Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Sexta Edición, 2011/2012

TRABAJO: Subconjuntos para llevar

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

- Miguel Barrero Santamaría
- Javier Vidiella García

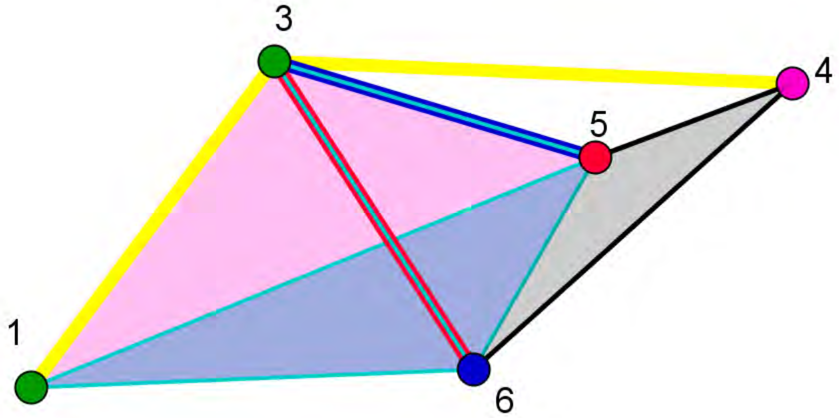
TUTOR:

- María Moreno Warleta

CENTRO: IES Alameda de Osuna (Madrid)

Subconjuntos para llevar

Lobezno



1. Introducción

Subconjuntos para llevar es el nombre de un juego matemático propuesto por David Gale, de la Universidad de Berkeley, basado en la teoría de conjuntos. Lo encontramos en el libro *Cómo cortar un pastel* de Ian Stewart, y nos pareció muy interesante su manera de plantearlo mediante representaciones geométricas de los conjuntos. En el capítulo que dedica a este juego menciona además varias estrategias propuestas por diversos científicos, si bien su validez solo ha sido probada mediante cálculos realizados por ordenadores que computan todas las variaciones posibles que pueden darse a lo largo de una partida. Es por esto que nosotros realizamos este proyecto, con la intención de encontrar una estrategia ganadora a partir del desarrollo de algunas teorías ya formuladas y la introducción de otras de elaboración propia. Nuestro objetivo, más que demostrar estas conjeturas, es desarrollar el juego para que cualquiera pueda familiarizarse con él y jugar dando uso a las diferentes tácticas para ganar. Pasemos ahora a una breve explicación de los conceptos básicos de la teoría de conjuntos para proceder después con las reglas del juego.

2. La teoría de conjuntos

La teoría de conjuntos está fundamentada en los conjuntos, que no son más que colecciones de objetos llamados elementos. Un conjunto se representa escribiendo todos sus elementos dentro de llaves, por ejemplo, {1, 2, 3}, o puede incluso ser vacío y no contener ninguno, siendo entonces representado con un espacio entre llaves { }. Además, un conjunto es un subconjunto de otro si todos sus elementos se encuentran también dentro de este último. Por ejemplo, el conjunto {1, 2, 3} es un subconjunto de {1, 2, 3, 4}. Cada conjunto es, por lo tanto, subconjunto de sí mismo. A un subconjunto se lo denomina propio si es distinto del conjunto del que procede, esto es, el conjunto {1, 2, 3} es un subconjunto propio de {1, 2, 3, 4}. Con estas sencillas ideas es posible entender el juego, cuyas reglas exponemos a continuación.

3. Reglas del juego

En *subconjuntos para llevar*, los jugadores (a los que llamaremos **A** y **B** de aquí en adelante) comienzan con un conjunto con un número finito de elementos. La premisa es sencilla: ambos jugadores deben escoger por turnos subconjuntos propios del conjunto inicial hasta que el rival no pueda escoger otro y pierda. Sin embargo, existe una dificultad: un subconjunto nuevo no puede contener un subconjunto elegido con anterioridad. Es decir, si un jugador escoge {1, 2}, no se puede escoger después un subconjunto que contenga esos dos elementos, como por ejemplo {1, 2, 3}. Según esta norma, el conjunto inicial no puede ser escogido como subconjunto de sí mismo, puesto que no existiría ninguna jugada posible tras tal elección.

Dicho esto, consideraremos los casos de juego que pueden darse con hasta seis elementos en el conjunto inicial, elaborando estrategias útiles en cada situación partiendo de la base de que **B**, como conjeturaron Gale y otros científicos, es quien tiene siempre la seguridad de ganar si responde adecuadamente a las jugadas de **A**.

4. Estrategias para *n* = 1 a 4

A continuación expondremos con detalle las distintas posibilidades de juego hasta *n* = 4 (*n* es el número de elementos). Es esencial comprender bien estos casos, puesto que a partir de *n* = 5 los juegos se desarrollan en dimensiones superiores a tres y es conveniente clarificar los conceptos en la medida de lo posible para poder abstraerse después en los casos más complicados.

Para cualquier *n*, en la primera jugada **B** debe usar la estrategia del complementario: coger el conjunto complementario del escogido por **A.** Después de este paso, el número de situaciones posibles aumentará en uno por cada dos enes: El número de casos es *n*/ 2, si *n* es par, y (*n* – 1)/2 , si *n* es impar.

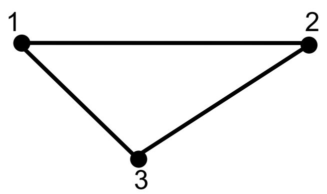
4.1 Caso *n* = 2

Omitimos el caso *n* = 1, puesto que no es posible escoger un subconjunto propio de {1} al contener éste un solo elemento. Así pues, pasamos al caso *n* = 2, donde el conjunto inicial está compuesto por dos elementos y **B** siempre gana. Esto se debe a que las únicas elecciones posibles son {1} y {2} e, independientemente de la opción que tome **A**, el jugador **B** escoge la otra y vence.

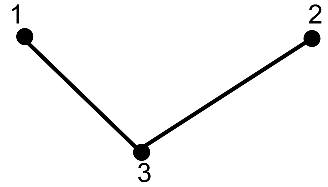
4.2 Caso *n* = 3

Cuando *n* =3, hay dos opciones de juego. Si **A** comienza con el subconjunto {1}, la jugada adecuada de **B** es escoger el complementario {2, 3}, es decir, todo lo que el otro no ha elegido. Entonces, el juego se reduce al caso *n* = 2 y **B** tiene la victoria asegurada. Por otra parte, si **A** comienza con un subconjunto de dos elementos {1, 2}, **B** debe jugar el complementario {3}. En ambos casos, si **B** escoge el complementario de la jugada inicial de **A**, el juego vuelve al caso *n* = 2 y **B** se alza con la victoria.

