionado con los aviones era un objetivo demasiado alejado.

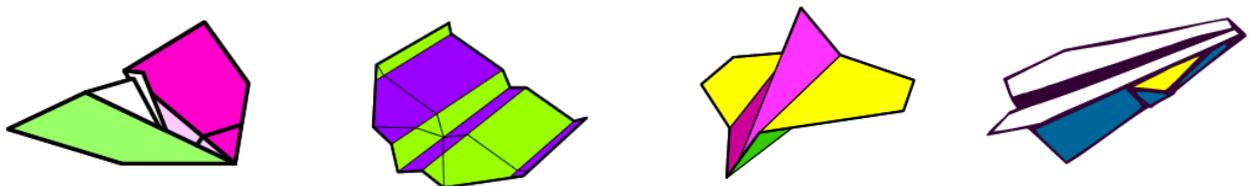
Por este motivo, pensamos en otro tipo de aviones más sencillos, y dentro de estos, los que nos pareció que estaban menos estudiados eran los aviones de papel. Todos en alguna ocasión hemos construido algunos de los modelos más simples de estos aviones y se nos ocurrió pensar en qué variaciones se podían hacer en el diseño de éstos para conseguir que su vuelo fuese lo más prolongado posible. Tras consultar este tema con nuestros tutores nos pusimos a trabajar en él.

## ANTECEDENTES

Tratamos de buscar información sobre este tipo de estudios y, aunque sí encontramos mucha sobre formas de construir aviones de papel, no encontramos estudios sistemáticos sobre el vuelo de éstos. Encontramos competiciones de aviones de papel, muchos diseños... pero no la optimización de un modelo variando sus características. Esto no quiere decir que no lo haya, sino más bien que nosotras no lo pudimos encontrar con los medios a nuestro alcance.

La papiroflexia, u origami, procede de los vocablos japoneses “oru” (plegar) y “kami” (papel). Su definición es la transformación del papel en formas de distinto tamaño y complejidad. El origami, por lo tanto, tiene sus orígenes en la cultura oriental, y llegó a Occidente en el siglo VII con la invasión de los árabes. Los prisioneros chinos doblaban el papel para obtener figuras clásicas como animales. Pero la religión musulmana pronto prohibió estas costumbres por razones de ideología y a partir de entonces comenzaron a dirigir sus investigaciones en papiroflexia al estudio de formas geométricas. Hoy en día, es un arte muy común.

Dentro de la papiroflexia, nos centramos pues en los aviones. Buscamos construcciones de aviones de papel en Internet y encontramos una infinidad de modelos.



El problema es que muchos de los modelos no están diseñados para volar bien sino para ser bonitos, y lo son, pero nuestro objetivo era encontrar dos aviones que planearan con facilidad.

Al final optamos por los dos modelos clásicos más comunes, y que son muy diferentes entre sí.



Al primer modelo lo denominamos **modelo A**.

Como se puede apreciar, es un modelo muy sencillo en el que el papel está distribuido con mucha uniformidad.



Al segundo modelo, lo llamamos **modelo B**.

Éste, en cambio, es un modelo más complejo en su construcción, el papel está distribuido en las alas y se acumula en la punta y dos “metralletas” laterales. Es un modelo más pequeño que el anterior.

La idea es, en estos dos modelos, ir variando la distancia a la que se hacen los distintos dobleces, y ver la incidencia que esto tiene en el vuelo del avión. Desde el primer momento fuimos conscientes de que se trataba de una investigación arriesgada y con un alto margen de error, pues se trata ni más ni menos que de aviones de papel, que construiríamos nosotras mismas, y aun tratando de ser lo más precisas posible en la construcción, era muy probable que nos saliese alguna diferencia entre un avión y otro aparentemente iguales. No sabíamos a qué nos iba a llevar un trabajo de tales características, cuáles iban a ser los resultados; es más, ni siquiera sabíamos si íbamos a obtener algún resultado. Era toda una serie de innumerables preguntas que íbamos a tratar de responder, no con el fin de encontrar algo, ni descubrir algo nuevo e innovador, sino con el fin de satisfacer nuestra propia curiosidad.

### OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo principal de esta investigación es estudiar la incidencia que las posibles variaciones en el proceso de construcción de un avión de papel tienen en su tiempo de vuelo, aunque de una manera más específica serán:

1. **Construiremos un sistema de lanzamiento que nos permita lanzar sistemáticamente con la misma velocidad y ángulo los distintos aviones de papel.**
2. **Analizaremos la incidencia de la densidad del papel que utilizamos.**
3. **Intentaremos buscar, dentro de cada modelo, el diseño óptimo en relación al tiempo de vuelo, utilizando para ello la interpolación de Newton y Lagrange.**

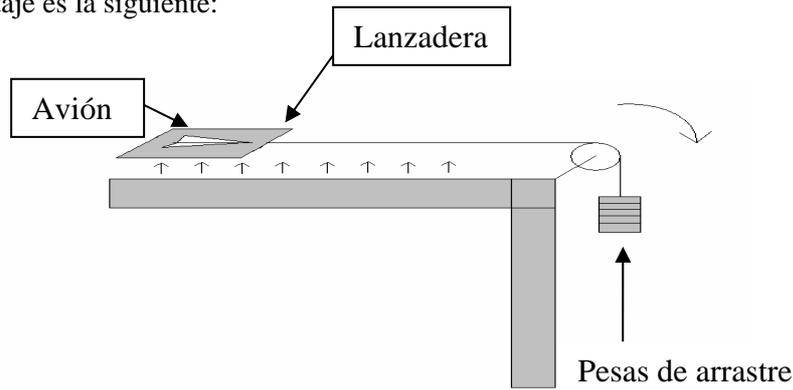
### METODOLOGÍA EMPLEADA

#### MATERIALES UTILIZADOS

Aportados por el instituto	Aportados por nosotras
Carril de aire del laboratorio de Física	Tres paquetes de 500 folios de papel, uno de 80 gramos, otro de 100 y otro de 120.
Tres células fotoeléctricas	Cartulina
Dos cables coaxiales cables de alimentación	Corcho
Alargador	Pajitas
Tres mesas	Grapas
Hilo, pesas y alambre	Pegamento y lapicero
Soportes y metro	

## DESCRIPCIÓN DEL PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

La idea del montaje es la siguiente:

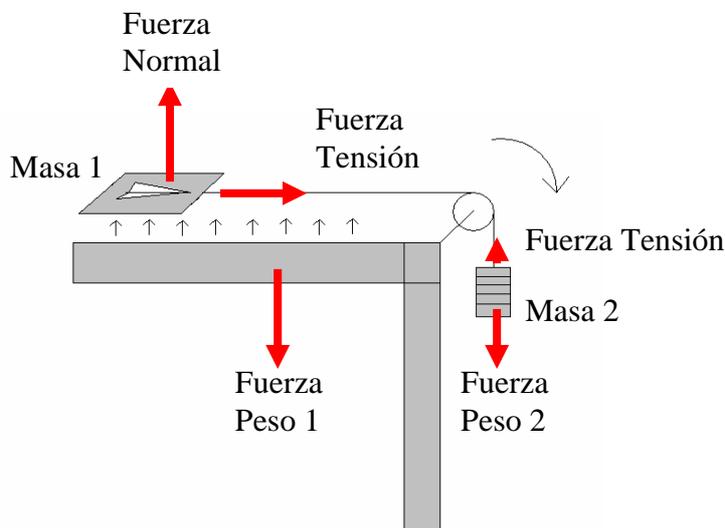


Como puede observarse en el diagrama, las pesas de arrastre tirarán de la lanzadera, que se deslizará sin rozamiento por el carril. Encima de la lanzadera irá el avión. Para conseguir que esa lanzadera se mueva sin rozamiento haremos que se deslice por encima de un carril de aire comprimido. La plataforma, al perder la fuerza de rozamiento, se deslizará hasta el final del carril provocando un pequeño choque entre éste y dicha plataforma. Este choque provocará tal impacto a la plataforma que el avión que hay situado encima de ésta saldrá volando.

