



Asignatura: Curso Avanzado de Análisis
Código: 30073
Centro: Facultad de Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones
Nivel: Master M2
Tipo: Elective
Nº de créditos: 8

ASIGNATURA / **COURSE TITLE**

Curso Avanzado de Análisis / [Advanced course in Analysis](#)

1.1. Código / **Course number**

30073

1.2. Materia / **Content area**

Subespacios invariantes y teoría espectral de operadores / [Invariant subspaces and spectral theory of operators](#)

1.3. Tipo / **Course type**

Formación optativa / [Elective subject](#)

1.4. Nivel / **Course level**

Máster / [Master \(second cycle\)](#)

1.5. Curso / **Year**

2013/2014

1.6. Semestre / **Semester**

2º / [2nd \(Spring semester\)](#)

1.7. Número de créditos / **Credit allotment**

8 créditos ECTS / [8 ECTS credits](#)

1.8. Requisitos previos / **Prerequisites**

Es necesario haber seguido previamente varios cursos de análisis funcional, análisis armónico, análisis real y variable compleja.

[The students are required to have followed previously various courses on functional analysis, harmonic analysis, real analysis and complex variables.](#)



Asignatura: Curso Avanzado de Análisis
Código: 30073
Centro: Facultad de Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones
Nivel: Master M2
Tipo: Elective
Nº de créditos: 8

1.9. Requisitos mínimos de asistencia a las sesiones presenciales / **Minimum attendance requirement**

La asistencia a clase es muy recomendable.

Class attendance on a regular basis is strongly recommended.

1.10. Datos del equipo docente / **Faculty data**

Profesor / **Professor**: Dragan VUKOTIC JOVSIC

Department of Mathematics

Facultad de Ciencias

Despacho / **Office** - Módulo 08 - 208

Teléfono / **Telephone**: +34 91 497 6961

Email: dragan.vukotic@uam.es

Página web / **Homepage**: <http://www.uam.es/dragan.vukotic>

Horas de tutoría / **Office hours**: Flexible (Por cita previa / By appointment).

1.11. Objetivos del curso / **Course objectives**

Este curso se centrará en la teoría espectral de operadores lineales acotados y en el problema del subespacio invariante para espacios de Hilbert separables. Al final del cuatrimestre, el estudiante debería:

- conocer numerosos ejemplos de espacios y operadores que aparecen en varias ramas de análisis, dominar las técnicas básicas de la teoría espectral de operadores y conocer los fundamentos de la teoría de subespacios invariantes;
- ser capaz de relacionar los diferentes temas tratados durante el curso, observando diferencias y similitudes entre ellos;
- ser capaz de extender y desarrollar el material aprendido durante el curso, usando equipos técnicos y visuales que le permitirán comunicar resultados matemáticos de forma efectiva.

This course will focus on the spectral theory of bounded linear operators and the invariant subspace problem for separable Hilbert spaces. At the end of the course, the student should:

- *know a number of examples of spaces and operators that come up in various branches of analysis, master the basic techniques of spectral theory of operators and have some basic knowledge of the theory of invariant subspaces;*



Asignatura: Curso Avanzado de Análisis
Código: 30073
Centro: Facultad de Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones
Nivel: Master M2
Tipo: Elective
Nº de créditos: 8

- be able to relate different topics covered in the course, observing similarities and differences among them;
- be able to expand upon the course content, using visual and technical aids that will improve effective communication of mathematical results.

1.12. Contenidos del programa / Course contents

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN Y REPASO: ESPACIOS Y OPERADORES LINEALES.

- Geometría de espacios de Hilbert. Bases y dimensión.
- Operadores y funcionales acotados. Diversos tipos de convergencia.
- Operador adjunto. Operadores positivos y raíces.

CAPÍTULO II: TEORÍA ESPECTRAL DE OPERADORES: UN CURSO ACELERADO

- Operadores de rango finito. Operadores compactos.
- Autovalores y autovectores. Espectro y resolvente de un operador acotado.
- Proyecciones. Isometrías. Operadores unitarios. Equivalencia unitaria.
- Operador de desplazamiento unilateral. Descomposición de Wold.
- Álgebras de Banach. Ideales y homomorfismos. La transformada de Gelfand. Álgebras C^* .
- Resoluciones de la identidad. Cálculo funcional de Riesz.
- Operadores autoadjuntos. Teorema espectral.
- Operadores normales. Teorema espectral y operadores de multiplicación.

CAPÍTULO III: SUBESPACIOS INVARIANTES.