Aquí, una representación geométrica ayuda a comprender la situación. Esta es una idea propuesta en el libro de Stewart, que utiliza la topología (la ciencia que estudia las propiedades de los cuerpos deformables) para ejemplificar algunas de las posibilidades del juego para *n* = 4. No obstante, también es posible aplicarla aquí, donde la representación del conjunto inicial es un triángulo sin su interior y la segunda opción de juego se desarrollaría de la siguiente manera:



Posición inicial: Triángulo.
Jugadas disponibles:
{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3} y {2, 3}.



A escoge {1, 2}. Este subconjunto (una arista) deja de estar disponible.

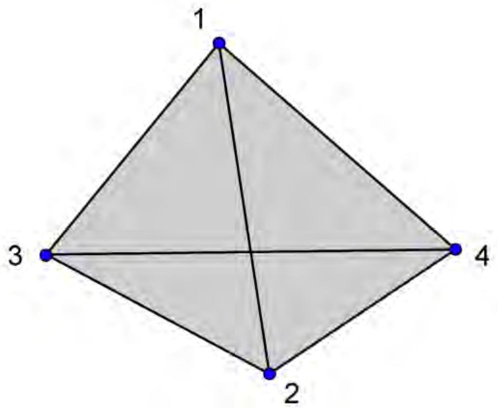
B escoge {3}. Se borra este subconjunto (el punto) y todos los que lo contenían: {1, 3} y {2, 3} (dos aristas).

A escoge uno de los dos puntos y **B** gana al escoger el que queda.

4.3 Caso *n* = 4

En este caso, Stewart ejemplifica algunos juegos representando el conjunto inicial {1, 2, 3, 4} como un tetraedro "hueco". Las jugadas disponibles son sus cuatro vértices: {1}, {2}, {3}, {4}, sus seis aristas: {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4} y sus cuatro caras: {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4} y {2, 3, 4}. Como siempre, en la primera jugada **B** escoge el complementario del conjunto escogido por **A** pero, tras esta primera jugada, puede darse el caso de que **B** tenga que abandonar esta táctica.

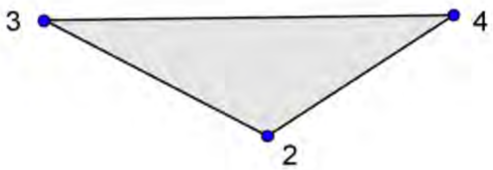
Veamos cómo se representa geométricamente cada uno de los casos:



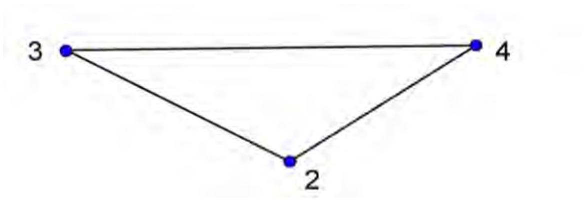
Posición inicial: Tetraedro
Jugadas disponibles:
{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4},
{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4},
{1}, {2}, {3} y {4}.

<u>**Caso 4.1:**</u>

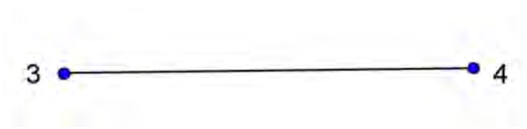
Si **A** escoge un punto {1}, **B** responde con la cara complementaria {2, 3, 4} y el tetraedro se convierte en un triángulo "vacío", luego se trata del caso *n* = 3 donde **B** gana. La misma situación se da si es **A** quien escoge una cara {1, 2, 3} y **B** responde con el punto {1}.



A escoge el punto {1}. Se borran el punto y los subconjuntos que lo contenían, las aristas {1, 2}, {1, 3} y {1, 4}. El resto de jugadas siguen disponibles.



B escoge la cara {2, 3, 4}. Solo desaparece el interior del triángulo.

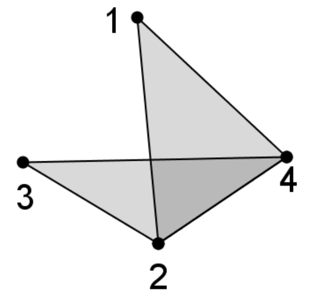


A escoge el punto {2} y se borran también las aristas {2, 3} y {2, 4}.

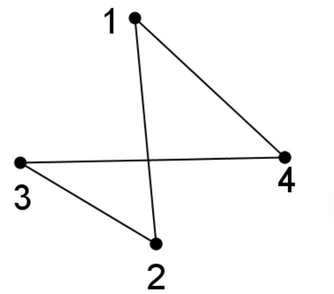
B escoge la arista {3, 4}. Como en el caso n = 2, **B** gana.

<u>Caso 4.2:</u>

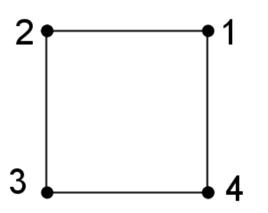
Si **A** comienza escogiendo una arista, por ejemplo, {1, 2}. **B** responde con el complementario {3, 4}, así que el tetraedro se convierte en una figura de cuatro puntos y cuatro aristas que puede ser deformada hasta transformarse en un cuadrado. En este caso **B** podrá ganar si responde correctamente a las jugadas de **A**, aunque no siempre será con la estrategia del complementario.



A escoge {1, 3}. Se borra la arista y las dos caras que forma {1, 2, 3} y {1, 3, 4}.



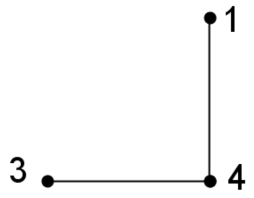
B escoge {2, 4}. Se quitan las otras dos caras {1, 2, 4} y {2, 3, 4}.



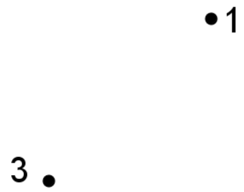
La figura resultante se puede representar como un ***cuadrado***.

Aquí se nos plantean dos posibilidades: que **A** coja un punto o que coja una arista.