Nuestro trabajo iba a consistir en lanzar los aviones e ir tomando los datos del tiempo que habían estado en vuelo. Luego los iríamos analizando y sobre la marcha decidiríamos qué cambios íbamos a hacer en el avión para irlo optimizando.

## EXPLICACIÓN DE LA FÍSICA DEL PROYECTO

Como no hay rozamiento en el carril (o es despreciable en relación al peso de las pesas), la única fuerza que acelera la plataforma es la tensión del hilo.



La Fuerza Normal se anula con la Fuerza Peso 1, por tanto la fuerza resultante sobre la plataforma es la tensión del hilo (T).

Aplicando la segunda ley a cada masa y sumando ambas ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para la masa 1: } m \rightarrow T = m \cdot a \\ \text{Para la masa 2: } M \rightarrow Mg - T = M \cdot a \end{array} \right\} M \cdot g = a \cdot (m + M)$$

Despejando la aceleración:

$$a = \frac{M}{m + M} \cdot g$$

Con esta ecuación deducimos que la aceleración es constante, pues las masas y la gravedad son constantes.

Una vez hecho el análisis de fuerzas, ya podemos utilizar con seguridad las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado (MUA).

Ecuaciones del MUA: 
$$\left\{ \begin{array}{l} e = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ V_f = V_0 + a \cdot t \end{array} \right. \quad a = \frac{2 \cdot e}{t^2}$$
 Hemos tenido en cuenta que la  $V_0=0$

Al sustituir la aceleración en la segunda ecuación obtenemos:

$$V_f = \frac{2 \cdot e \cdot t}{t^2} \Rightarrow V_f = \frac{2 \cdot e}{t}$$

Por lo tanto, para calcular la velocidad de salida de cada avión de papel, utilizaremos la fórmula:

$$\text{Velocidad de salida} = \frac{2 \cdot \text{Espacio}}{\text{Tiempo}}$$

## MONTAJE EXPERIMENTAL

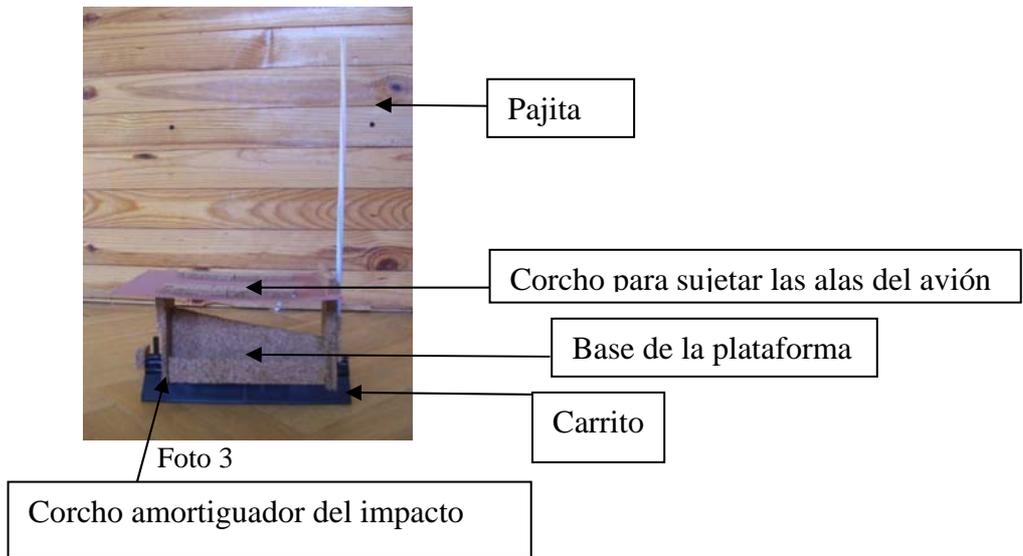
Al lanzar un avión de papel con la mano, le transmites una fuerza determinada y un ángulo. Para que la velocidad de salida sea la misma, ambos factores deben coincidir en todos los casos. Pensamos en mecanismos compuestos por gomas elásticas, muelles.... Pero al final optamos por utilizar un carril de aire del Laboratorio de Física del instituto. El carril era una buena opción, pero debíamos modificarlo para que pudiese valer. Lo primero era pensar que los carritos en los que había que situar el avión eran triangulares. Debíamos colocar una plataforma encima que nos permitiese sostener los aviones con facilidad. El material que utilizamos fue corcho y cartulinas, pues no podíamos utilizar madera ni materiales pesados, ya que el aire del carril tenía que ser capaz de elevarlo. Mientras íbamos construyendo lo que sería la plataforma definitiva, hicimos dos pruebas arbitrarias para comprobar que efectivamente servía. La plataforma que íbamos a construir debía pues tener las siguientes características:

- Un sistema que lo adaptase a la superficie triangular del carrito
- No excederse de peso
- Un ángulo adecuado para los lanzamientos
- Algún material en la punta para amortiguar el golpe
- Un elemento alargado al final de la plataforma para ir cortando los infrarrojos de las células fotovoltaicas que miden el tiempo (explicado a continuación).

### **OBJETIVO 1: Construcción del sistema de lanzamiento**

El sistema de lanzamiento consta de las siguientes partes:

- CARRIL DE AIRE
- PLATAFORMA DE LANZAMIENTO
  - Características: Base adaptada al carrito triangular, soporte de corcho, cartulinas como superficie de lanzamiento, corcho amortiguador del golpe, tres trozos de corcho rectangulares cuya función es sujetar las alas del avión y una pajita.
  - Función: La función principal de la plataforma es sujetar al avión durante el recorrido de éste en el carril de aire. A su vez, también marcará los tiempos con la pajita y adaptará la forma del carrito a una superficie válida para los lanzamientos.



➤ MECANISMO DE MEDICIÓN DEL TIEMPO DE ACELERACIÓN

Encima del carril de aire hay colocadas dos células fotovoltaicas:

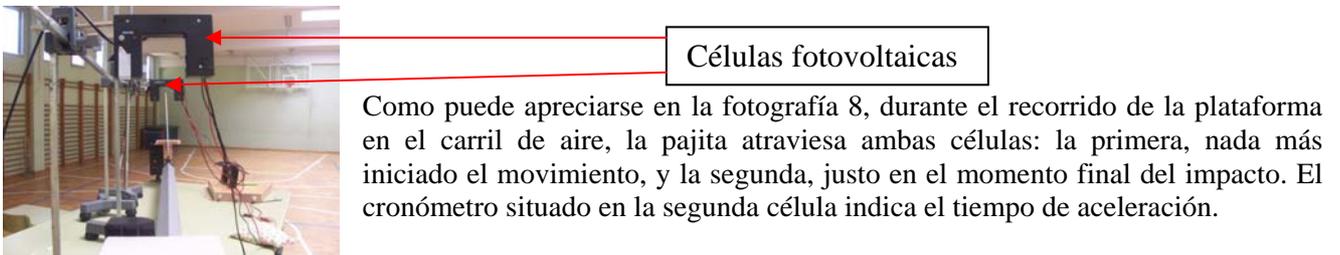
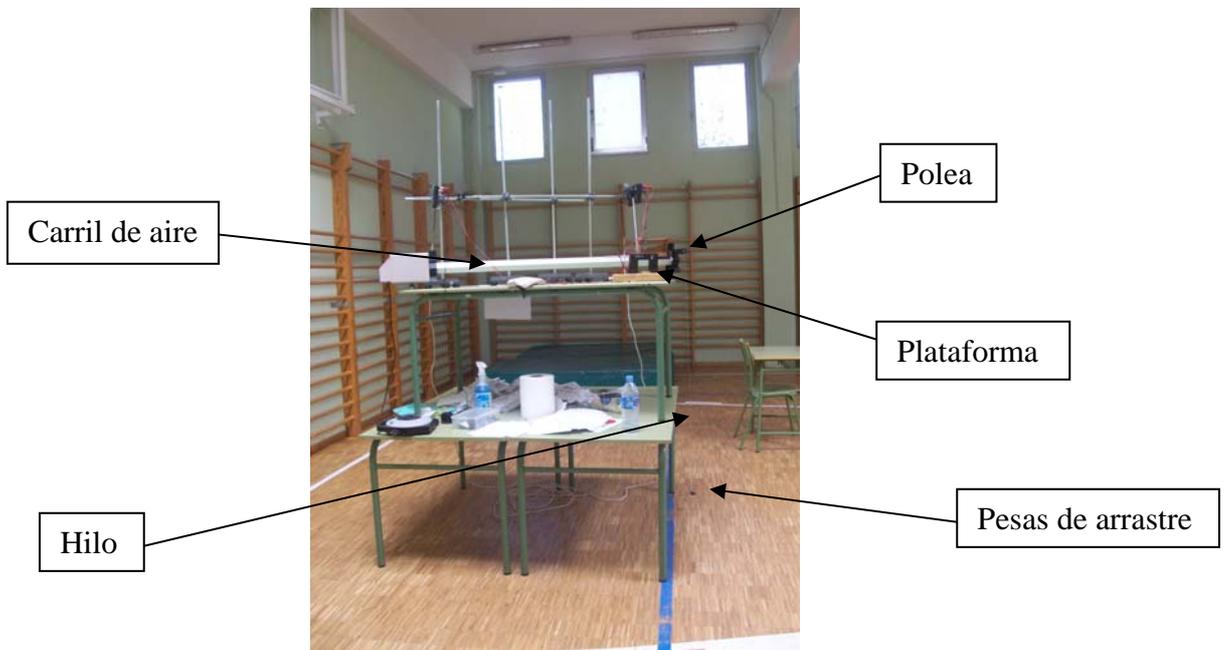


Foto 8

El montaje final de la rampa de lanzamiento quedó así:



## RESULTADOS OBTENIDOS E INTERPRETACIÓN DE LOS DATOS

### NOMENCLATURA I

Antes de hacer los lanzamientos creamos una nomenclatura para mantener de forma organizada los datos que íbamos obteniendo. Dicha nomenclatura consistía en lo siguiente: Cada avión debía tener un nombre propio que lo caracterizase. En primer lugar colocaríamos la letra del modelo al que pertenece, sea o bien el A o bien el B. A continuación pondríamos los g/m<sup>2</sup> del papel utilizado que podrían ser 80, 100 o 120. Y por último los iríamos nombrando por orden de construcción. 1, 2, 3...

Más tarde modificamos la nomenclatura para una mayor precisión y facilidad a la hora de leer los datos; viene explicado más adelante.

### INVESTIGACIÓN PRELIMINAR

#### Determinación del número de lanzamientos necesarios de cada avión.

Para determinar el número de lanzamientos que debíamos hacer con cada avión, comenzamos lanzando cada uno diez veces con 80 gramos en las pesas de arrastre. Como nuestra intención no era ahora estudiar el número de pesas que debía colocar, las dejamos fijas, pues lo que nos interesaba era que todos los aviones saliesen con la misma velocidad. Al pasar los primeros datos a Excel, nos dimos cuenta de que los datos eran muy parecidos y no valía la pena realizar 10 lanzamientos con el mismo avión. Por tanto, debíamos buscar otra forma más rápida y eficaz. Aquí se ve la tabla del avión de 100 g/m<sup>2</sup> con 9 de sus lanzamientos.

(Ver demás tablas en anexos).

100 grs	T1: Tiempo aceleración	V <sub>s</sub> (m/s)	T2: Tiempo de aterriaje	T vuelo	V <sub>f</sub> (m/s)
			T2-T1		
1	1,004	1,843	2,940	1,936	1,004
2	1,045	1,770	2,881	1,836	1,045
3	1,047	1,767	2,963	1,916	1,047
4	1,043	1,774	2,992	1,949	1,043
5	1,096	1,688	2,951	1,855	1,096
6	1,088	1,700	2,990	1,902	1,088
7	1,162	1,592	2,971	1,809	1,162
8	1,113	1,637	2,985	1,855	1,130
9	1,089	1,699	2,944	1,855	1,089

Calculamos la desviación:

$$\left( \frac{\text{max} - \text{min}}{\text{tiempo medio}} \right) \cdot 100$$

	T. vuelo (s)	Velocidad(m/s)
Valor medio	1,88	1,08
Desviación	0,05	0,05
Porcentaje	2%	4%

El porcentaje de desviación era bajo, por lo que dedujimos que no era necesario tomar tantos datos. Decidimos entonces lanzar cada avión tres veces y anotarlos de la siguiente manera:

avión	masa	tiempo aceleración	t.aceleración medio	% Dispersión	tiempo aterriaje	t.aterriaje medio	% Dispersión	t.vuelo medio	vel. salida
A805	50	1,111	1,110	1%	3,269	3,205	4%	2,095	1,667
		1,106			3,154				
		1,113			3,191				

Los datos en gris son los obtenidos en la lanzadera. Así es como íbamos a anotar todos los datos de aquí en adelante.

**SEGUNDO OBJETIVO: Estudiar la influencia de la densidad del papel en el tiempo de vuelo de los aviones y las pesas de arrastre óptimas.**

**Modelo A**

Estos dos estudios los realizamos a la vez, considerando los mismos lanzamientos. Para estudiar la influencia de la densidad, construimos nueve aviones:

A805, A806, A807, A1001, A1002, A1003, A1201, A1202, A1203

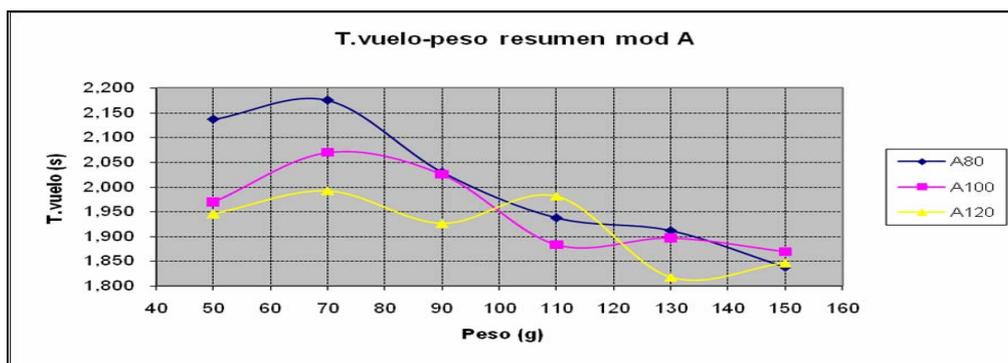
Para estudiar las pesas de arrastre, lanzamos cada avión con unas pesas de 50, 70, 90, 110, 130 y 150 gramos

Los datos se recogieron así: (Ver tablas completas en anexos)

avión A805	Masa(g)	tiempo Aceleración(s)	t.aceleración Medio(s)	% Dispersión	tiempo Aterrizaje(s)	t.aterrizaje Medio(s)	% Dispersión	t.vuelo Medio(s)	Vel. Salida(m/s)
50		1,111	1,110	1%	3,269	3,205	4%	2,095	1,667
		1,106			3,154				
		1,113			3,191				
70		0,965	0,973	2%	3,246	3,126	7%	2,153	1,902
		0,970			3,097				
		0,983			3,034				

La tabla y gráfica obtenidas con los tiempos de vuelo medio de estos lanzamientos son los siguientes:

A80 (promedio)		A100 (promedio)		A120 (promedio)	
Peso (g)	T.vuelo (s)	Peso (g)	T.vuelo (s)	Peso (g)	T.vuelo (s)
50	2,136	50	1,969	50	1,946
70	2,175	70	2,069	70	1,992
90	2,030	90	2,025	90	1,926
110	1,938	110	1,884	110	1,981
130	1,912	130	1,897	130	1,818
150	1,838	150	1,870	150	1,847



**ANÁLISIS DE LA DENSIDAD DEL PAPEL**

Para analizar la densidad del papel, hay que fijarse en lo que varía una función respecto de otra. Así pues, se observa que la función azul (A80) claramente vuela más tiempo. Luego estaría la rosa (A100) y por último la amarilla (A120). Así, de esta gráfica dedujimos que la densidad óptima de papel era la de 80 g/m<sup>2</sup>. Lo cual era bastante previsible, pues es el papel menos denso, y por lo tanto el que pesa menos.

