Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Sexta Edición, 2011/2012

TRABAJO: Números estrellas

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

- Rommel Beltrán Carrero
- José Antonio Pastor Rivera

TUTOR:

- Rafael Ángel Martínez Casado

CENTRO: IES Cardenal Cisneros (Alcalá de Henares, Madrid)

NÚMEROS ESTRELLAS

Autores

COMPLUTUM

I N D I C E

"Ningún descubrimiento se haría ya si nos contentásemos con lo que sabemos"
Seneca

INTRODUCCIÓN – MOTIVACIÓN

¿Es posible en pleno siglo XXI "descubrir" o "inventar" nuevos números?

Intentando responder afirmativamente a esta pregunta surgió este trabajo. Todo empezó cuando nuestro profesor de Matemáticas y de Ampliación de Matemáticas nos habló de los números figurados (poligonales) cuando iniciamos el tema de las progresiones aritméticas. También nos animó los dos trabajos premiados en este certamen otros años sobre números figurados.

Los números estrella (o estrellados como también los hemos buscado) son unos números completamente desconocidos. Basta con buscar estos términos en Google para descubrir que no se conoce ni se habla nada de ellos. Cuando buscas "números estrella" aparece (casi siempre) la lotería de los euromillones y cuando buscas "números estrellados" lo que encuentras son los polígonos estrellados.

De todas formas algo si hemos encontrado en un libro de Martin Gadner[1] que nos dejo nuestro coordinador. En dicho libro sólo se habla de los 6 – estrella (polígonos estrellados de seis puntas), buscando alguna propiedad y dejando claro que nunca han sido considerados números figurados[2].

Nosotros los hemos generalizado a cualquier tipo de estrella, hemos obtenido su fórmula general, diferentes propiedades, bastantes relaciones entre ellos y los restantes números figurados, incluso hemos encontrado alguna curiosidad.

No son grandes descubrimientos, ni aportan muchas cosas a las matemáticas, pero hemos disfrutado haciéndolo, descubriendo cosas nuevas y con la satisfacción personal al haber "descubierto" un nuevo concepto matemático.

[1] Ver bibliografía

[2] Lo que hemos encontrado estaba dentro de un capítulo que hablaba de números hexagonales, números hexagonales centrados y números 6 – estrella, titulado "*Hexas y estrellas*".

OBJETIVOS DEL TRABAJO

De forma general podemos decir que los principales objetivos que hemos buscado a la hora de realizar este trabajo son:

- ✓ “Descubrir” unos nuevos números figurados, hasta ahora no estudiados.
- ✓ Encontrar propiedades y relaciones entre estos números.
- ✓ Analizar posibles relaciones con los números figurados (poligonales) y con los poligonales centrados.
- ✓ Descubrir posibles aplicaciones de estos números.
- ✓ Conocer un poco más el mundo de las progresiones aritméticas y de los números figurados.

METODOLOGÍA EMPLEADA

Este trabajo ha sido eminentemente práctico, probando (y en su caso demostrando) las distintas propiedades:

Primer paso. Definir los objetivos y la forma de abordarlos en el trabajo.

Segundo paso. Buscar bibliografía (muy escasa) y webgrafía sobre el tema, comprobando que los números objeto de nuestro trabajo solo están definidos para $k = 6$ y apenas estudiados.

Tercer paso: Estudiar los números poligonales (muy estudiados desde los griegos) para familiarizarse sobre estos números y el método de trabajo.

Cuarto paso: Estudiar los números poligonales centrados, que van a ser necesarios para el resto del trabajo, obteniendo propiedades hasta ahora no conocidas.

Quinto paso: Definir los números k – estrellas y obtener su fórmula de obtención.

Sexto paso: Utilizando los dibujos de los números k – estrellas, buscar posibles relaciones con otros números.

Sétimo paso: Demostrar las posibles relaciones obtenidas en el paso anterior.

Octavo paso: Utilizando la tabla de Excel, buscar números k – estrellas que sean a su vez cuadrados perfectos intentando encontrar relaciones entre ellos.

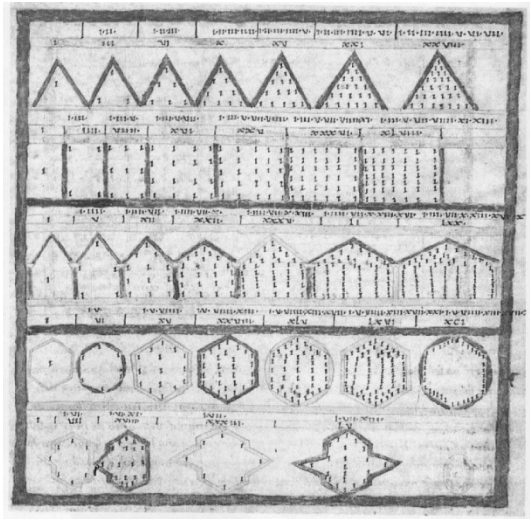
Noveno paso: Sistematizar toda la información obtenida y sobre todo los resultados obtenidos, sacando todas las conclusiones posibles-

Décimo y último paso. Escribir el trabajo, intentando explicar lo mejor posible todo lo obtenido y que esté a la alcance de cualquier alumno de bachillerato y de 4º de secundaria.