Caso 4.2.1:

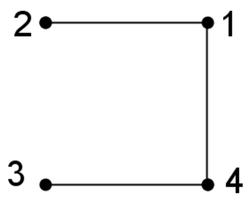


A escoge un punto {2}. Se borran las aristas {1, 2} y {2, 3}.

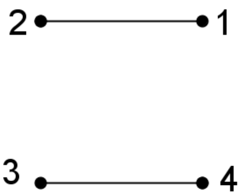


B escoge el punto opuesto {4}. Se eliminan las otras dos aristas y queda un caso $n = 2$ en el que **B** gana.

Caso 4.2.2:



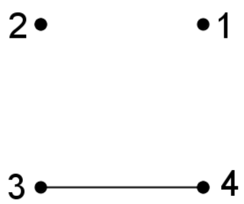
A escoge {2, 3}.



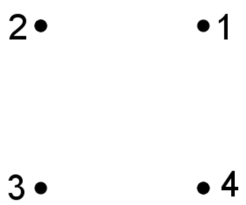
B escoge {1, 4}, el complementario.

De nuevo se nos presentan dos opciones: **A** puede coger un punto o una arista:

Caso 4.2.2.1:

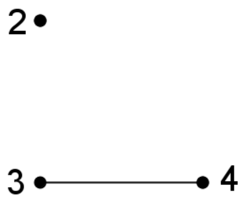


A escoge la arista {1, 2}.

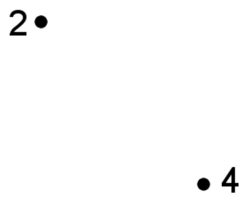


B escoge la arista restante {3, 4}. Ahora solo quedan cuatro puntos que escogidos alternativamente dan la victoria a **B**.

<u>Caso 4.2.2.2:</u>



A escoge un punto, por ejemplo {1}.



B escoge un punto del otro lado, por ejemplo {3}. Quedan dos puntos ({2} y {4}) y **B** gana de nuevo.

5. Algunas consideraciones previas para *n* > 4

5.1 Definiciones y notación

<u>*Simplex*</u>: Geométricamente es el análogo en otras dimensiones de un triángulo. Representaremos un simplex dando los vértices que lo forman o simplemente indicando su dimensión.

Ejemplo: El simplex {1, 2, 3} es un triángulo sin los elementos que lo componen (las aristas {1, 2}, {1, 3} y {2, 3} y los vértices {1}, {2} y {3}). Como su dimensión es 2, si no necesitamos explicitar sus vértices, diremos que es un $\boldsymbol{S}^2$.

Una jugada consiste en retirar un simplex y al hacerlo desaparecen todos los simplex de dimensión mayor que dependen de él.

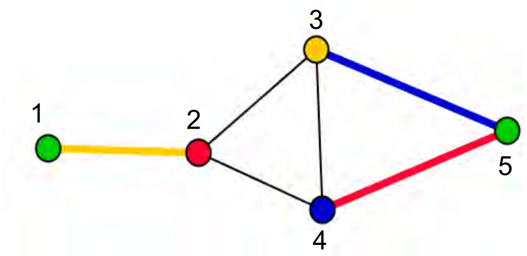
<u>*Incomplex*</u>: Un incomplex de dimensión *n* está compuesto por todos los simplex de dimensión menor que *n* que rodean a un simplex de dimensión *n*.

Por ejemplo los puntos, aristas y caras que componen un tetraedro sin incluir el espacio del tetraedro en sí mismo es un incomplex de dimensión 3. Todas las partidas de este juego comienzan con un incomplex. Le hemos puesto este nombre por la palabra "incompleto" (pues le falta el interior) y una transformación para incluir la terminación "-plex".

Notación: $\boldsymbol{In}^2_{123}$ representa el triángulo {1, 2, 3} sin su interior, esto es: sus aristas ({1, 2}, {1, 3} y {2, 3}) y sus vértices ({1}, {2} y {3}). Con $\boldsymbol{In}^2$ indicamos un incomplex de dimensión dos sin especificar sus aristas.

<u>*Figuras:*</u> Usaremos una representación por colores para mostrar diferentes jugadas de **A** y la respuesta de **B**.

Ejemplo: En la siguiente figura hay representadas cuatro posibles jugadas, una por color:



Verde: Si **A** coge {1}, **B** debe coger {5} y viceversa.

Rojo: Si **A** coge {2}, **B** debe coger {4, 5} y viceversa.

Amarillo: Si **A** coge {3}, **B** debe coger {1, 3} y viceversa.

Azul: Si **A** coge {4}, **B** debe coger {3, 5} y viceversa.

5.2 Reducción de dimensión

Para visualizar mejor las jugadas, siempre que no queden más simplex de tamaño *n* o mayor podemos disminuir el conjunto a dimensión *n.*

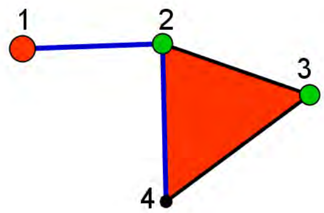
Ejemplo en $\boldsymbol{In}^3$: Al comenzar la partida tenemos un tetraedro en el espacio. Si tras varias jugadas nos quedan cuatro puntos unidos entre sí por cuatro aristas, observamos que es un cuadrado en el plano y hemos reducido la dimensión del juego.

5.3 Resolución de algunas figuras básicas

Empezamos por definir cuatro posiciones útiles para la resolución de incomplex de dimensión mayor que tres.

***El cuadrado*:** Está resuelto en **Caso 4.2**.

Posición α:

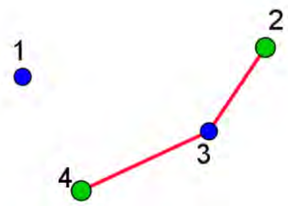


Si **A** escoge {1}, **B** escoge {2, 3, 4} y queda un $\boldsymbol{In}^2$.

Si **A** escoge {1, 2}, entonces **B** puede escoger {2, 4}, {3, 4} o {2, 3} y llegamos a la ***posición* β,** que desarrollaremos a continuación.

Si **A** escoge {2}, entonces **B** puede escoger {3} o {4} y queda un $\boldsymbol{In}^1$.

Posición β:



En esta hay menos opciones: si **A** coge un punto verde, **B** coge el otro y queda un $\boldsymbol{In}^1$. Si **A** coge uno azul, lo mismo; y si **A** coge una arista, **B** coge la otra arista y quedan cuatro puntos, de los que cada uno coge dos por turnos.