Con los aviones de 120 gramos había una clara desigualdad en los datos y nosotras mismas al lanzarlos observábamos que su vuelo era bastante anárquico, debido posiblemente a la imprecisión de la construcción de un avión que es prácticamente de “cartulina”. Por lo tanto, después de hacer varios lanzamientos con esta densidad de papel, descartamos los modelos de 120 g/m<sup>2</sup>.

ANÁLISIS DE LAS PESAS DE ARRASTRE ÓPTIMAS

Para analizar los resultados de las pesas de arrastre, hay que buscar el punto más alto de cada función. En los tres casos, el punto más alto de la función se sitúa en 70 gramos. Por lo tanto, se puede deducir que en torno a 70 está el punto máximo, peso que utilizamos en el resto de las mediciones

**Modelo B**

En los modelos B, decidimos construir sólo un avión de cada modelo, pues los datos eran muy parecidos de un avión a otro y no merecía la pena perder tiempo en construir un mismo avión dos veces. Así pues, realizamos el mismo proceso con los aviones B. En las tablas de datos se observa que la dispersión de los datos de la velocidad de salida está en torno al 1%, con lo cual los datos los tomamos como válidos. En el momento que uno de los aviones nos daba una dispersión claramente mayor, repetíamos los lanzamientos hasta reducirla.

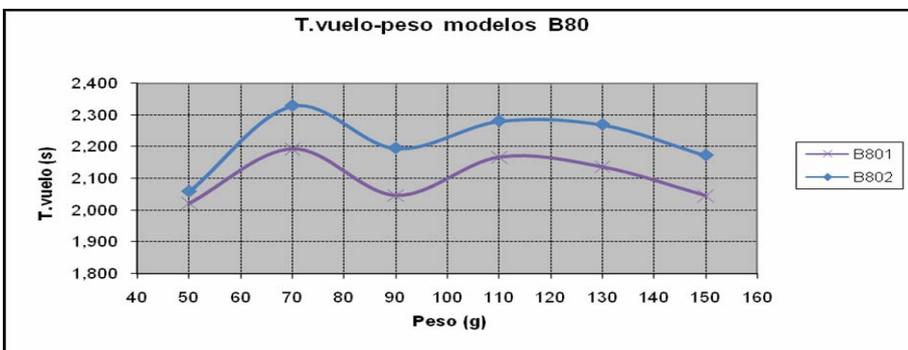
Construimos tres aviones: B801, B802 Y B1001. Los datos los recogimos así:

Espacio (m): 0,925  $V_s = \frac{2 \cdot e}{t}$

B801	masa	tiempo aceleración	t.aceleración medio	% Dispersión	tiempo aterrizaje	t.aterrizaje medio	% Dispersión	t.vuelo medio	Vel. Salida
	50		1,094	1,086	1%	3,088	3,108	5%	2,022
		1,079	3,048						
		1,086	3,189						
70		0,958	0,965	1%	3,069	3,160	5%	2,195	0,000
		0,967			3,198				
		0,970			3,212				

A cada avión le corresponde una tabla como ésta.

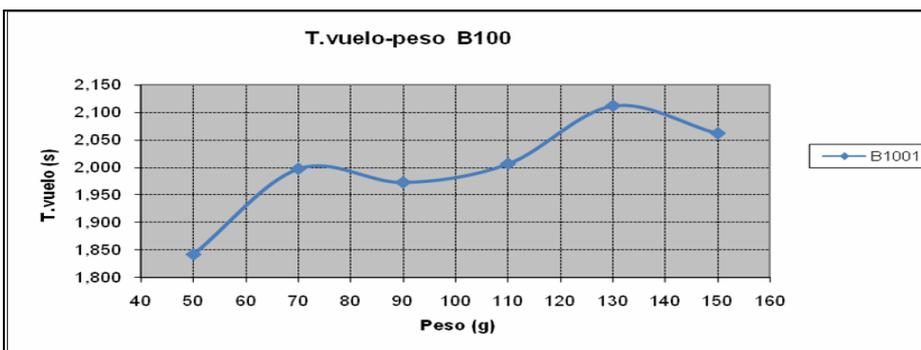
B80



Gráfica 2

En la gráfica 2, cada función representa un avión. Ambos aviones son exactamente iguales pero al ser aviones de papel, su comportamiento puede ser irregular. Aun así, ambos describen la misma curva, y en ambos el máximo está en torno a 70 gramos.

B100



Gráfica 3

La gráfica 3 corresponde al avión B1001 (cuyo papel tiene mayor densidad que los B80). En éste, el máximo está en torno a 130 gramos, pero aun así sigue siendo claramente más bajo que los B80: en esos está entre 2'200 y 2'300 segundos y en este está en torno a 2'100 segundos.

Llegado este momento, decidimos descartar todos los aviones cuya densidad fuese de 100 ó 120 gramos, pues todos los aviones habían tenido un vuelo claramente peor.

Debido también a la complejidad del trabajo decidimos no estudiar estos modelos, pero si lo hubiéramos hecho, seguramente hubiésemos obtenido una velocidad óptima diferente para cada peso del papel.

Ya que nuestro objetivo era encontrar el diseño óptimo del avión, y el grado de optimización lo estábamos midiendo según el tiempo que estaban en el aire, decidimos trabajar sólo con los modelos de 80 gramos de papel, ya que nos habían dado los mejores resultados.

Ya podíamos, por tanto, obtener las primeras dos conclusiones:

- **La velocidad óptima de lanzamiento para los aviones de papel, genéricamente es cuando la masa de las pesas de arrastre es de 70 gramos, es decir, aproximadamente 1,9 metros por segundo.**
- **De las densidades de 80 g/m<sup>2</sup> 100 g/m<sup>2</sup> y 120 g/m<sup>2</sup>, los aviones que más tiempo permanecen en el aire son los construidos con papel de 80 g/m<sup>2</sup>.**

En este punto, comenzamos a modificar los aviones fijando la velocidad de salida, que iba a ser la que le comunicasen los 70 gramos de las pesas de arrastre, y la densidad de papel, que sería de 80 g/m<sup>2</sup>.

**OBJETIVO 3 Búsqueda del diseño óptimo de cada uno de los dos modelos estudiados con ayuda de la interpolación**

**ESTUDIO DEL MODELO A**

Para este modelo tomamos dos variables en el diseño de los aviones: el cierre del ala y el alerón.

Cierre del ala. Variaríamos el lugar donde se dobla al construir las alas del avión.



Alerón. Variaríamos su longitud. La anchura la mantendríamos de 1 cm, ya que en pruebas anteriores al introducirle mayor grosor el avión oscilaba mucho en el vuelo



En el cierre del ala tomamos inicialmente dos modificaciones: una doblando a 0 cm del centro del avión (avión estándar), otra doblando a 1,6 cm y otra a 3,32 cm.