¿QUÉ SON LOS NÚMEROS FIGURADOS?

Se llaman números figurados a aquellos números que pueden representarse mediante figuras geométricas "regulares", con la condición de que los puntos que los representan guarden siempre entre ellos la misma distancia. Cuando dichas figuras son polígonos regulares, se habla de números poligonales.

Los números poligonales se remontan al comienzo mismo de la matemática. Fueron los pitagóricos los que los descubrieron. Tal vez, la mejor forma de comprender los números poligonales es percatarse que en aquella época los números se representaban mediante piedras (calculi) que se ponían sobre una superficie. Algunos números pueden disponerse formando figuras geométricas, por ejemplo 3 piedras se pueden disponer formando un triángulo, 4 forman un cuadrado, etc.



Según esto, las series de números poligonales serían:
Triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21, …
Cuadrados: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …
Pentagonales: 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, …
Hexagonales: 1, 6, 15, 28, 45,…

El estudio de los números figurados pertenece a una rama de la teoría de números, llamada análisis diofántico, que trata de la determinación de las soluciones enteras de las ecuaciones con infinitas soluciones. Los grandes pioneros de la teoría de números dedicaron un enorme esfuerzo al estudio de las propiedades de los números figurados.

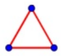
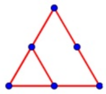
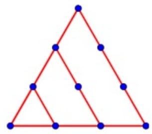
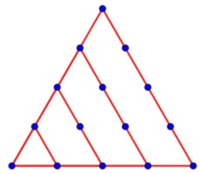
En cambio a los números poligonales centrados o a los números estrella apenas se les ha dedicado tiempo y estudio, posiblemente porque sus posibilidades y propiedades son bastante insignificantes en comparación con los números poligonales, o que ya existían herramientas más poderosas para estudiar las progresiones.

Incluso los números 6 – estrella (los únicos estudiados y definidos) no se han considerado nunca como números figurados.

ANTECEDENTES (números poligonales y centrados)

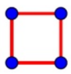
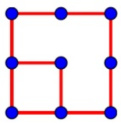
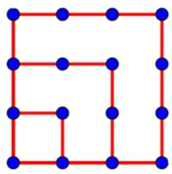
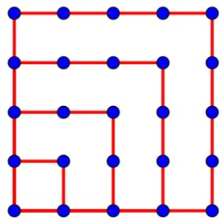
NÚMEROS POLIGONALES

Tal y como lo definieron los pitagóricos, los llamados números poligonales, son números que pueden representarse mediante polígonos regulares. A partir de estos polígonos se pueden observar (y estudiar) progresiones aritméticas.

Números Triangulares				
				
Orden 1 (1)	Orden 2 (3)	Orden 3 (6)	Orden 4 (10)	Orden 5 (15)

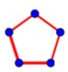
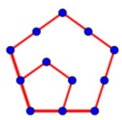
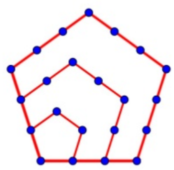
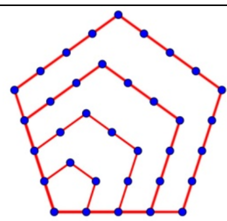
Fijándonos en su representación podemos observar que los números triangulares 1, 3, 6, 10, 15,… son la suma de los términos de una progresión aritmética con primer término 1 y diferencia 1

Por tanto su fórmula es $T_n = 1+2+3+4+...+n = \frac{n^2+n}{2}$.

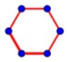
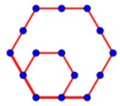
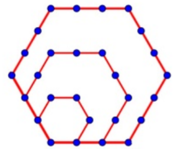
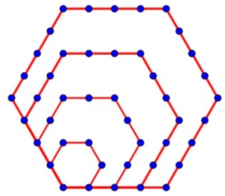
Números Cuadrados				
				
Orden 1 (1)	Orden 2 (4)	Orden 3 (9)	Orden 4 (16)	Orden 5 (25)

De igual forma que los números triangulares, los números cuadrados 1, 4, 9, 16, 25,… son la suma de los términos de una progresión aritmética con primer término 1 y diferencia 2.

Por tanto su fórmula es $C_n = 1+3+5+7+...+(2n-1) = n^2$.

Números Pentagonales				
				
Orden 1 (1)	Orden 2 (5)	Orden 3 (12)	Orden 4 (22)	Orden 5 (35)

Son 1, 5, 12, 22, 35,… son la suma de los términos de una progresión aritmética con primer término 1 y diferencia 3. Por tanto su fórmula es $P_n = 1+4+7+10+...+(3n-2) = \frac{3n^2-n}{2}$.

Números Hexagonales				
				
Orden 1 (1)	Orden 2 (6)	Orden 3 (15)	Orden 4 (28)	Orden 5 (45)

Son 1, 6, 15, 28, 45,… son la suma de los términos de una progresión aritmética con primer término 1 y diferencia 4. Por tanto su fórmula es… $H_n = 1+5+9+13+...+(3n-2) = 2n^2 - n$.