Posición γ:

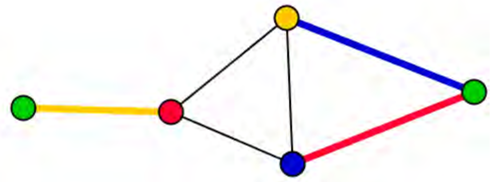


Figura 1

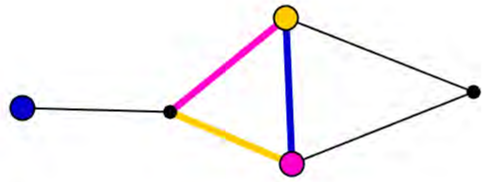


Figura 2

Figura 1:

Amarillo, rojo y azul: queda la ***posición* β.**

Verde: queda un ***In***^{2}.

Figura 2:

Azul: queda un ***cuadrado.***

Amarillo y rosa: queda la misma figura que si en un ***cuadrado*** **A** quita una arista y **B** la opuesta.

6. Resolución del incomplex 4 (*n* = 5)

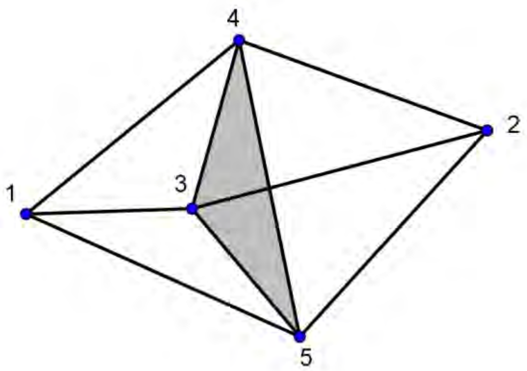
Como siempre, en el primer paso hay que usar la estrategia del complementario

Caso 5.1: **A** coge un vértice y **B** un S^3 o viceversa:

Después de este paso queda un In^3 en el que ya está probado que el segundo jugador puede ganar.

Caso 5.2: **A** coge una arista y **B** la cara complementaria o viceversa

Esto es lo que se obtiene:



IMPORTANTE: la cara {3, 4, 5} no existe, por eso está coloreada, pero las demás caras ({5, 2, 3}, {1, 3, 4},…), sí existen.

La figura está formada por un In^2 y dos puntos separados, cada uno de ellos unido a todos los demás y con las caras correspondientes.

La figura es simétrica con respecto al plano que pasa por {3, 4, 5}, lo que significa que para cada simplex de un lado que retire **A**, el jugador **B** puede retirar el simétrico. Además, como **B** también gana en el eje de simetría (In^2_{345}), si **A** retira algo de él, **B** retira el correspondiente dentro del incomplex.

Es importante observar que al quitar un simplex y su simétrico, el eje de simetría no se ve afectado y que al quitar algo del eje de simetría, automáticamente desaparecen todos los simplex que dependen de él, tanto de un lado como del otro del eje de simetría por lo que se sigue conservando la simetría.

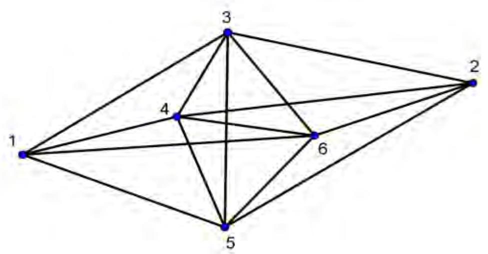
Esta *estrategia del simétrico* funciona siempre que eje de simetría sea una figura en la que **B** tenga una estrategia para ganar y su forma de jugar es la indicada.

7. Resolución del incomplex 5 (*n* = 6)

Para el In^5 hay tres tipos de juego según la dimensión del simplex que escoja el primer jugador.

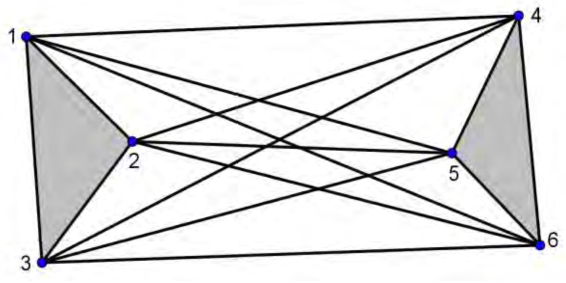
Caso 6.1: **A** quita un S^0 o un S^4 y **B** el complementario queda un In^4 y gana **B**.

Caso 6.2: **A** quita una arista o un S^3 y **B** el complementario



Después de este paso queda un análogo del caso 5.2: un **In**^{3} con dos puntos que se conectan con todos los demás pero no entre sí y, por tanto, B debe seguir la estrategia del simétrico.

Caso 6.3: **A** quita una cara y **B** la cara complementaria.

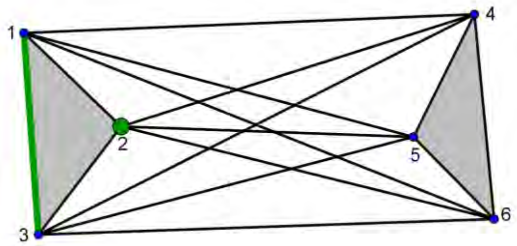


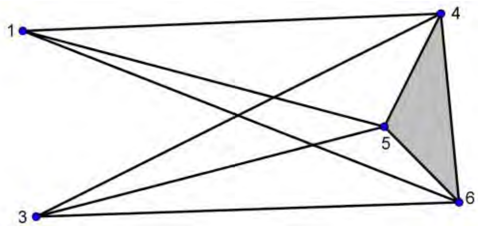
De nuevo, las caras coloreadas son las que ya **no** existen.

Desde esta posición **A** tiene varias opciones:

Caso 6.3.1: Igual que otras veces, si **A** coge un simplex de alguno de los In^2 de los extremos, la estrategia de **B** es contestar como lo haría si solo existiera esa figura.

Ejemplo: **A** escoge el punto {2} y **B** la arista {1, 3}, quedando el caso 5.2.