En el alerón, tomamos tres longitudes: 2, 3 y 5 cm. Hasta el momento, todos los habíamos construido con 5 cm. Construimos por tanto nueve aviones:

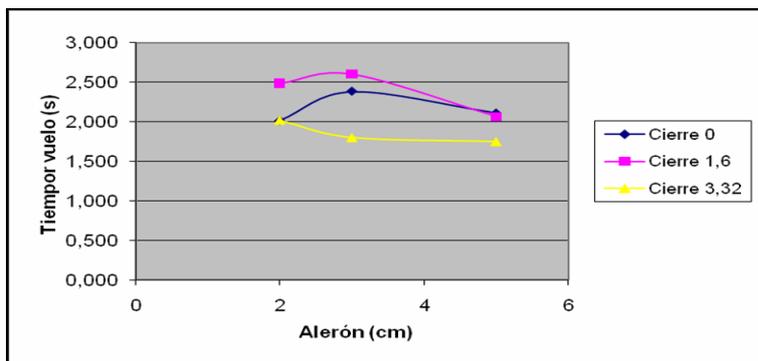
Cierre del ala (cm)	0,00	0,00	0,00	1,66	1,66	1,66	3,33	3,33	3,33
Alerón (cm)	2	2	2	3	3	3	5	5	5

Los datos los registramos de la siguiente manera

avión	cierre del ala	alerón (cm)	t. aceleración	t. aceleración medio	% Dispersión	t. aterrizaje	t. aterrizaje medio	% Dispersión	t. vuelo
A808	0	5	0,969	0,970	3%	3,163	3,079	4%	2,108
			0,984			3,026			
			0,958			3,047			

Ya que teníamos dos variables (cierres del ala y alerón) y la función sería el tiempo de vuelo, la función de interpolación sería una función de dos dimensiones y el gráfico de tres. Utilizamos gráficas x-y de Excel.

Una de estas gráficas es la siguiente:



cierre del ala	alerón (cm)	t.vuelo
0	2	2,012
0	3	2,383
0	5	2,108
1,6	2	2,485
1,6	3	2,600
1,6	5	2,067
3,32	2	2,018
3,32	3	1,799
3,32	5	1,747

En estas nuevas gráficas, cada punto representa un avión.

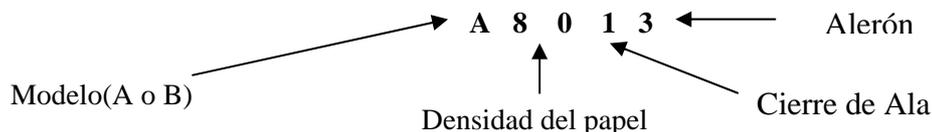
En esta gráfica se puede comprobar que el cierre del ala que mejor ha funcionado es el de 1,66 cm, pero no obstante, no podemos descartar el de 0 cm, ya que solamente ha sido una primera prueba. Lo que sí podemos descartar es el cierre de 3,33 cm, pues claramente funciona peor que el resto.

Para buscar la zona del máximo decidimos probar con dos cierres de vuelo más. Si el que mejores resultados había obtenido era el de 1,6 cm, construimos aviones con cierres de 1, 1.5 y 2 cm. Respecto a los alerones, ya que los de 2 y 3 cm habían volado favorablemente, construimos aviones con alerones de 2,5 y 3,5 cm.

### NOMENCLATURA II (MODELO A)

Llegado este momento, y debido a la complejidad de los modelos, decidimos cambiar la nomenclatura de los aviones, para hacerla así más precisa y eficaz.

Los dos primeros dígitos iban a seguir significando lo mismo: el modelo del avión y su densidad. Pero los dígitos de a continuación indicarían las características de ese avión. La primera el cierre del ala, y la segunda el alerón. Lo explicaremos con un ejemplo:

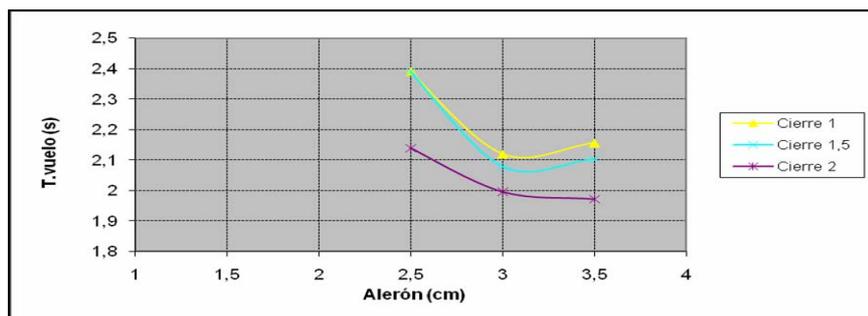


De esta forma puedes saber directamente la clase de avión y las características con sólo mirar el nombre.

Por lo tanto, los nuevos aviones construidos fueron:

AVIÓN	CIERRE ALA	ALERÓN
A801-2.5	1	2,5
A801-3	1	3
A801-3.5	1	3,5
A802-2.5	2	2,5
A802-3	2	3
A802-3.5	2	3,5
A801.5-2.5	1,5	2,5
A801.5-3	1,5	3
A801.5-3.5	1,5	3,5

Tras recoger los datos, obtuvimos la siguiente gráfica:



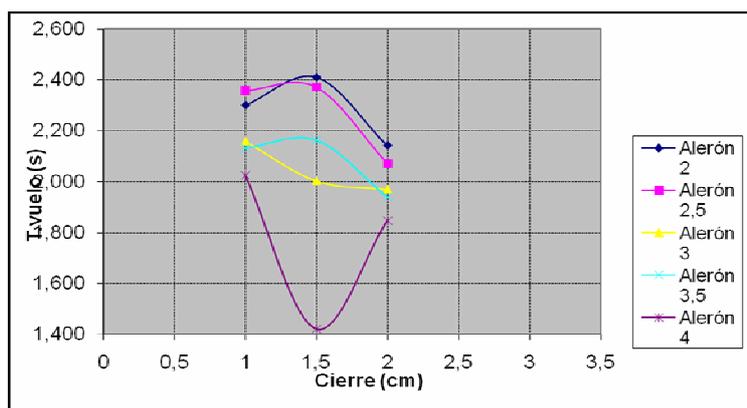
Gráfica 6

cierre del ala	alerón (cm)	t.vuelo
1	2,5	2,391
1	3	2,120
1	3,5	2,156
1,5	2,5	2,391
1,5	3	2,080
1,5	3,5	2,104
2	2,5	2,139
2	3	1,997
2	3,5	1,973

En la gráfica 6, lo que se observa es que claramente todavía no hemos llegado al máximo, pues las tres funciones ascienden cuánto más pequeño es el alerón. Lo que sí se aprecia es que los cierres 1 y 1,5 tienen mejor resultado que el cierre 2.

Llegado este momento decidimos construir quince aviones más: cinco con cierre 1 cm y alerones 2, 2,5, 3, 3,5 y 4. Decidimos esto para verificar la gráfica anterior, y probar con alerón 2, ya que según la función, podría ser ese su máximo (pues la función del alerón 2,5 cm, la amarilla, es la más alta, la que mayor tiempo de vuelo ha obtenido). La intuición nos decía que el avión óptimo debería andar entre un cierre de 1cm y 1,5 y un alerón de 2 o 2,5 cm.

Los resultados de los lanzamientos fueron los siguientes:



Gráfica 8

alerón	cierre ala	t.vuelo
2	1	2,300
2,5	1	2,358
3	1	2,160
3,5	1	2,131
4	1	2,026
2	1,5	2,410
2,5	1,5	2,371
3	1,5	2,003
3,5	1,5	2,163
4	1,5	1,421
2	2	2,142
2,5	2	2,071
3	2	1,970
3,5	2	1,940
4	2	1,847

Efectivamente, la gráfica 8 volvía a decir lo mismo: los alerones 2 y 2,5 y el cierre 1,5 habían obtenido los mejores resultados.

