



Asignatura: Curso avanzado de EDP's  
Código: 30074  
Centro: Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones  
Nivel: Máster M2  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8

## ASIGNATURA / COURSE TITLE

Curso avanzado de EDP's / [Advanced Course in Partial Differential Equations](#)

### 1.1. Código / Course number

30074

### 1.2. Materia / Content área

Partial Differential Equations

### 1.3. Tipo / Course type:

Formación optativa / [Elective subject](#)

### 1.4. Nivel / Course level:

Máster M2 / [Master M2](#)

### 1.5. Curso / Year:

2013/2014

### 1.6. Semestre / Semester

Segundo / [Second \(Spring semester\)](#)

### 1.7. Número de créditos / Credit allotment

8 créditos ECTS / [8 ECTS credits](#)

### 1.8. Requisitos previos / Prerequisites

Asumimos que el estudiante conoce los fundamentos de ecuaciones diferenciales ordinarias, teoría de la medida, análisis funcional (distribuciones, operadores auto-adjuntos y compactos en espacios de Hilbert, espacios de Sobolev y sus embebimientos, interpolación), y el cálculo de variaciones (minimización de funcionales coercitivos y débilmente semicontinuos inferiormente). La mayoría de este material se



Asignatura: Curso avanzado de EDP's  
Código: 30074  
Centro: Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones  
Nivel: Máster M2  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8

cubre en los cursos de Ecuaciones en *Derivadas Parciales en Ciencias e Ingeniería* y *Fundamentos de Análisis Matemático*, que se imparten durante el primer semestre del máster.

We assume knowledge of the fundamentals of ordinary differential equations, measure theory, functional analysis (distributions, self-adjoint and compact operators in Hilbert spaces, Sobolev spaces and their embeddings, interpolation), and calculus of variations (minimizing of coercive, weakly lower semicontinuous functionals). Most of this material is covered in the courses *PDE's in Science and Engineering* and *Fundamentals of Mathematical Analysis*, both of them corresponding to the first semester of this master programme.

### 1.9. Requisitos mínimos de asistencia a las sesiones presenciales / **Minimum attendance requirement**

**La asistencia es obligatoria**

**The attendance to the course is compulsory**

### 1.10. Datos del equipo docente / **Faculty data**

Docente(s) / **Lecturer(s) Jesús Hernández Alonso**

Departamento de / **Department of Mathematics**

Facultad / **Faculty of Sciences**

Despacho - Módulo / **Office 309, módulo 17**

Teléfono / **Phone: +34 91 497 3911**

Correo electrónico/**Email: [jesus.hernandez@uam.es](mailto:jesus.hernandez@uam.es)**

Página web/**Website:**

Horario de atención al alumnado/**Office hours: m-j 10-12 and 16-17**

### 1.11. Objetivos del curso / **Course objectives**

El principal objetivo de este curso es mostrar cómo las principales técnicas del Análisis Funcional no Lineal -bifurcación, sub y supersoluciones, métodos Variacionales, continuación, teoría del grado- pueden ser extendidas al estudio de problemas elípticos( y parabólicos) singulares, con los oportunos cambios y refinamientos. Ello supone como condición previa un dominio suficiente de ellas en el estudio de los problemas con no linealidades



Asignatura: Curso avanzado de EDP's  
Código: 30074  
Centro: Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones  
Nivel: Máster M2  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8

regulares, que se completará si es necesario antes de estudiar el caso singular.

En la medida de lo posible, se intentará presentar problemas abiertos interesantes, sobre todo en el estudio de la multiplicidad de soluciones positivas y de soporte compacto.

The main goal of this course is to show how the main techniques in the field of Nonlinear Functional Analysis- namely bifurcation, sub and supersolutions, variational methods, continuation, degree theory-can be extended to the study of elliptic( and parabolic) singular problems with the appropriate changes and improvements. This requires a mastery in the use of these techniques for smooth nonlinearities, which will be developed if necessary.

Some interesting open problems will be studied as well. They concern mainly existence and multiplicity of positive and compact support solutions.

## 1.12. Contenidos del programa / Course contents

### 1.- Introducción

1. Teoría básica para ecuaciones lineales elípticas. Existencia, unicidad y regularidad de soluciones. Principios del máximo.

2. Ecuaciones elípticas semilineales: métodos de sub y supersoluciones, bifurcación global y puntos críticos.

3. Problemas de frontera libre.

### 2.- Problemas elípticos singulares lineales.

1. Existencia, unicidad y regularidad de soluciones positivas.

2. Problemas lineales de valores propios.

### 3. Problemas elípticos singulares no lineales.

1. Existencia de soluciones positivas, método de sub y supersoluciones. Resultados de unicidad y regularidad. Soluciones clásicas y soluciones débiles. Aplicaciones.

2. Métodos de bifurcación asintótica. Aplicaciones.

### 4. Resultados de linealización.

1. Estabilidad linealizada. Teorema de la función implícita. Regularidad de las ramas de soluciones positivas.

2. Problema parabólico singular: existencia, unicidad y estabilidad linealizada.

Aplicaciones.