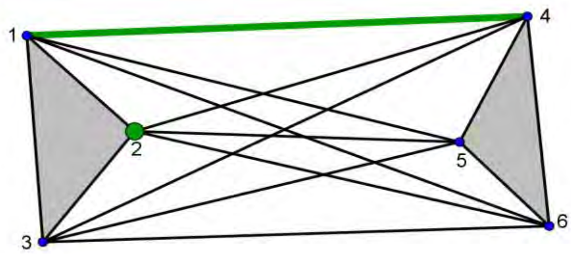


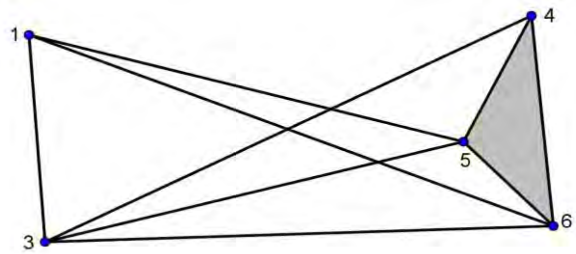


Otras opciones:

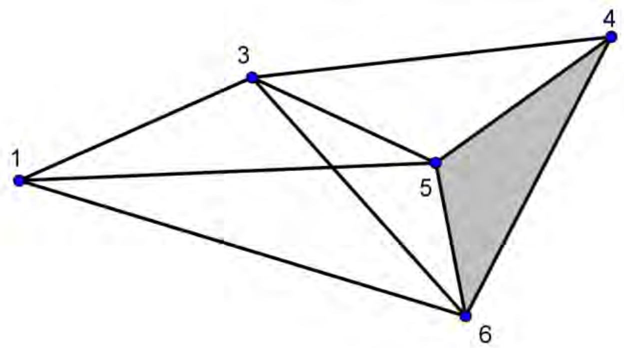
A todavía puede escoger tres cosas más: una arista que conecte dos puntos, uno de cada ***In***^{2} (como por ejemplo {1,4}), una cara ({1, 4, 5}), o un espacio de tres dimensiones ({1, 2, 4, 5}).

<u>Caso 6.3.2</u>: En el caso de que **A** coja una arista, **B** debe coger un punto que no sea extremo de esa arista, con este resultado:





Recolocando los puntos tenemos la siguiente figura:



En este caso tenemos una posición muy parecida a 5.2, la única diferencia es que en este caso la cara central si está disponible, pero falta la lateral {4, 5, 6}.

<u>Casos 6.3.2.1 a 6.3.2.7</u>: Agruparemos aquí algunas de las jugadas posibles:

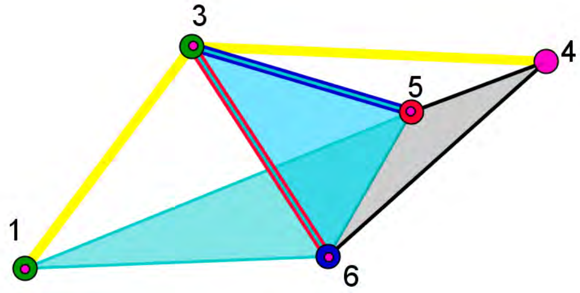
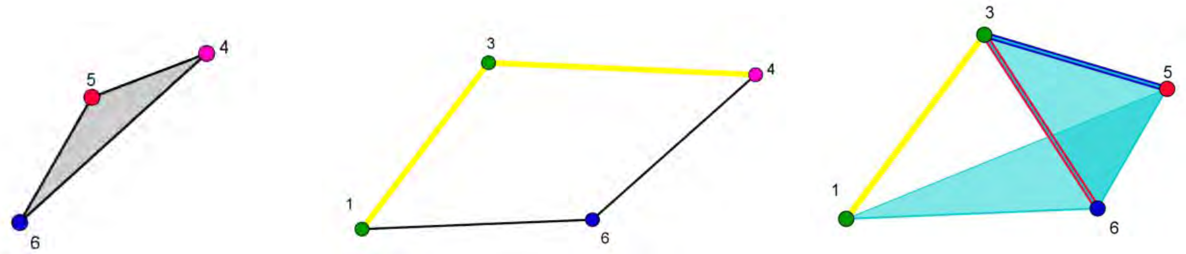


Figura 3

a) Verde: Si **A** quita un punto verde, **B** quita otro punto verde y queda un ***In***^{2}.

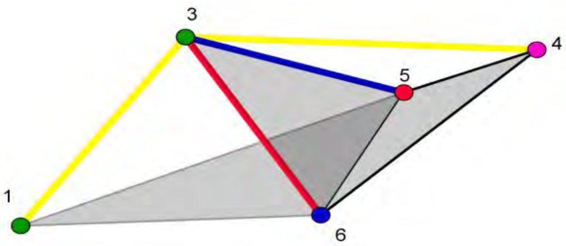
b) Rojo y azul oscuro: queda un ***cuadrado***.

c) Rosa: punto {4} o espacio {1, 3, 5, 6}. Queda un ***In***^{3}.

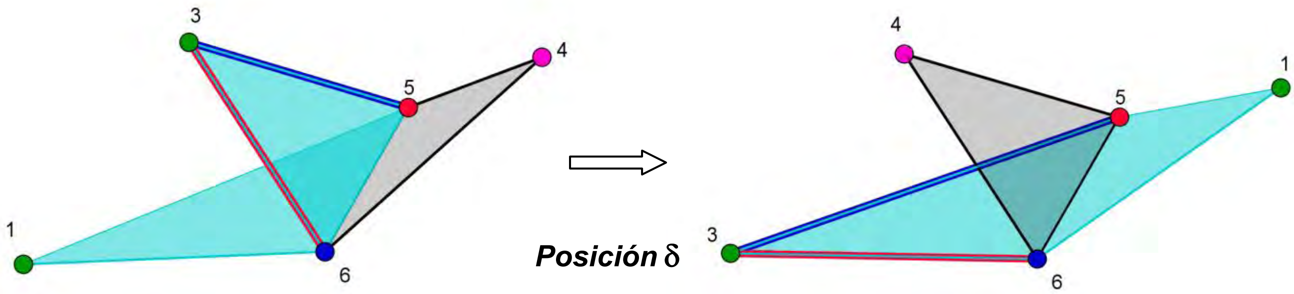


Las figuras ilustran lo que queda en los cados a), b) y c).

d) Azul claro: queda la posición 5.2 tras quitar **A** una cara lateral y **B** la simétrica.



e) Amarillo: Recolocamos los vértices y vemos que estamos en el caso 5.2 después de que **A** haya cogido una arista lateral y **B** la simétrica.