Nomenclatura

Los números poligonales los podemos escribir como K_n

Donde: K = N.º de lados del polígono; n = orden del número

Fórmula

La fórmula para obtener los números poligonales es:

$$K_n = \frac{\left((k-2)n-(k-4)\right)n}{2} = \frac{(k-2)n^2-(k-4)n}{2}$$

Demostración:

Hemos visto que los números poligonales se van formando siguiendo una progresión aritmética:

Triangulares: $\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 1+(n-1)\cdot 1 = n \Rightarrow T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1+n}{2}\cdot n = \frac{n^2+n}{2}$

Cuadrados: $\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 1+(n-1)\cdot 2 = 2n-1 \Rightarrow C_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n = \frac{2n^2+0n}{2} = n^2$

Pentagonales: $\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 1+(n-1)\cdot 3 = 3n-2 \Rightarrow P_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1+(3n-2)}{2}\cdot n = \frac{3n^2-n}{2}$

Hexagonales: $\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 1+(n-1)\cdot 4 = 4n-3 \Rightarrow H_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1+(4n-3)}{2}\cdot n = \frac{4n^2-2n}{2} = 2n^2-n$

K–gonales: $\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = k-2 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 1+(n-1)\cdot(k-2) = 1+nk-2n-k+2 = (k-2)n-(k-3) \Rightarrow$

$$K_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1+(k-2)n-(k-3)}{2}\cdot n = \frac{(k-2)n-(k-4)}{2}\cdot n = \frac{\left((k-2)n-(k-4)\right)n}{2} = \frac{(k-2)n^2-(k-4)n}{2}$$

Las principales relaciones conocidas de los números poligonales son[3]:

Teorema de Nicómaco (siglo I d.C.): $K_n = (K-1)_n + T_{n-1}$

Descomposición triangular de Fermat: $K_n = T_n + (K-3)T_{n-1}$

Descomposición de Hipsicles (siglo II a.C.): $K_n = n + (K-2)T_{n-1}$

Relación 1[4]: $K_n = n + \frac{n(n-1)(k-2)}{2}$

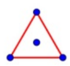
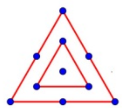
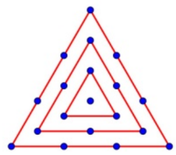
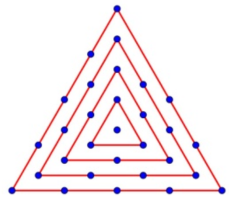
Relación 2 (fórmula recurrente): $K_n = K_{n-1} + (K-2)(n-1) + 1$

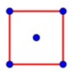
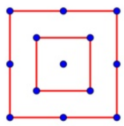
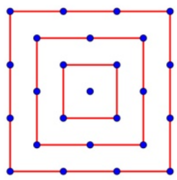
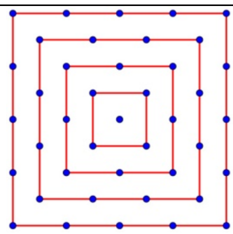
[3] Las demostraciones (hechas por nosotros) están en el anexo 1.

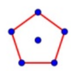
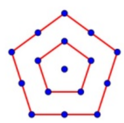
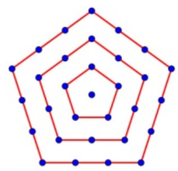
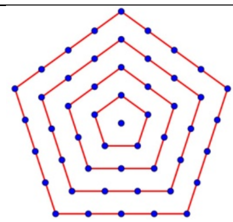
[4] Estas dos últimas relaciones las hemos obtenido en la clase de ampliación de matemáticas. No hemos encontrado ninguna bibliografía que hable de ellas.

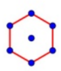
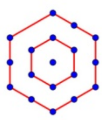
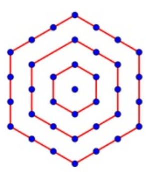
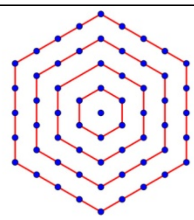
NÚMEROS POLIGONALES CENTRADOS

Tal y como están formados, los números poligonales crecen a partir de un vértice, y no tienen centro. Si los formamos a partir de un punto (centro) rodeando después con un polígono regular se obtiene lo que se denomina número poligonal centrado.

Números Triangulares Centrados				
				
Orden 1 (1)	Orden 2 (4)	Orden 3 (10)	Orden 4 (19)	Orden 5 (31)

Números Cuadrados Centrados				
				
Orden 1 (1)	Orden 2 (5)	Orden 3 (13)	Orden 4 (25)	Orden 5 (41)

Números Pentagonales Centrados				
				
Orden 1 (1)	Orden 2 (6)	Orden 3 (16)	Orden 4 (31)	Orden 5 (51)

Números Hexagonales Centrados				
				
Orden 1 (1)	Orden 2 (7)	Orden 3 (19)	Orden 4 (37)	Orden 5 (61)

Definición

Llamaremos números poligonales centrados a aquellos números figurados que partiendo de un punto (centro) se obtienen rodeando dicho punto de sucesivos polígonos regulares.
Así obtenemos:
Números triangulares centrados: 1, 4, 10, 19, 31,…
Números cuadrados centrados: 1, 5, 13, 25, 41,…
Números pentagonales centrados: 1, 6, 16, 31, 51,…
Números hexagonales centrados: 1, 7, 19, 37, 61,…

Nomenclatura

Para el trabajo escribiremos los números poligonales centrados como CK_n
Donde: *C* = Centrado; *K* = N.º de lados del polígono; *n* = orden del número