### 5. Soluciones positivas muy débiles.

1. Resultados de Díaz-Rakotoson para el problema lineal.

2. Aplicaciones a problemas elípticos semilineales singulares.



Asignatura: Curso avanzado de EDP's  
Código: 30074  
Centro: Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones  
Nivel: Máster M2  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8

## 6. Problemas abiertos.

1. Multiplicidad de soluciones positivas y de soporte compacto: métodos variacionales y topológicos. Caso unidimensional: métodos de energía.
2. Problemas de frontera libre elípticos y parabólicos.

### 1.- Introduction.

1. Basic theory for linear elliptic partial differential equations. Existence, uniqueness and regularity of solutions. Maximum principles.
2. Semilinear elliptic equations: bifurcation, sub and supersolutions and variational methods.
3. Free boundary problems.

### 2.Singular linear elliptic problems.

1. Existence, uniqueness and regularity for positive solutions.
2. Linear eigenvalue problems.

### 3.Nonlinear singular elliptic problems.

1. Existence of positive solutions: the method of sub and supersolutions. Uniqueness and regularity results. Classical solutions and weak solutions. Applications.
2. Asymptotic bifurcation. Applications.

### 4.Linearization theorems.

- 1.Linearized stability. The Implicit Function Theorem. Smoothness of positive solution branches.
2. Singular parabolic problems: existence, uniqueness and linearized stability. Applications.

### 5.Very weak positive solutions.

1. Results by Díaz and Rakotoson for the linear problem.
2. Applications to singular nonlinear elliptic problems.

### 6.Open problems.

1. Multiplicity of positive and compact support solutions: variational and topological methods. The one-dimensional case: energy methods.
2. Free boundary elliptic and parabolic problems.



Asignatura: Curso avanzado de EDP's  
Código: 30074  
Centro: Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones  
Nivel: Máster M2  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8

## 1.13. Referencias de consulta / **Course bibliography**

[1] M. G. Crandall, P. H. Rabinowitz y L. Tartar. On a Dirichlet problem with singular nonlinearity. *Comm. Part. Diff. Equat.* 2(1977), 192-222.

[2] J. I. Díaz, J. Hernández y F. Mancebo. Branches of positive and free boundary solutions for some singular quasilinear elliptic problems. *J Math. Anal. Appl.* 352(2009), 449-474.

[3] J. I. Díaz, J. Hernández y J. M. Rakotoson. On very weak positive solutions to some semilinear elliptic problems with simultaneous singular nonlinear and spatial dependence terms. *Milan J. Math.* 79(2011), 233-245.

[4] M. Ghergu y V. Radulescu. *Singular Elliptic Problems: Bifurcation and Asymptotic Analysis*. Oxford, Oxford University press, 2008.

[5] D. Gilbarg y N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin, Springer, 1977.

[6] J. Hernández y F. Mancebo. Singular elliptic and parabolic equations. En *handbook of Differential equations*. M. Chipot y P. Quittner(eds.), vol. 3. Elsevier, 2006, 317-400.

[7] J. Hernández, F. Mancebo y J.M. Vega. On the linearization of some singular elliptic problems and applications. *Ann. I. H. Poincaré* 19(2002), 777-813.

[8] J. Hernández, F. Mancebo y J. M. Vega. Positive solutions for singular nonlinear elliptic equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 137A(2007), 41-62.

## 2. **Métodos docentes** / **Teaching methodology**

El material básico se cubrirá en clases convencionales. Parte de los temas avanzados serán asignados a los estudiantes para estudio individual. Se espera que los estudiantes presenten estos temas en el aula. Se entregarán ejercicios.



Asignatura: Curso avanzado de EDP's  
Código: 30074  
Centro: Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones  
Nivel: Máster M2  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8

The basic material will be covered in standard lectures. Part of the more advanced topics will be assigned to the students for individual study. The students are expected to present these topics in the classroom. Exercises will be assigned.

### 3. **Tiempo de trabajo del estudiante / Student workload**

		Nº de horas	
Presencial	Clases teóricas	42h(21%)	66h (33%)
	Tutorías programadas a lo largo del semestre	14 h (7%)	
	Seminarios y trabajos	8 h (4%)	
	Examen final	2 h (1%)	
No presencial	Elaboración de problemas	40h(20%)	134h (67%)
	Estudio semanal	88h(44%)	
	Preparación del examen (presentación)	6h(3%)	
Carga total de horas de trabajo: 25 horas x 8 ECTS		200 h	

### 4. **Métodos de evaluación y porcentaje en la calificación final / Evaluation procedures and weight of components in the final grade**

#### **EVALUACIÓN ORDINARIA**

Examen final: 10%  
Trabajo independiente: 40%  
Presentaciones en clase: 50%

#### **EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA**

Examen final 100%

#### **ORDINARY EVALUATION**

Final exam: 10%



Asignatura: Curso avanzado de EDP's  
Código: 30074  
Centro: Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y aplicaciones  
Nivel: Máster M2  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8

Homework: 40%  
Class presentations: 50%

### EXTRAORDINARY EVALUATION

Final exam 100%

## 5. Cronograma\* / Course calendar

Semana Week	Contenido Contents	Horas presenciales Contact hours	Horas no presenciales Independent study time
1-2	First chapter	9	19
3-5	Second chapter	15	29
6-7	Third chapter	9	19
8-9	Fourth chapter	9	19
10-12	Fifth chapter	15	29
13-14	Sixth chapter	9	19

\*Este cronograma tiene carácter orientativo / Tentative