Otras posibilidades:

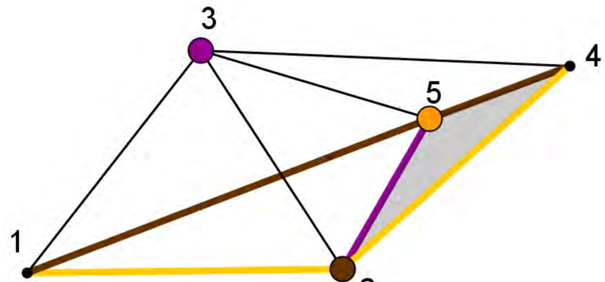


Figura 4

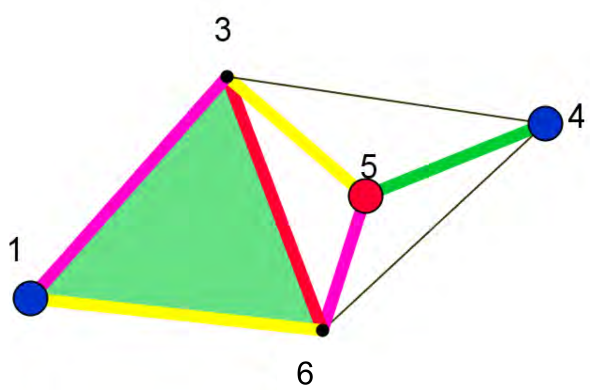
f) Naranja o marrón: si **A** coge una de la aristas, **B** debería coger el punto y viceversa, quedando la ***posición*** α.

g) Morado: queda un ***cuadrado***.

<u>**Caso 6.3.2.8**</u>: **A** quita {3,4,5} y **B** {3,4,6} o viceversa. En este caso **B** debe jugar igual que antes, con tres excepciones:

__**Excepción 1**__: Aristas naranjas y marrones de la Figura 4: Si **A** coge una de esas aristas, **B** debe coger la otra, no el punto y se obtiene la ***posición*** δ**.**

__**Excepción 2**__: Si **A** coge la cara central {3,5,6}, **B** coge una arista de la izquierda y tenemos las siguientes situaciones:

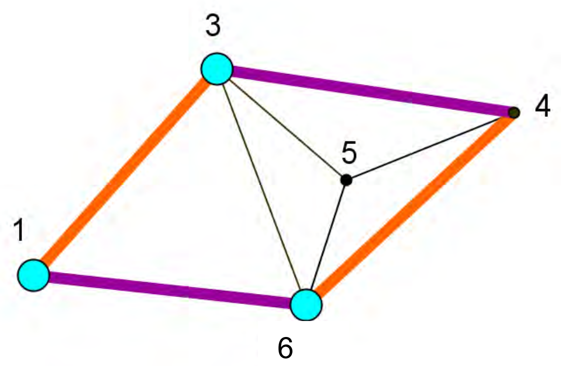


a) Azul: queda un ***In***^{2}.

b) Rojo: queda un ***cuadrado***

c) Amarillo y rosa: queda la ***posición*** γ**.**

d) Verde: queda el 6.3.2 caso e) pero sin caras, como si **A** hubiera quitado una y **B** la otra, que es su jugada ganadora.



e) Azul claro: si **A** coge un vértice central ({3} o {6}), **B** debe coger el de la izquierda {1}, y viceversa, quedando un ***In***^{2}.

f) Naranja y morado: queda la ***posición*** γ***.***

__**Excepción 3**__: (__***Posición*** ε__) Si **A** coge una cara de la izquierda, **B** debe coger otra cara de la izquierda.

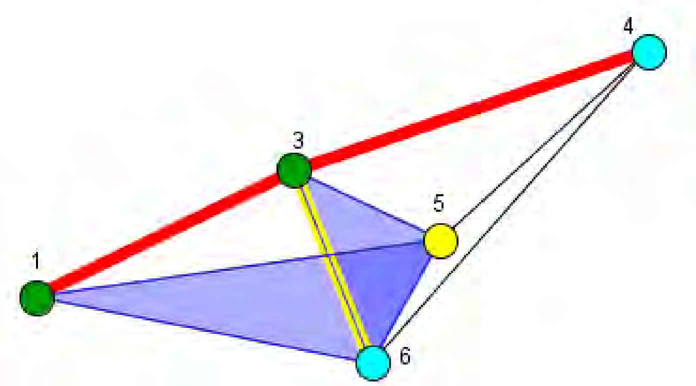


Figura 5

Las caras azules son las que todavía están disponibles.

__Figura 5__:

a) Rojo: queda la ***posición*** δ***.***

b) Azul oscuro: queda el caso 5.2 después de que **A** y **B** hayan eliminado las seis caras una por una y alternativamente. Como esta es una posición a la que se llega a partir del caso 5.2 usando **B** la estrategia ganadora, **B** ganará continuando con esa estrategia

c) Amarillo: queda un ***cuadrado***

d) Verde: queda un ***In***^{2}.

e) Azul claro: queda un ***In***^{2}.

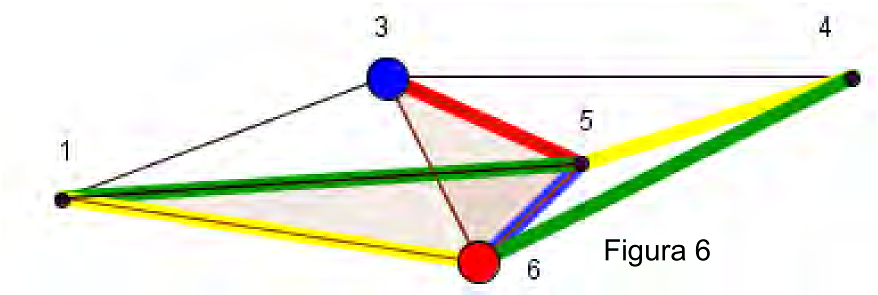
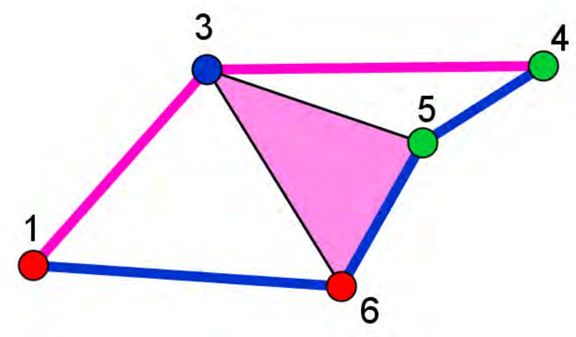