Fórmula

$$CK_n = \frac{Kn^2 - Kn + 2}{2}$$

Demostración:

Se ha podido observar que los números poligonales centrales son la suma de progresiones aritméticas más uno (primer elemento):

Triangulares Centrados: $\left.\begin{matrix} a_1 = 0 \\ d = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n = 0 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 3 \Rightarrow CT_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + \frac{0 + (3n-3)}{2}\cdot n = \frac{3n^2 - 3n + 2}{2}$

Cuadrados Centrados: $\left.\begin{matrix} a_1 = 0 \\ d = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n = 0 + (n-1)\cdot 4 = 4n - 4 \Rightarrow CC_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + \frac{0 + (4n-4)}{2}\cdot n = \frac{4n^2 - 4n + 2}{2}$

Pentagonales Centrados: $\left.\begin{matrix} a_1 = 0 \\ d = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n = 0 + (n-1)\cdot 5 = 5n - 5 \Rightarrow CP_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + \frac{0 + (5n-5)}{2}\cdot n = \frac{5n^2 - 5n + 2}{2}$

Hexagonales Centrados: $\left.\begin{matrix} a_1 = 0 \\ d = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n = 0 + (n-1)\cdot 6 = 6n - 6 \Rightarrow CH_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + \frac{0 + (6n-6)}{2}\cdot n = \frac{6n^2 - 6n + 2}{2}$

K–gonales Centrados: $\left.\begin{matrix} a_1 = 0 \\ d = k \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n = 0 + (k-1)\cdot k = kn - k \Rightarrow CH_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + \frac{0 + (kn-k)}{2}\cdot n = \frac{kn^2 - kn + 2}{2}$

Las principales relaciones de los números poligonales son:

Relación con los números poligonales[5]: $CK_n = K_n + (n-1)^2$

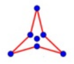
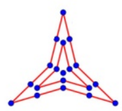
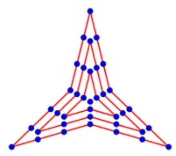
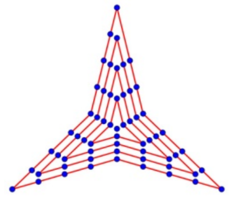
Relación con los números triangulares: $CK_n = k \cdot T_n - k \cdot n + 1$

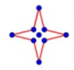
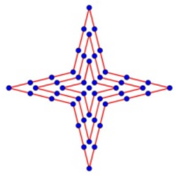
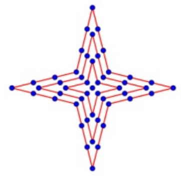
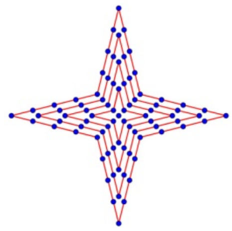
[5] Las demostraciones (hechas por nosotros) están en el anexo 2.

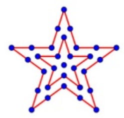
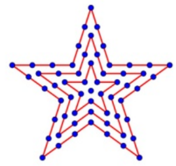
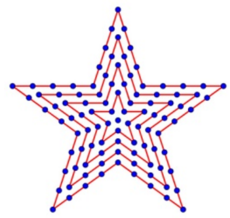
NÚMEROS ESTRELLAS

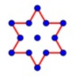
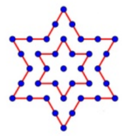
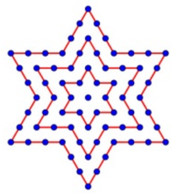
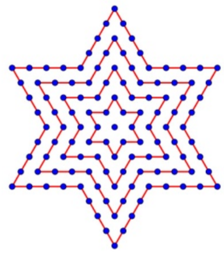
Con todo lo visto en la parte de teoría podemos definir los números estrellas como aquellos que se pueden formar a partir de un punto (centro) y que forman una estrella “regular” de *k* puntas.

Así tenemos los siguientes números estrella:

3 – estrella				
				
Orden 1 (1)	Orden 2 (7)	Orden 3 (19)	Orden 4 (37)	Orden 5 (61)

4 – estrella				
				
Orden 1 (1)	Orden 2 (9)	Orden 3 (25)	Orden 4 (49)	Orden 5 (81)

5 – estrella				
				
Orden 1 (1)	Orden 2 (11)	Orden 3 (31)	Orden 4 (61)	Orden 5 (101)

6 – estrella				
				
Orden 1 (1)	Orden 2 (13)	Orden 3 (37)	Orden 4 (73)	Orden 5 (121)

Nomenclatura

Para el trabajo escribiremos los números poligonales centrados como ***EK**$_n$*
Donde: E = Estrella; K = N.º de puntas de la estrella; n = orden del número

Lo primero que hubo que hacer fue obtener la fórmula general de estos números, y para ello utilizamos las fórmulas de las progresiones aritméticas.