- Subespacios invariantes e hiper-invariantes. Retículo de subespacios invariantes de un operador.
- Respuestas en los espacios de dimensión finita. Comentarios sobre contraejemplos (Enflo, Read) en el caso de espacios de Banach.
- Teorema de Aronszajn-Smith. Teorema de Lomonosov. Una generalización: teorema de Daughtry.
- Operadores subnormales. Teorema de S. Brown.
- Operadores contractivos. Modelos. Operadores polinomialmente acotados. Teorema de Apostol.
- Operadores universales de Rota. Teorema de Caradus.

CAPÍTULO IV: ESPACIOS DE HARDY Y BERGMAN. OPERADOR DE DESPLAZAMIENTO



Asignatura: Curso Avanzado de Análisis
Código: 30073
Centro: Facultad de Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones
Nivel: Master M2
Tipo: Elective
Nº de créditos: 8

- Núcleo de Poisson. Fórmula de Jensen. El espacio de Hardy del disco. Límites radiales.
- Productos de Blaschke, factorización de Riesz. Funciones internas y externas.
- El espacio de Hardy del semiplano. Teorema de Paley-Wiener.
- El operador de desplazamiento. Teorema de Beurling; demostración de Helson y Lowdenslager. Teorema de Lax para el semiplano.
- Operador de Volterra. Teorema de Donoghue.
- Espacio de Bergman. Relaciones y diferencias con el espacio de Hardy. Índice de un subespacio invariante. Un análogo parcial del teorema de Beurling.

Nota: Varios puntos del programa podrían ser modificados o suprimidos si las restricciones de tiempo así lo aconsejan.

CHAPTER I: INTRODUCTION AND REVIEW: SPACES AND OPERATORS.

- Geometry of Hilbert spaces. Bases and dimension.
- Bounded operators and functionals. Different types of convergence.
- Adjoint. Positive operators and roots.

CHAPTER II: A CRASH COURSE ON SPECTRAL THEORY OF OPERATORS

- Finite rank operators. Compact operators.
- Eigenvalues and eigenvectors. Spectrum and resolvent of a bounded operator.
- Projections. Isometries. Unitary operators. Unitary equivalence.
- Unilateral shifts. The Wold decomposition.
- Banach algebras. Ideals and homomorphisms. Gelfand transform. C^* -algebras.
- Resolution of the identity. The Riesz functional calculus.
- Self-adjoint operators. Spectral theorem.
- Normal operators. Spectral theorem and multiplication operators.

CHAPTER III: INVARIANT SUBSPACES.

- Invariant and hyperinvariant subspaces. Lattice of invariant subspaces of an operator.
- Answers for the spaces of finite dimension. Comments on counterexamples (Enflo, Read) in the Banach space case.
- Theorem of Aronszajn and Smith. Lomonosov's theorem. A generalization: Daughtry's theorem.
- Subnormal operators. Theorem of S. Brown.
- Contractive operators. Models. Polynomially bounded operators. Apostol's theorem.



Asignatura: Curso Avanzado de Análisis
Código: 30073
Centro: Facultad de Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones
Nivel: Master M2
Tipo: Elective
Nº de créditos: 8

- Rota's universal operators. Theorem of Caradus.

CHAPTER IV: THE LATTICE OF INVARIANT SUBSPACES OF CONCRETE OPERATORS

- The Poisson kernel. Jensen's formula. The Hardy space of the disk. Radial limits.
- Blaschke products, Riesz factorization. Inner and outer functions.
- The Hardy space of the half-plane. Paley-Wiener's theorem.
- The shift operator. Beurling's theorem. The proof of Helson and Lowdenslager. Lax's theorem for the half-plane.
- The Volterra operator. Donoghue's theorem.
- The Bergman space. Relationships and differences with the Hardy space. Index of an invariant subspace. A partial analogue of Beurling's theorem.

Note: Various items of this syllabus may be modified or omitted as time permits.

1.13. Referencias de consulta / Course bibliography

Se estudiarán varios capítulos de algunas de las siguientes monografías (u otras similares).

Various chapters of some of the following (or similar) monographs will be studied.

- N.I. Akhiezer, I.M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Vol. I and II, Dover, New York 1993.
- B. Beauzamy: *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, North-Holland, Amsterdam 1988.
- I. Chalendar, J. Partington: *Modern Approaches to the Invariant-Subspace Problem*, Cambridge University Press, Cambridge 2011.
- J.B. Conway: *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York 1985.
- P.L. Duren: *Theory of H^p Spaces* (2nd edition), Dover, Mineola, NY 2000.
- K. Hoffman: *Banach Spaces of Analytic Functions* (reprint), Dover, New York 1988.
- P. Lax: *Functional Analysis*, Wiley-Interscience, New York 2003.