El ajuste fino lo hicimos con la ayuda de la interpolación.

### INTERPOLACION DEL MODELO A

Una vez obtenidos de forma aproximada los valores óptimos para cada una de las variables, pasamos a interpolar. En el modelo A fijamos el alerón en 2 cm y optimizamos el cierre del ala

Las interpolaciones las realizamos por los métodos de Langrange y Newton.

MODELO A (alerón 2 cm)

Lagrange

$x_i$ (Cierre)	1	1,5	2
$F(x_i)$ Tiempo de vuelo	2,300	2,410	2,142

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot L_i(x) \quad \text{Donde para cada } i, L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Así,

$$P(x) = 2,300 \cdot \frac{(x-1,5) \cdot (x-2)}{0,5} + 2,410 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{-0,25} + 2,142 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-1,5)}{0,5}$$

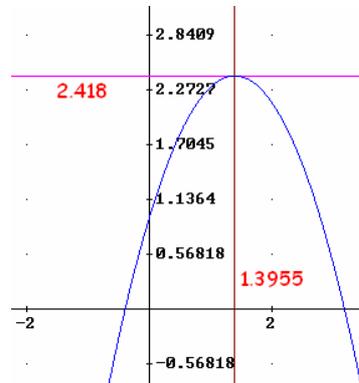
$$P(x) = -0,001 \cdot (756x^2 - 2110x - 946)$$

Igualando la primera derivada a cero:

$$P'(x) = -0,001 \cdot (1512x - 2110) = 0$$

$$x = 1,3955$$

El máximo está cuando el **cierre de ala es 1,3955 cm.**



Newton

$x_i$	1	1,5	2
$F(x_i)$	2,300	2,410	2,142

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta f(x_0)}{h} + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! \cdot h^2}$$

Tabla de diferencias finitas:

$$f(x_0) = 2,300$$

$$\Delta f(x_0) = 0,11$$

$$\Delta^2 f(x_0) = -0,378$$

$$f(x_1) = 2,410$$

$$\Delta f(x_1) = -0,268$$

$$f(x_2) = 2,142$$

$$P(x) = 2,300 + (x-1) \cdot \frac{0,11}{0,5} + (x-1) \cdot (x-1,5) \cdot \frac{(-0,378)}{2! \cdot 0,5^2}$$

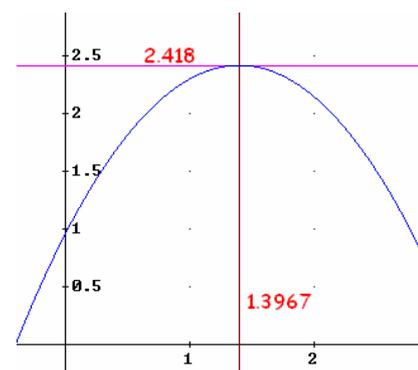
$$P(x) = -0,001 \cdot (750x^2 - 2095x - 955)$$

Calculamos la primera derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = -0,001 \cdot (1500x - 2095) = 0$$

$$x = 1,3967$$

El máximo está en **1,3967 cm de cierre de ala.**



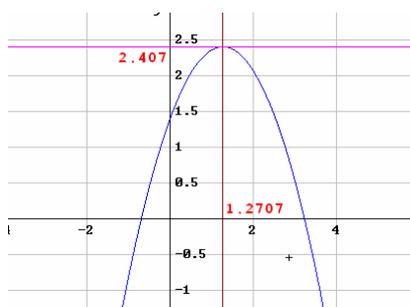
La diferencia entre las dos interpolaciones es del orden de las milésimas.

MODELO A' (alerón 2,5 cm)

Lagrange

Procediendo de igual manera que en el ejemplo anterior, obtuvimos el siguiente polinomio:

$x_i$	1	1,5	2
$F(x_i)$	2,358	2,371	2,071



$$P(x) = -0,001 \cdot (626x - 1591x - 1393)$$

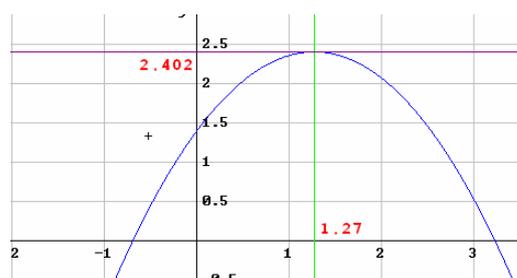
El máximo está cuando el cierre de ala es 1,2707 cm.

### Newton

$x_i$	1	1,5	2
$F(x_i)$	2,358	2,371	2,071

$$P(x) = -0,626x^2 + 1,591x + 1,393$$

El máximo está en **1,27 cm de cierre de ala.**



La diferencia entre las dos interpolaciones es del orden de las milésimas.

Así pues, pudimos llegar a nuestra tercera conclusión de este trabajo:

- **En el modelo A de estos aviones, para que se mantengan más tiempo en vuelo, se construirán con un cierre del ala en torno al 1,4 cm del centro del avión, y un alerón de 2 cm de largo.**

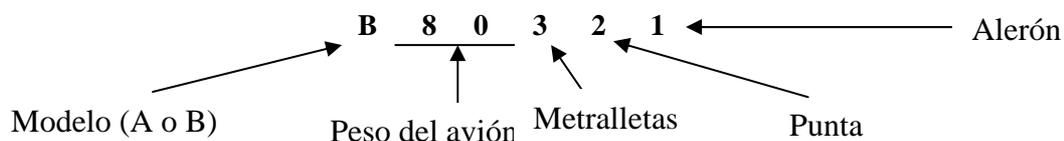
### ESTUDIO DEL MODELO B

Una vez cerrado el modelo A, trabajamos con los modelos B. En estos modelos, al ser más complejos, introdujimos una variable más. Éstas eran:

- **Metralletas.** Lo llamamos así debido a su aspecto. Se trata de dos elementos situados en la zona delantera del avión. Variará el lugar dónde empezamos a construirlas.
- **Punta.** Se trata como bien dice su nombre, de la punta o el pico del avión. Su variación consistirá en meterla más hacia dentro o sacarla más
- **Alerón.** Exactamente igual que en los modelos A.

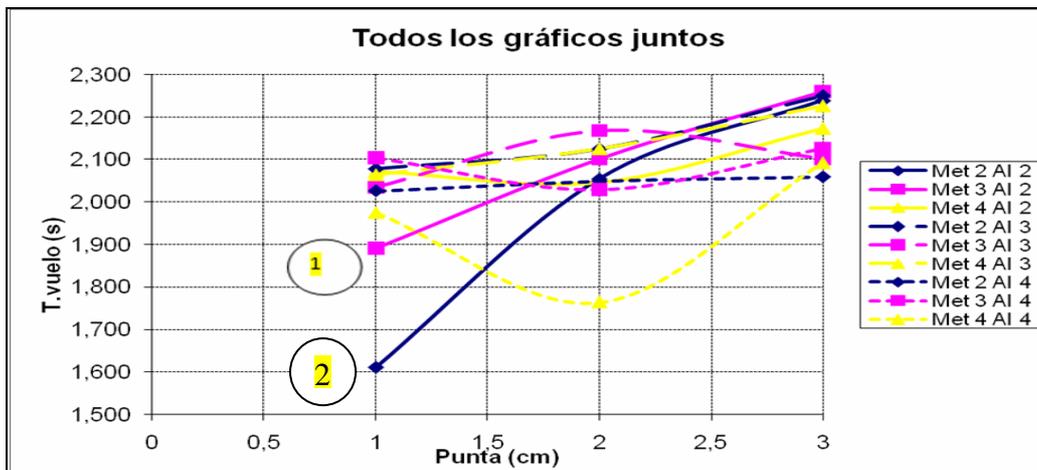


#### NOMENCLATURA II (MODELO B)



En primer lugar tomamos como medidas de las metrallas: 2, 3, y 4 cm. Como valores de la punta: 1, 2, y 3 cm. Y como valores del alerón: 2, 3 y 4 cm.