Fórmula

$$EK_n = k\left(n^2 - n\right) + 1$$

Demostración:

Observando los dibujos de construcción de los números poligonales estrella, se puede ver que dichos números son la suma de progresiones aritméticas más uno (primer elemento):

Estrella 3:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ d = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 0 + (n-1)\cdot 6 = 6n - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E3_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + \frac{0 + (6n-6)}{2}\cdot n = \frac{6n^2 - 6n + 2}{2} = 3n^2 - 3n + 1 = 3\left(n^2 - n\right) + 1$$

Estrella 4:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ d = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 0 + (n-1)\cdot 8 = 8n - 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E4_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + \frac{0 + (8n-8)}{2}\cdot n = \frac{8n^2 - 8n + 2}{2} = 4n^2 - 4n + 1 = 4\left(n^2 - n\right) + 1$$

Estrella 5:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ d = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 0 + (n-1)\cdot 10 = 10n - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E5_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + \frac{0 + (10n-10)}{2}\cdot n = \frac{10n^2 - 10n + 2}{2} = 5n^2 - 5n + 1 = 5\left(n^2 - n\right) + 1$$

Estrella 6:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ d = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 0 + (n-1)\cdot 12 = 12n - 12 \Rightarrow$$

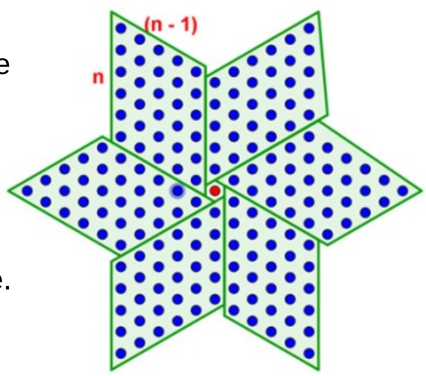
$$\Rightarrow E6_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + \frac{0 + (12n-12)}{2}\cdot n = \frac{12n^2 - 12n + 2}{2} = 6n^2 - 6n + 1 = 6\left(n^2 - n\right) + 1$$

Estrella K:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ d = 2k \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 0 + (n-1)\cdot 2k = 2kn - 2k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EK_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + \frac{0 + (2kn-2k)}{2}\cdot n = \frac{2kn^2 - 2kn + 2}{2} = kn^2 - kn + 1 = k\left(n^2 - n\right) + 1$$

Esta fórmula es acorde con el siguiente dibujo, que nos puede ayudar a comprenderla:



$$EK_n = k\left(n^2 - n\right) + 1 = k\cdot n\cdot(n-1) + 1$$

Con esta fórmula podemos sacar la primera propiedad, muy evidente.

Propiedad 1

Todo número k – estrella es impar

Demostración:

Tenemos que: $EK_n = k \cdot n \cdot (n-1) + 1$.

Ahora bien $n(n-1)$ es par ya que es el producto de dos números consecutivos, y entonces uno de ellos tiene que ser par.

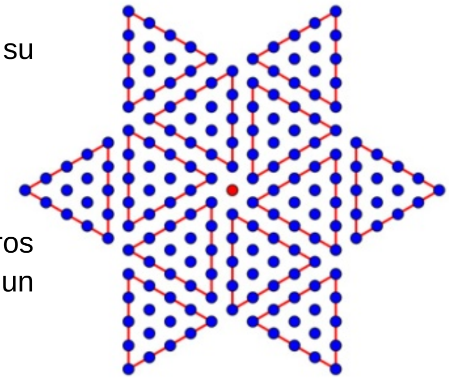
Por tanto $k \cdot n \cdot (n-1)$ es par ya que es el producto de un número par por otro número.

Luego $EK_n = k \cdot n \cdot (n-1) + 1$ es impar (sumamos uno a un número par)-

Propiedad 2

Una vez definidos nuestros números estrellas y habiendo obtenido su fórmula, pasemos a ver las distintas relaciones.

Empezamos observando este dibujo:



En él se puede ver que cada estrella está formada por números triangulares (el doble que números de picos de la estrella), pero de un orden menor. A ello hay que sumarle el punto central.

Por tanto se puede suponer que la fórmula que relaciona los números estrella con los triangulares es: $EK_n = k \cdot 2 \cdot T_{n-1} + 1$.

Pero, claro, esto se ha obtenido para una estrella de seis putas, hay que demostrarlo para cualquier número de puntas.

Relación con los números triangulares

$EK_n = k \cdot 2 \cdot T_{n-1} + 1$

Demostración:

$$k \cdot 2 \cdot T_{n-1} + 1 = 2k \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 1 = k\left(n^2 - n\right) + 1 = kn^2 - kn + 1 = EK_n$$

Propiedad 3

El siguiente paso fue buscar si existía alguna relación entre los números estrella y los números poligonales. Al no “encontrar” nada con los dibujos probamos varios desarrollos de la fórmula de los números estrella y poligonales hasta encontrar una relación utilizando la descomposición de Hipsicles:

Relación con los números poligonales

$EK_n = 2K_n + 2n^2 - 4n + 1$

Demostración:

$$K_n = n + (k-2)\frac{n(n-1)}{2} = n + \frac{\left(n^2 - n\right)k}{2} - \frac{\left(n^2 - n\right)2}{2} = n + \frac{\left(n^2 - n\right)k}{2} - \left(n^2 - n\right) =$$

$$= 2n - n^2 + \frac{\left(n^2 - n\right)k + 1 - 1}{2} = 2n - n^2 + \frac{EK_n - 1}{2} \Rightarrow EK_n = 2K_n + 2n^2 - 4n + 1$$

Propiedad 4

Aprovechando este último resultado y la relación que teníamos entre los números poligonales y los poligonales centrados, obtuvimos una fórmula que relacionaba estos tres tipos de números:

Relación con los números poligonales y los poligonales centrados.

$$EK_n = K_n + CK_n + n^2 - 2n$$

Demostración:

Antes hemos obtenido la relación entre los números centrados y los poligonales:

$$CK_n = K_n + (n-1)^2 \Rightarrow CK_n - K_n = (n-1)^2$$

Aplicando esto a lo obtenido en la relación anterior (propiedad 2):

$$EK_n = 2K_n + 2n^2 - 4n + 1 = 2K_n + n^2 - 2n + 1 + n^2 - 2n = 2K_n + (n-1)^2 + n^2 - 2n =$$
$$= 2K_n + (n-1)^2 + n^2 - 2n = 2K_n + CK_n - K_n + n^2 - 2n = K_n + CK_n + n^2 - 2n$$

Es decir lo que queríamos demostrar.

Propiedad 5

Volviendo a utilizar la propiedad 2 operando con dicho resultado y aprovechando la propiedad 3, obtuvimos una nueva relación entre los números estrella y los números poligonales centrados:

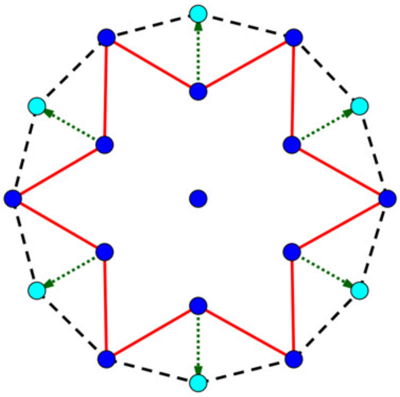
Relación con los números poligonales centrados

$$EK_n = 2CK_n - 1$$

Demostración:

$$EK_n = 2K_n + 2n^2 - 4n + 1 = 2K_n + 2(n^2 - 2n + 1) - 1 = 2K_n + 2(n-1)^2 - 1 \xrightarrow{propiedad\,3}$$
$$\xrightarrow{propiedad\,3} EK_n = 2K_n + 2(CK_n - K_n) - 1 = 2CK_n - 1$$

Propiedad 6



En este estado de cosas, nos fijamos en este dibujo, en el cual se puede ver sin ninguna duda que en realidad los números estrella son un caso particular de los números poligonales centrados, ya que toda estrella se puede "convertir" en un polígono regular del doble de lados que de picos.

Por tanto obtuvimos (generalizando nuestro "descubrimiento" y demostrándolo para todo tipo de número estrella):

Relación Fundamental con los números poligonales centrados

$$EK_n = C(2K)_n$$

Demostración:

$$C(2K)_n = \frac{2kn^2 - 2kn + 2}{2} = kn^2 - kn + 1 = EK_n$$

Propiedad 7

Estos dos últimos resultados nos permitieron obtener una relación entre los números centrados hasta ahora desconocida:

Relación entre los números poligonales centrados

$C(2K)_n = 2CK_n - 1$

Demostración:

Tenemos: $EK_n = C(2K)_n$ y $EK_n = 2CK_n - 1$

Por tanto $C(2K)_n = 2CK_n - 1$

Una vez acabada esta fase, pasamos a otra que fue estudiar los números estrellas (sus valores) con la ayuda de una hoja de Excel, donde generamos los 100 000 primeros números *k* – estrellas (para distintos *k*), intentando buscar posible regularidades y buscando números estrella que a la vez fuesen cuadrados y obtuvimos unas propiedades interesantes.

Propiedad 8

Primera sorpresa, descubrimos que todos los números 4 – estrella eran números cuadrados:

Propiedad de los 4 – estrella

Todo número 4 – estrella es un cuadrado perfecto

Demostración:

Tenemos que un número estrella es de la forma $EK_n = k(n^2 - n) + 1$:

Por tanto, en nuestro caso: $E4_n = 4(n^2 - n) + 1 = 4n^2 - 4n + 1 = (2n-1)^2$

Luego es un cuadrado perfecto.

Propiedad 9[6]

Siguiendo probando con la lista de números estrellas, intentando encontrar esa regularidad buscada con los números cuadrados observamos que no había ningún número cuadrado (exceptuando el 1) en los 9 – estrellas y en los 16 – estrellas, lo que nos hizo pensar que los números EK^2_n (con $K \neq 2$) nunca son números estrellas (excepto el 1).

Estamos convencidos de esta propiedad, hasta que descubrimos que había unos números muy específicos que este tipo de *k* – estrellas que tenían un segundo cuadrado perfecto… y que cumplían una regla perfecta:

Los números de la forma $E\left((8n-4)^2\right)_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ son cuadrados perfectos

Demostración[7]:

$$E\left((8n-4)^2\right)_n = (8n-4)^2(n^2-n)+1 = (64n^2-64n+16)n(n-1)+1 = (64n(n-1)+16)n(n-1)+1 =$$

$$= 64n^2(n-1)^2 + 16n(n-1) + 1 = (8n(n-1)+1)^2$$

[6] Propiedad observada por nosotros, pero que no hemos sido capaces de demostrar algebraicamente.
[7] Demostración realizada con la ayuda de nuestro profesor y coordinador.

