Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Octava Edición, 2013/2014

TRABAJO: Cálculo de las mejores rutas de evacuación en una zona rural

FINALISTA EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

- Lidia Calleja Lavín
- Víctor Mantecón Mantecón
- Laura Portilla Queiro
- Asunción Saínz Pelayo

TUTORA:

- María del Pilar Sabariego Arenas

CENTRO: I.E.S. Vega de Toranzo (Alceda, Cantabria)

Cálculo de las mejores rutas de evacuación en una zona rural.

Grupo Hamilton

Índice.

Agradecimientos.

El día que fuimos a la Universidad Autónoma de Madrid a la entrega de premios de la VIII Edición del Premio para Estudiantes de Secundaria, conocimos a **Marta Aguado Bravo, Raúl Díaz Gómez, Francisco Tomás-Valiente Jordá, Cecilia Vales Jiménez** y su tutor **Miguel Gras Gigosos**, alumnos y profesor del **I.E.S. Ramiro de Maetzu** de Madrid, quienes nos dijeron que nos habíamos equivocado en nuestro trabajo y que no habíamos aplicado el Algoritmo de Dijkstra. Efectivamente así era y en esta nueva versión resolvemos el error.

Desde aquí les damos las gracias por sus comentarios que nos han permitido no sólo corregir el error sino también aprender para el futuro.

1. Introducción y antecedentes.

Muchas veces les preguntamos a nuestros profesores de Matemáticas para qué sirven las cosas que nos están explicando, sobre todo cuando comenzamos a estudiar Álgebra, ¿para qué nos servirá conocer una igualdad notable o saber simplificar una fracción algebraica?

Los hay que simplemente contestan que para aprobar el examen, y los hay que tratan de explicarnos cómo las Matemáticas ayudan al desarrollo de nuestro pensamiento abstracto. Incluso, los hay que tratan de mostrarnos situaciones reales en las que se usan las Matemáticas que estamos estudiando en ese momento u otras Matemáticas que no se estudian en Secundaria pero que resultan muy fáciles de entender, tanto que no parecen Matemáticas.

Esta última circunstancia es la que se nos ha dado a nosotros en clase este curso. Le preguntamos a nuestra profesora para qué servían las sucesiones y terminamos hablando de Teoría de Grafos. Ella nos explicó que existen muchos problemas que se pueden plantear usando grafos: la planificación de tareas para realizar un proyecto, encontrar las rutas de menor longitud entre dos puntos geográficos, calcular el camino más rápido para realizar un transporte, averiguar el flujo máximo que puede llegar desde una fuente a un barrio, mostrar las relaciones sociales que se dan en una comunidad, proyectar redes de ordenadores, etiquetar un mapa sin que se superpongan los nombres de los sitios de interés… y muchos más.

Un día, nuestra profesora llegó a clase diciéndonos que se habían convocado varios premios a nivel regional y nacional y que si nos apetecía participar en alguno. Después de leernos la información de cada premio nos decidimos por el **VIII Premio para Estudiantes de Secundaria del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid**. Había que hacer un trabajo de investigación y nosotros sabíamos sobre qué: queríamos trabajar con grafos. Se lo comunicamos a nuestra profesora y a ella le pareció bien, pero nos puso como condición que tenía que estar relacionado con nuestro contexto.

Pensamos en varias ideas y al final nos decidimos por estudiar cuáles son los caminos más cortos para llegar a la plaza de nuestro pueblo desde cada una de las cabañas que están diseminadas por la zona.

2. Objetivos.

Los autores de este trabajo vivimos en una zona rural donde existen muchas cabañas dispersas por el monte, algunas de ellas aún habitadas. Para llegar a cada cabaña existen uno o varios caminos, pero en caso de que ocurra algún problema (como un incendio, por ejemplo), ¿cuál será la ruta óptima que nos permita llegar al pueblo más cercano y así ponernos a salvo?

Nuestro objetivo es usar las herramientas que nos facilita la Teoría de Grafos para dar respuesta a esa pregunta. Queremos encontrar los caminos más cortos entre algunas de las cabañas cercanas a nuestro pueblo y la plaza del mismo.

El interés de este estudio no es sólo el cálculo de los caminos de longitud mínima sino también el demostrarnos a nosotros mismos que somos capaces de resolver problemas de la vida real usando Matemáticas (aunque sean de niveles superiores a las de 3º de E.S.O.) y otras herramientas que no sabíamos ni que existían cuando comenzamos a trabajar en este proyecto.

3. Descripción de proyecto.

Como hemos dicho antes, el proyecto consiste en calcular rutas de longitud mínima usando un grafo, así que comenzamos por intentar hallar las distancias que nos iban a hacer falta para calcular las rutas.

Nuestra primera intención fue usar un mapa de nuestro pueblo para calcular las longitudes de los caminos que unen las diferentes cabañas con la plaza, pero cuando empezamos a trabajar nos dimos cuenta de que con una fotografía aérea íbamos a trabajar mejor, ya que muchos de los caminos no aparecían en los mapas que estábamos usando. El problema estaba ahora en que no es tan fácil tomar medidas sobre una fotografía como lo es sobre un mapa, por lo que tuvimos que buscar una herramienta que nos permitiese usar fotografías aéreas y a la vez tomar medidas. Después de buscar por Internet y pedir recomendaciones a expertos topógrafos conocidos nuestros, nos decidimos por **Iberpix**, una aplicación que encontramos en la página del **Instituto Geográfico Nacional** que nos permite manejar fotografías aéreas y calcular distancias sobre ellas. Justo lo que buscábamos.