Figura 6:

f) Rojo y azul oscuro: queda un ***cuadrado***

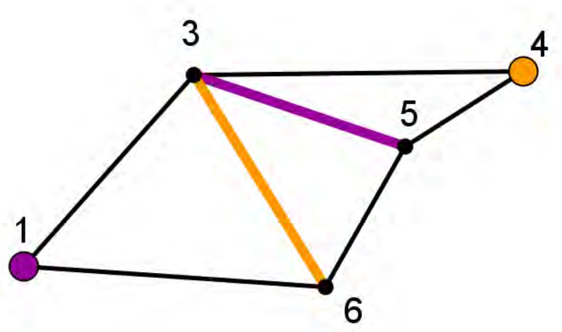
g) Verde y amarillo: Llegamos a la ***Posición*** ϕ (Resolvemos el caso en que eliminamos las aristas verdes. El caso en que se eliminan las amarillas es igual pero cambiando el nombre de los vértices).



ϕ.1 Rojo y verde: queda un ***In***^{2}.

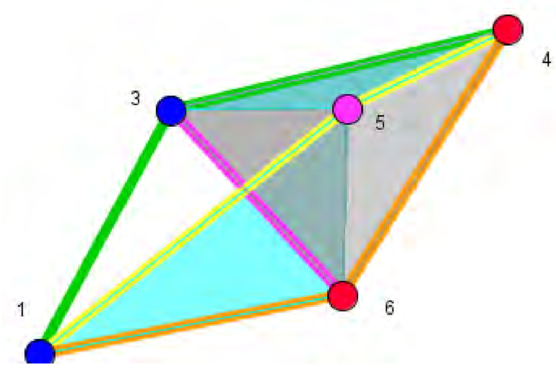
ϕ.2 Rosa: **A** coge una arista y **B** la cara o viceversa, quedando la ***posición*** γ.

ϕ.3 Azul: si se retiran {3} y {6,5} queda una etapa del ***cuadrado*** (4.2.2). Si se retiran {3} y {1,6} o {4,5} queda la ***posición*** β.



ϕ.4 Morado y naranja: queda un ***cuadrado***.

<u>Caso 6.3.2.9</u>: **A** quita {3,1,5} y **B** quita {3,1,6}.

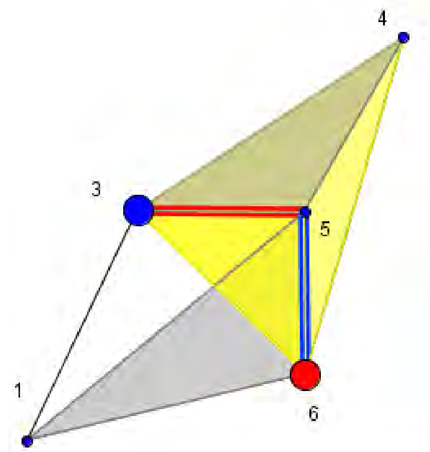


a) Azul oscuro y rojo: queda un ***In***^{2}.

b) Rosa: queda un ***cuadrado.***

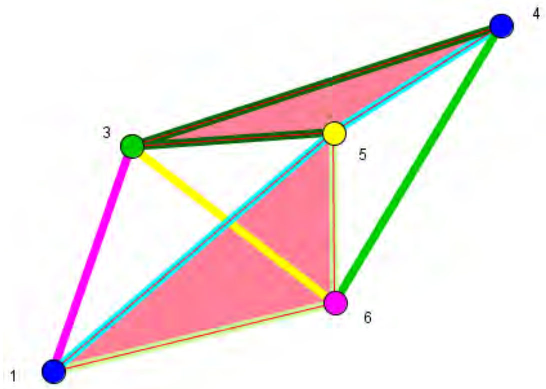
c) Verde, naranja y amarillo: queda la ***posición*** **δ.**

d) Azul claro: {5,6,1} o {3,5,4} queda la ***posición*** **ε.**



e) Azul y rojo: queda un ***cuadrado***.

f) Amarillo {3,5,6} o {3,6,4}: En este caso hay varias posibilidades:



f1) Azul oscuro: queda un ***In***^{3}.

f2) Verde muy oscuro y verde muy claro: queda la ***posición*** **ϕ.**

f3) Amarillo: queda un ***cuadrado***

f4) Verde y rosa: queda la ***posición*** **α**.

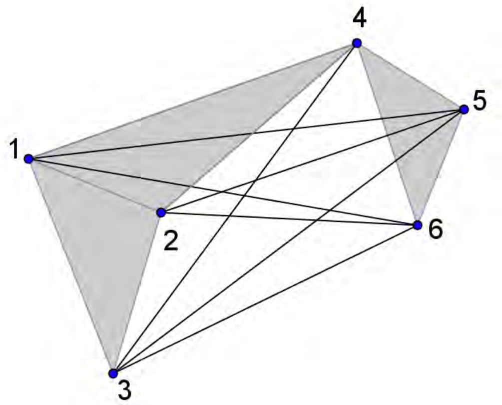
f5) Azul claro: queda el Caso 6. 3. 2. 5 después de que **A** quite una cara y luego **B** la otra

f6) Rojo: {1,5,6} y {3,4,5}queda el caso 5.2 sin caras, después de que por turnos **A** y **B** hayan quitado cada uno tres caras opuestas.

Con esto hemos terminado de resolver el caso 6.3.2 en el que **A** coge una arista que une dos puntos uno de cada ***In***^{2}.

Aún nos quedarían por resolver dos casos: el 6.3.3: si **A** coge una cara y el 6.3.4: si **A** coge un espacio. Pero lamentablemente aún no hemos podido encontrar la estrategia ganadora para todas las situaciones. No expondremos los casos particulares que sí comprendemos y seguiremos pensando en ello con la esperanza de que nos termine saliendo.

Exponemos aquí uno de los casos que no hemos conseguido resolver:



El juego comienza con **A** quitando la cara {1,2,3} y **B** contesta con el complementario: {4,5,6}. Después **A** quita la cara {1,2,4}. Hemos demostrado que en este paso no vale la estrategia del complementario pero no hemos sido capaces de encontrar una estrategia válida para **B**.