Los números cuadrados asi obtenidos son (hasta n = 10)

n	8*n* – 4	K – estrella	Número
1	4	16	1
2	12	144	289
3	20	400	2401
4	28	784	9409
5	36	1296	25 921
6	44	1936	58 081
7	52	2704	113 569
8	60	3600	201 601
9	68	4624	332 929
10	72	5776	519 891

Propiedad 10

Viendo la tabla de los números estrellas[8] se puede observar que la diferencia entre dos números del mismo orden y de "puntas" consecutivas es el doble de un número triangular, por tanto se puede obtener otra relación entre nuestros números y los números triangulares:

Relación con los números triangulares

$$EK_n = E\left(K-1\right)_n + 2\cdot T_{n-1}$$

Demostración:

$$E\left(K-1\right)_n + 2\cdot T_{n-1} = \left[\left(k-1\right)\left(n^2-n\right)+1\right] + 2\cdot\left[\frac{\left(n-1\right)^2+\left(n-1\right)}{2}\right] =$$

$$= \left[k\left(n^2-n\right)+1-n^2+n\right] + \left[n^2-2n+1+n-1\right] = \left(EK_n - n^2+n\right) + \left(n^2-n\right) = EK_n$$

Propiedad 11

Nuestro último trabajo de investigación fue ver si había alguna pauta para la obtención de números estrella cuadrados y obtuvimos la siguiente tabla de números estrella que a la vez son cuadrados, pero no hemos encontrado ninguna relación para obtenerlos, excepto la conocida[9] para los 6 – estrella que dice que:

"*Para obtener una 6 – estrella cuadrada basta tener una de ellas (las dos primeras son 1 , 121) y multiplicarla por 98, restarle la 6 – estrella cuadrada anterior y sumarle al resultado 24*". Así la 6 – estrella siguiente a 121 es: $121\cdot 98-1+24=11881$

TABLA DE *K* – ESTRELLAS CUADRADAS DE ORDEN MENOR DE 100 000

- ✓ 3 – estrella: 1, 169, 32761, 6355441,1233652687
- ✓ 5 – estrella: 1, 361, 116281, 37442161, 12056259601
- ✓ 6 – estrella: 1, 121, 11881, 1164241, 114083761, 11179044361
- ✓ 7 – estrella: 1, 1681, 87025, 108472225, 5614355041
- ✓ 8 – estrella: 1, 49, 1681, 57121, 1940449, 65918161,2239277041, 76069501249
- ✓ 9 – estrella: 1.
- ✓ 10 – estrella: 1, 121, 2401, 175561, 3463321, 253159921, 4994107561
- ✓ 11 – estrella: 1, 17161, 279841, 2718475321, 44327512681
- ✓ 12 – estrella: 1, 25, 361, 5041, 70225, 978121, 13623481, 189750625, 2642885281, 36810643321
- ✓ 13 – estrella: 1, 729, 271441, 3308761, 1230115329
- ✓ 14 – estrella: 1, 169, 1849, 152881, 1661521, 137288089, 1492045129, 123284552161
- ✓ 15 – estrella: 1, 841, 8281, 3236401, 31820881, 12434257081, 122255821801
- ✓ 16 – estrella: 1.

[8] Ver anexo 3

[9] Aparece en el libro "Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas". Ver bibliografía

CONCLUSIONES

Aparte de todo lo que hemos aprendido y disfrutando este trabajo, de la enorme ilusión que ha producido en nosotros "encontrar" algo nuevo en las matemáticas, creemos que hemos conseguido los objetivos que nos habíamos marcado en el trabajo y una serie de conclusiones bastante interesantes.

- ✓ Definir y generalizar de forma coherente unos "nuevos" números figurados. Los números estrellas.
- ✓ Encontrar una fórmula para la obtención de dichos números: $EK_n = k\left(n^2 - n\right) + 1$
- ✓ Todo número estrella es impar.
- ✓ Todo número 4 – estrella es cuadrado perfecto.
- ✓ Distintas relaciones entre los números figurados
  - Relación con los números triangulares: $EK_n = k \cdot 2 \cdot T_{n-1} + 1$
  - Relación con los números poligonales: $EK_n = 2K_n + 2n^2 - 4n + 1$
  - Relación con los números poligonales y los poligonales centrados: $EK_n = K_n + CK_n + n^2 - 2n$
  - Relación con los números poligonales centrados: $EK_n = 2CK_n - 1$
  - Relación con los números triangulares: $EK_n = E\left(K-1\right)_n + 2 \cdot T_{n-1}$

Hemos comprobado que los números estrella son, en realidad, un caso particular de los números poligonales centrados.

Además hemos obtenido una nueva propiedad, pero que no hemos sido capaces de demostrar:

> "Los números $EK^2{}_n$ (con $K \neq 2$) nunca son números cuadrados (excepto el 1), exceptuando los números de la forma $E\left((8n-4)^2\right)_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ que sí son cuadrados perfectos"

Y hemos conseguido una nueva relación entre los números poligonales centrados hasta ahora desconocida: $C\left(2K\right)_n = 2CK_n - 1$

BIBLIOGRAFÍA y WEBGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

Libros

- **Martin Gardner (1988)**. "*Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*" (Traducción de Luis Bou García en 2007).RBA Coleccionables. 2007.