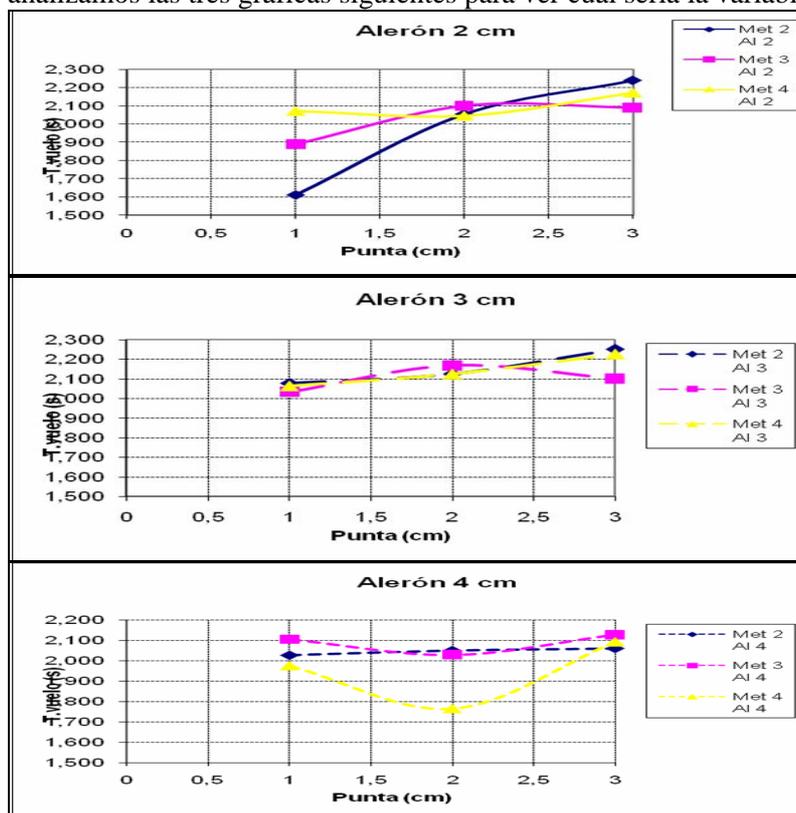
El archivo de los datos lo realizamos exactamente igual que en los casos anteriores. Tuvimos que construir 27 aviones para esta primera tanda. Los resultados los representamos en una gráfica que fue la siguiente:



Gráfica 9

De la gráfica 9 obtuvimos las siguientes conclusiones:

- En primer lugar, y lo que más destaca, es que cada avión (cada curva es uno) describe un comportamiento diferente, aunque los aviones 1 y 2 sí presentan un comportamiento muy parecido y además son los que presentan un tiempo de vuelo máximo (véase la parte derecha de la gráfica).
- En segundo lugar, se puede apreciar una clara tendencia a subir en casi todas las funciones, lo que nos hizo pensar que el máximo estaría aumentando la distancia en la punta, que en la construcción se traduce a esconderla más.
- Todavía no hay ninguna metralla que muestre un comportamiento claramente superior al resto. En este momento decidimos fijar una de las variables, ya que las construcciones de los aviones se estaban alejando de valores racionales, pues en cada medición teníamos que construir noventa aviones. Así pues, analizamos las tres gráficas siguientes para ver cuál sería la variable que dejaríamos como fija.



#### ALERÓN

Para determinar la variación de un alerón a otro hay que fijarse en las tres gráficas, se observa que prácticamente siguen la misma curva y exceptuando el alerón cuatro, en el tres y el dos el máximo está en el mismo sitio, por lo que su influencia es pequeña.

#### PUNTA

Como se puede observar en cualquiera de las gráficas, mejor en la gráfica 10, al variar la punta varía bastante la función, por lo que es una variable que no podíamos fijar, ya que además tiene tendencia a subir y esa tendencia teníamos que medirla.

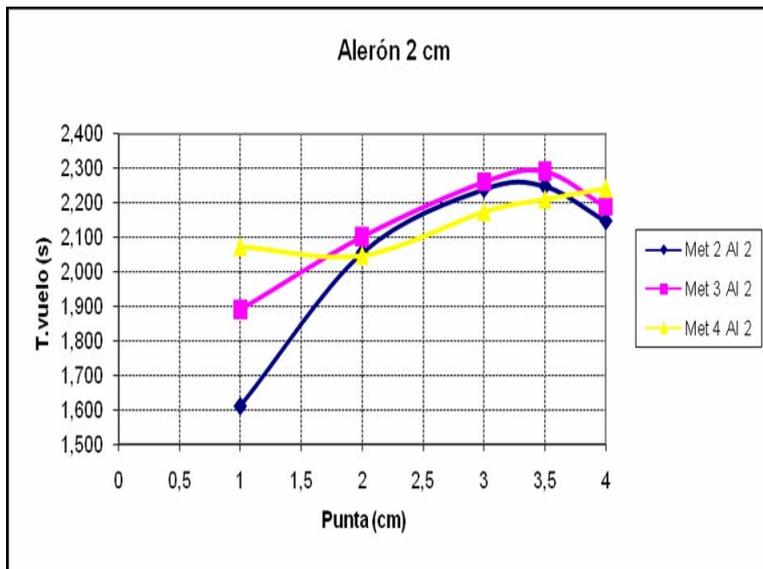
#### METRALLAS

Para observar la variación de las metrallas hay que fijarse en una función y otra de la misma gráfica. Se puede comprobar que es una de las variables más importantes, ya que las metrallas 2 y 3 tienen mejor resultado. Tampoco podíamos fijar esta variable

Tras el análisis de las gráficas anteriores, decidimos dejar fijo el alerón en 2. El alerón tiene la función de darle estabilidad al avión, mientras que la punta y las metrallas varían el centro de masas del mismo. Así pues, un alerón ayudará a que el avión esté más estable en el vuelo, pero unas metrallas o una punta muy dispersas, pueden hacer al avión caer en picado.

En los próximos lanzamientos mantuvimos el alerón en 2. Elegimos el 2 y no el 3 porque en la gráfica de todos los aviones, el punto máximo pertenecía al alerón 2.