Asignatura: Curso Avanzado de Análisis
Código: 30073
Centro: Facultad de Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones
Nivel: Master M2
Tipo: Elective
Nº de créditos: 8

- B.-S. Nagy, C. Foias, H. Bercovici, L. Kérchy: *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space* (2nd edition), Springer, New York 2010.
- H. Radjavi, P. Rosenthal: *Invariant Subspaces* (2nd edition), Dover 2003.
- W. Rudin: *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York 1973.

Se consultarán también diversos artículos de investigación breves. Se proporcionarán apuntes u otros materiales adicionales a los asistentes.

Various short research papers will be consulted as well. Some lecture notes or other additional materials will be made available to the course attendants.

2. Métodos docentes / Teaching methodology

Este es un curso avanzado. Por tanto, se espera que los estudiantes participen de forma activa y muestren cierta originalidad en su trabajo. Muchas demostraciones serán presentadas de forma esquemática y los detalles se dejarán para los alumnos interesados. Algunos temas serán tratados sólo a nivel informativo. Además, cada estudiante tendrá la opción de presentar un tema al final del curso en una charla de 15-25 minutos y, en tal caso, dispondría del tiempo suficiente para preparar el tema.

This is an advanced course. Thus, the students are expected to participate actively and show some originality in their work. Many proofs will only be sketched and the details will be left to the interested students. Some topics will only be treated in an informative way. There will be several problem sheets and/or one term paper, assigned on a regular basis, to be handed in before a given deadline. In addition to this, every student will have an option of presenting a course topic in a 15-25 minute talk and, in this case, would be given sufficient time to prepare the talk.

3. Tiempo de trabajo del estudiante / Student workload

		Nº de horas	Porcentaje
Attendance activities	Class lectures	40h (20%)	70 h (35%)
	Office hours	16h (8%)	
	Seminars and term papers	12h (6%)	
	Others	-	



Asignatura: Curso Avanzado de Análisis
Código: 30073
Centro: Facultad de Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones
Nivel: Master M2
Tipo: Elective
Nº de créditos: 8

	Final exam	2h (1%)	
Non attendance activities	Problems preparation	78h (39%)	130 h (65%)
	Weekly study	46h (23%)	
	Exam preparation	6h (3%)	
Total workload: 25 horas x 8 ECTS		200	

4. Métodos de evaluación y porcentaje en la calificación final / **Evaluation procedures and weight of components in the final grade**

- 1) Ejercicios para entregar: 40%.
- 2) Examen final o actividades complementarias: 50%.
- 3) Participación en clase: 10%.

Habrá dos o tres hojas de problemas (en total, hasta 30 ejercicios) cuyas soluciones se entregarán antes de una fecha predeterminada.

La realización del Examen Final se podrá sustituir por cualquiera de las siguientes actividades complementarias (que se desarrollarían al final del curso):

- (a) la entrega de un trabajo y su breve presentación en un seminario;
- (b) la entrega de soluciones de hasta 5 ejercicios de mayor grado de dificultad.

- 1) Homework assignments: 40%.
- 2) Final exam or complementary activities: 50%.
- 3) Participation in class: 10%.

There will be two or three problem sheets (up to a total of 30 exercises) whose solutions are to be handed in before a predetermined deadline.

The final exam can be substituted by any of the following complementary activities (to be carried out at the end of the term):

- (a) a term paper, to be handed in and presented in a brief seminar talk;
- (b) solutions to up to 5 exercises of higher level of difficulty.



Asignatura: Curso Avanzado de Análisis
Código: 30073
Centro: Facultad de Ciencias
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones
Nivel: Master M2
Tipo: Elective
Nº de créditos: 8

EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA / [Make-up exam](#).

Examen ante tribunal de Máster/ [Examination by the Master Program Committee](#).

5. Cronograma* / [Course calendar](#)

Semana Week	Contenido Contents	Horas presenciales Contact hours	Horas no presenciales Independent study time
1	Hilbert spaces	5	10
2	Operators and functionals	5	10
3	Projections. Isometries	5	10 Problem sheet
4	Banach algebra. Spectrum	5	10
5	Functional calculus	5	10
6	Spectral theorems	5	10 Problem sheet
7	Invariant subspaces	5	10
8	Contractions. Models	5	10
9	Universal operators	6	10
10	Hardy spaces	6	10
11	The shift operator	6	10 Presentations
12	The Volterra operator	6	10 Presentations
13	Bergman space theory	6	10 Presentations

*This course calendar is tentative.