Artículos

- **Castro, E; Rico, L; Romero, I**. "*Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas*". Departamento Didáctica de la matemática de la Universidad de Granada. 1996
- **Bell, A (Shel, Center for Mathematical Educatión. Univerdidad de Nottinghan)**. "*Algunas notas acerca de la representación mediante puntos de números, series y funciones*". Enseñanza de la Ciencia. 1997.
- **Boon, K. Teo, N. J. A. Slone**. "*Magic numbers in Polygonal and Polyhedral Cluster*". Inorganic Chemise. 1985.

WEBGRAFÍA:

- http://www.google.es/
- http://www.wikipedia.com
- http://platea.pntic.mec.es/aperez4/numeroshtml/numeros.htm
- http://www.uned.es/ca-guadalajara/actividades/09-10/JuevesCiencia10/Orden.caos2010.pdf
- http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/algebra/patrones/patrones.htm

ANEXO 1

DEMOSTRACIONES (NUESTRAS) DE LAS DISTINTAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS POLIGONALES

Teorema de Nicómaco: $K_n = (K-1)_n + T_{n-1}$

Demostración:

$$(K-1)_n + T_{n-1} = \frac{((k-1)-2)n^2 - ((k-1)-4)n}{2} + \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} = \frac{(k-3)n^2 - (k-5)n}{2} + \frac{n^2 - 2n + 1 + n - 1}{2} =$$

$$= \frac{(k-3)n^2 - (k-5)n}{2} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{(k-3+1)n^2 - (k-5+1)n}{2} = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2} = K_n$$

Descomposición triangular de Fermat: $K_n = T_n + (K-3)T_{n-1}$

Demostración:

$$T_n + (k-3)T_{n-1} = \frac{n^2+n}{2} + (k-3)\frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} + (k-3)\frac{n^2 - 2n + 1 + n - 1}{2} = \frac{n^2+n}{2} + (k-3)\frac{n^2-n}{2} =$$

$$= \frac{n^2+n}{2} + \frac{(k-3)n^2 - (k-3)n}{2} = \frac{(k-3+1)n^2 - (k-3-1)n}{2} = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2} = K_n$$

Relación 1 (nuestra): $K_n = n + \frac{n(n-1)(k-2)}{2}$

Demostración:

Partiendo de la fórmula de los números poligonales y operando se obtiene que:

$$K_n = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2} = \frac{kn^2 - 2n^2 - kn + 4n}{2} = \frac{2n}{2} + \frac{kn^2 - 2n^2 - kn + 2n}{2} = n + \frac{n(kn - 2n - k + 2)}{2} =$$

$$= n + \frac{n((k-2)n - (k-2))}{2} = n + \frac{n(k-2)(n-1)}{2}$$

Descomposición de Hipsicles: $K_n = n + (K-2)T_{n-1}$

Demostración:

Sabemos que $T_{n-1} = \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} = \frac{n^2 - 2n + 1 + n - 1}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$

Partiendo de la Relación 1 y aplicando este último resultado se obtiene:

$$K_n = n + \frac{n(n-1)(k-2)}{2} = n + (k-2)\frac{n^2-n}{2} = n + (k-2)T_{n-1}$$

Relación 2 (nuestra) (fórmula recurrente) : $K_n = K_{n-1} + (K-2)(n-1) + 1$

Demostración:

Operando tenemos que:

$$K_{n-1} + (k-2)(n-1) + 1 = (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)(k-2)}{2} + (k-2)(n-1) + 1 =$$

$$= (n-1) + 1 + \frac{(n-1)(n-2)(k-2)}{2} + \frac{2(k-2)(n-1)}{2} = n + \frac{(n-1)(k-2)((n-2)+2)}{2} =$$

$$= n + \frac{(n-1)(k-2)n}{2} = K_n$$

ANEXO 2

DEMOSTRACIONES (NUESTRAS) DE LAS DISTINTAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS POLIGONALES CENTRADOS

Relación con los números poligonales: $CK_n = K_n + (n-1)^2$

Demostración

$$CK_n - K_n = \frac{kn^2 - kn + 2}{2} - \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2} = \frac{2n^2 - 4n + 2}{2} = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow CK_n = K_n + (n-1)^2$$

Relación 1 con los números triangulares: $CK_n = k \cdot T_n - k \cdot n + 1$

Demostración

$$k \cdot T_n - k \cdot n + 1 = k\frac{n^2 + n}{2} - \frac{2kn}{2} + \frac{2}{2} = \frac{kn^2 - kn + 2}{2} = CK_n$$

ANEXO 3

TABLA DE NÚMEROS ESTRELLA

		ORDEN											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
K - ESTRELLA	3	1	7	19	37	61	91	127	169	217	271	331	397
	4	1	9	25	49	81	121	169	225	289	361	441	529
	5	1	11	31	61	101	151	211	281	361	451	551	661
	6	1	13	37	73	121	181	253	337	433	541	661	793
	7	1	15	43	85	141	211	295	393	505	631	771	925
	8	1	17	49	97	161	241	337	449	577	721	881	1057
	9	1	19	55	109	181	271	379	505	649	811	991	1189
	10	1	21	61	121	201	301	421	561	721	901	1101	1321
	11	1	23	67	133	221	331	463	617	793	991	1211	1453
	12	1	25	73	145	241	361	505	673	865	1081	1321	1585