A continuación decidimos construir seis aviones más, que tuviesen la punta de 3,5 y 4 cm, pues se ve claramente la tendencia a subir en la función de la gráfica anterior correspondiente al alerón 2. Obtuvimos los siguientes resultados:



Alerón 2 cm		
Metrallas	Punta	t.vuelo
2	1	1,611
2	2	2,055
2	3	2,239
3	1	1,891
3	2	2,102
3	3	2,260
4	1	2,073
4	2	2,047
4	3	2,173
2	3,5	2,248
2	4	2,147
3	3,5	2,290
3	4	2,188
4	3,5	2,209
4	4	2,241

Volvimos a interpolar los nuevos datos obteniendo:

MODELO B' (metrallas 3 cm)

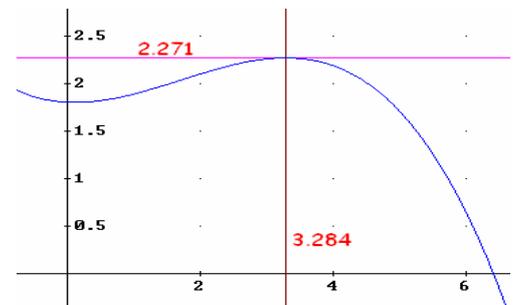
Lagrange

$x_i$ (Punta)	1	2	3	4
$F(x_i)$ (T vuelo)	1,891	2,102	2,260	2,188

Procediendo igual que en el modelo A obtuvimos el siguiente polinomio de interpolación:

$$P(x) = -0,001 \cdot (29,5x^3 - 150,5x^2 + 34x - 1804)$$

El máximo está en una punta de **3,284 cm**



### Newton

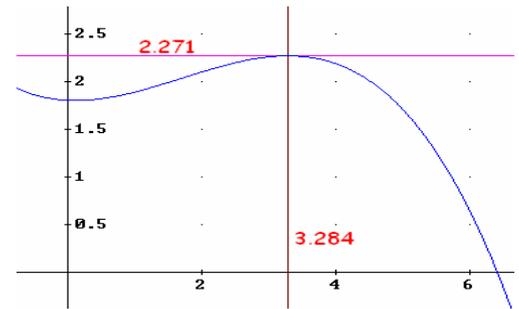
$x_i$	1	2	3	4
$F(x_i)$	1,891	2,102	2,260	2,188

El polinomio de interpolación para este caso queda de la siguiente forma

$$P(x) = -0,001 \cdot (29,5x^3 - 150,5x^2 + 34x - 1804)$$

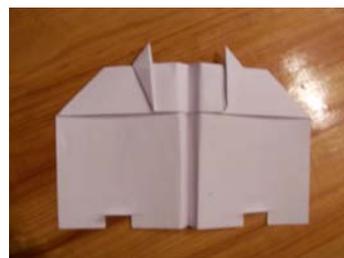
El máximo está en una punta de **3,284 cm**

Como se puede observar las dos gráficas son exactamente la misma.



### CONCLUSIONES DEL TRABAJO

- La velocidad de salida óptima de dos modelos clásicos de aviones de papel, con un ángulo de  $0^\circ$  parece estar alrededor de 1,9 metros por segundo.
- Entre 80, 100 y 120 de densidad de papel, los que se mantienen más tiempo en vuelo son los construidos con 80, es decir, el papel menos pesado.
- Dentro del modelo A, el cierre de ala óptimo parece estar en torno al 1,4cm y el alerón entre 2 y 2,5 cm.
- En el modelo B, el alerón óptimo parece ser el de 2 cm, las metralletas de 3 cm, y la punta 3,3cm.
- Matemáticamente, los modelos óptimos obtenidos con la interpolación serían el A80-1.39-2 y el B80-3-3.28-2, que están próximos a los obtenidos experimentalmente.



### POSIBLES MEJORAS Y AMPLIACIONES

- Mejorar la precisión en la velocidad de salida y la medición del tiempo de vuelo, ya que en la lanzadera que construimos tenía una dispersión del 1-2%, error que arrastrábamos después.
- Mejorar la precisión en la construcción, ya que a pesar de utilizar regla y construirlos lo más precisos posibles, no dejábamos de construir los aviones manualmente.
- Estudiar otros modelos de aviones de papel, pues hay muchísimas posibilidades.
- Estudiar otros factores (humedad del aire, alerones laterales, etc.) que puedan influir en el tiempo de vuelo del avión.
- Estudiar el espacio recorrido por el avión en vez del tiempo de vuelo.
- Aumenta el número de lanzamientos para minimizar el error
- Construir aviones con diferentes tamaños de papel, por ejemplo DIN A5, etc.

## DESCRIPCIÓN DETALLADA DE LA CONSTRUCCIÓN DEL MODELO B ÓPTIMO

### **Modelo B80-3-3.5-2 en 8 pasos.**

**PASO 1:** Llevar una de las esquinas del papel hacia el lado contrario hasta que quede alineado. Desdoblarlo y doblar el otro lado igual



Foto 37

**PASO 2:** Plegar el papel hasta que quede de la forma que se muestra en la fotografía 38.

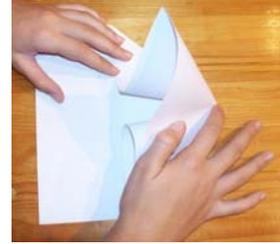


Foto 38

**PASO 3:** Medir 3 cm desde la punta y trazar una perpendicular

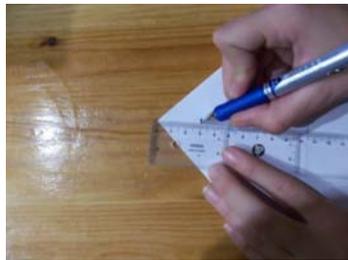


Foto 39

**PASO 4:** Llevar cada esquina al final de la línea trazada

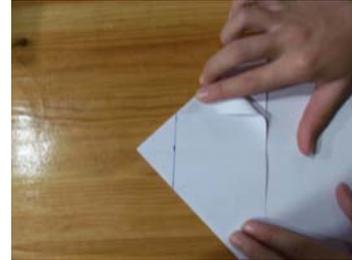


Foto 40

**PASO 5:** Construir las metralletas y dar la vuelta al avión para doblarlo a la mitad de las metralletas.

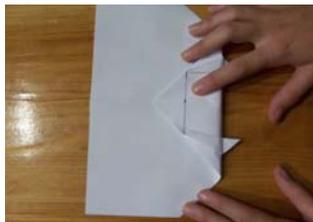


Foto 41

**PASO 6:** Medir 3.5 cm y trazar una perpendicular.

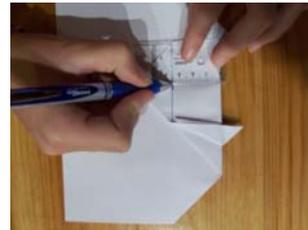


Foto 42

**PASO 7:** Doblar por la línea trazada.

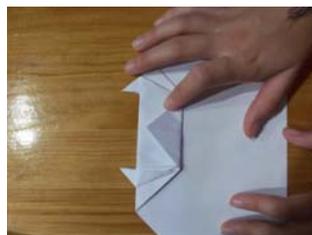


Foto 43

**PASO 8:** Construir la quilla de 1 cm y los alerones de 2 cm y *a volaar...*

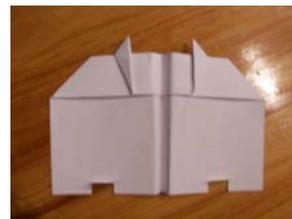


Foto 44

## VALORACION PERSONAL

Cuando comenzamos esta investigación, no sabíamos si íbamos a obtener algún resultado. De hecho, cuando hicimos los primeros lanzamientos vimos que los aviones volaban muy diferente unos de otros. Pero al ir avanzando en la investigación, nos dimos cuenta de que sí tenían algunas regularidades en su vuelo, y a pesar de que no hemos podido descubrir con exactitud el modelo óptimo, sí hemos podido dar una horquilla de valores dónde este se encuentra, lo cual ha supuesto para nosotras todo un éxito. Posiblemente estudiar las gráficas del vuelo de un avión de papel ha sido la parte más difícil de esta investigación, pero para nosotras, sin lugar a duda, la más bonita.

## BIBLIOGRAFÍA

- La información de los aviones de papel la obtuvimos de Internet de diversas páginas, tales como:
- [www.Avioncitosdepapel.com](http://www.Avioncitosdepapel.com)
- [www.origami-kids.com/avionesdepapel.htm](http://www.origami-kids.com/avionesdepapel.htm)
- [www.funversion.universia.es/hobbies/aficiones/aviones\\_papel.jsp](http://www.funversion.universia.es/hobbies/aficiones/aviones_papel.jsp).
- Libro 1º Bachillerato Matemáticas aplicadas
- Libro Física 4º ESO.
- Libro Análisis Numérico J.Rey.
- Apuntes.