8. Algunas ideas que nos pueden servir para resolver el problema para otros valores de *n*

Juego con $n = 7$:

Si se tienen la estrategia ganadora para $n = 6$, se obtiene sin dificultad la estrategia ganadora para $n = 7$ puesto que también tiene tres posiciones iniciales y cada una de ellas es parecida a la correspondiente del caso $n = 6$ por lo que se pueden resolver haciendo pequeñas modificaciones en las estrategias.

Figuras interconectadas:

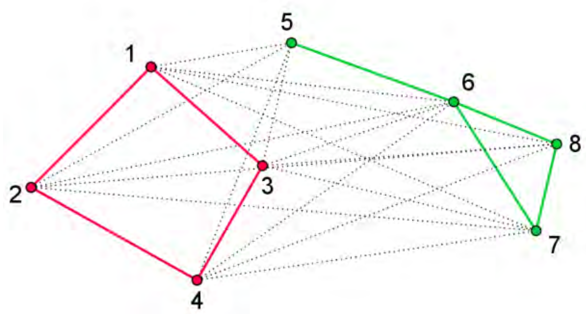
Una posición que aparece con frecuencia durante una partida es la de la unión de dos figuras en la que cada simplex de una de las figuras está unido con todos los simplex de la otra figura. Por ejemplo, ocurre esto siempre que en el primer movimiento usamos la estrategia del complementario.

Si **B** tiene una estrategia ganadora para las dos figuras de los extremos y una de estas figuras cumple la condición de que **B** puede ganar en ella quitando siempre un simplex de la misma dimensión que el que ha quitado **A**, entonces sabemos cómo debe jugar **B** para ganar.

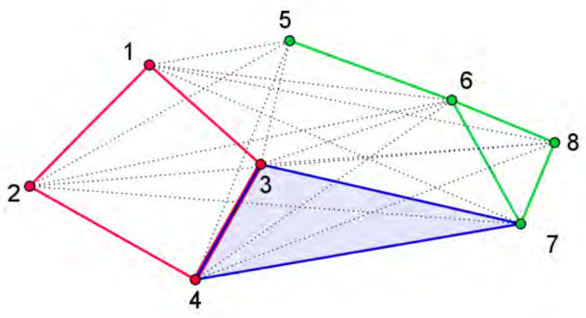
Todos los polígonos con un número par de lados cumplen la condición arriba expuesta, es decir, **B** puede ganar quitando siempre simplex de la misma dimensión del que ha quitado **A.**

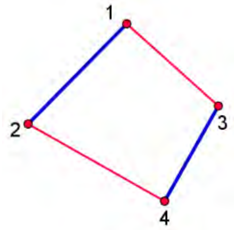
Ilustramos con un ejemplo la estrategia que debe seguir **B** para ganar en esta situación:

A la izquierda hay un ***cuadrado*** y a la derecha tenemos la ***posición*** α y estas figuras están conectadas por todos los simplex.

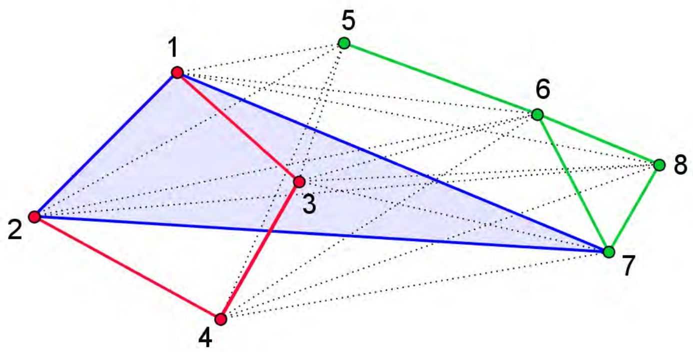


A quita {3,4,7}





En el **cuadrado**, la jugada ganadora de la misma dimensión que {3,4} es {1,2}.



Así pues, **B** debería coger {1,2,7}.

Y recordamos que si **A** coge algo de alguna de las dos figuras de los extremos, **B** debe jugar como si solo existiera esa figura.

Esto es de mucha utilidad en el caso de que **A** coja una arista o su complementario en cualquier incomplex, como un $\boldsymbol{In}^9$ por ejemplo, puesto que después de que **B** coja el complementario nos queda un $\boldsymbol{In}^1$ unido totalmente con otro incomplex, de dos dimensiones menos, en este caso sería un $\boldsymbol{In}^7$, y si sabemos jugar en ese incomplex menor, sabremos jugar también para esta figura.

Conclusiones

Hemos logrado encontrar la estrategia ganadora para n = 5 y, aunque no hemos conseguido resolver el problema completamente, sí tenemos estrategias ganadoras en muchos de los casos para n = 6 y hemos encontrado una forma de pensar geométricamente en dimensiones superiores a tres a pesar de que no podemos visualizarlo.

Además, hemos pensado en cómo aprovechar los errores del jugador **B** si nos toca ser el jugador **A** y creemos que somos capaces de ganar siempre que **B** se equivoque, pero no hemos hecho un estudio exhaustivo de los casos.

Por ejemplo, tomemos el caso del tetraedro (n = 4) e imaginemos que somos el jugador **A**. Es conveniente comenzar siempre escogiendo simplex de la mayor dimensión posible para alargar la partida y que **B** cometa más fallos, así que escogemos una cara {1, 2, 3}. Si **B** escoge una arista {1, 4} en vez del complementario de nuestra elección, podemos dar la vuelta a la partida y ganar. En este caso queda solo una cara del tetraedro como opción válida, además de los cuatro puntos y el resto de aristas. Tenemos entonces una figura que representada en el plano es un cuadrilátero con una diagonal, pero con uno de los triángulos interiores vacío. Ahora escogemos la diagonal y obtenemos la posición del ***cuadrado***, pero en esta situación comienza escogiendo **B** y sabemos cómo ganarle.

Personalmente, este trabajo nos ha resultado una experiencia muy interesante, que además nos ha ayudado a pensar de manera geométrica y a entender las matemáticas de otra manera. Investigando sobre el tema hemos aprendido cosas nuevas y hemos trabajado en equipo aprendiendo unos de otros.

Bibliografía

Ian Stewart, "*Cómo cortar un pastel*", Editorial Crítica, original en inglés de 2006,

traducción de 2007. ISBN: 978-84-8432-883-4

Anexos

Incluimos en pdf el capítulo 19 del libro de Ian Stewart "*Cómo cortar un pastel*" al que hacemos referencia en el trabajo con el único fin de que el jurado pueda disponer de él y en la esperanza de que no sea considerado como una vulneración de los derechos de autor.