Una vez que tuvimos las fotografías aéreas y las longitudes de los caminos, teníamos que construir el grafo que representase la situación que encontramos en nuestro pueblo. Entonces surgió un nuevo problema: ¿cómo dibujaríamos el grafo? Lo primero que se nos ocurrió fue usar **Paint**, pondríamos la foto de fondo y sobre ella dibujaríamos el grafo. Las primeras pruebas que hicimos no quedaban todo lo bien que deseábamos. Necesitábamos otra herramienta, así que volvimos a recurrir a Internet, donde encontramos el software **Grafos**, para la construcción, edición y análisis de grafos, desarrollado por Alejandro Rodríguez Villalobos, profesor de la Universitat Politècnica de València. Este programa nos permite poner las fotografías aéreas como "tapiz" y con ellas de fondo construir el grafo sobre el que realizar los cálculos. También nos permite asignar a cada arista del grafo un peso que muestra la distancia que hemos calculado previamente con **Iberpix**.

4. Herramientas necesarias.

La **Teoría de Grafos** es una rama de la Matemática Discreta que usa diferentes conceptos de otras áreas como el Análisis Combinatorio, el Álgebra Abstracta, la Probabilidad, la Geometría de Polígonos, la Aritmética y la Topología, y que estudia las propiedades de los grafos.

Los **grafos** son estructuras que constan de dos partes, el conjunto de vértices, nodos o puntos; y el conjunto de aristas, líneas o lados. (Ver fig. 1.)

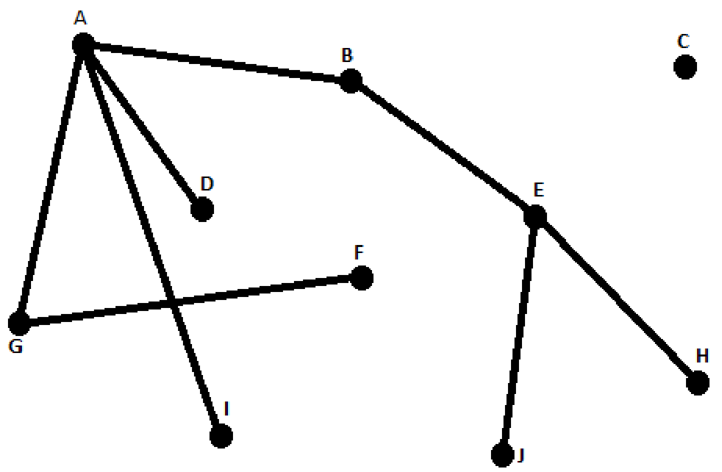


Figura 1. Representación gráfica de un grafo.

<u>**Origen.**</u>

El origen de la teoría de grafos se remonta al siglo XVIII con **el problema de los puentes de Königsberg** (actualmente Kaliningrado). Este consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río Pregel de modo que se recorrieran todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos. Este tipo de caminos reciben el nombre de *caminos eulerianos* (en honor a Leonhard Euler).

En 1736, Leonhard Euler publicó el trabajo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (*La solución de un problema relativo a la geometría de la posición*) donde aparecía la resolución del problema, que dice que no existe dicho camino. Este es considerado el primer resultado de la Teoría de Grafos y uno de los primeros resultados topológicos (i.e. que no depende de ninguna medida). Lo que ilustra la profunda relación que existe entre la Teoría de Grafos y la Topología.

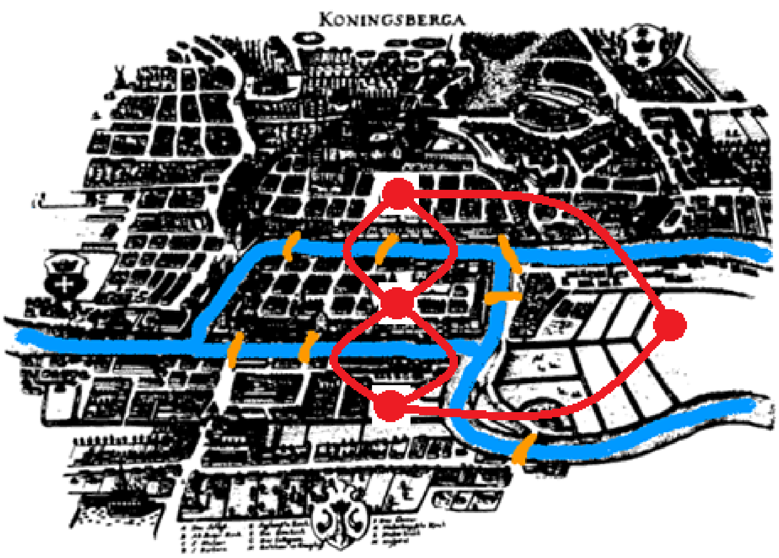


Figura 2. Grafo que sirvió para resolver el problema de los puentes de Köningsber, dibujado sobre un mapa de la ciudad en 1736.

Luego, en 1847, Gustav Kirchhoff, utilizó la Teoría de Grafos para analizar redes eléctricas publicando sus leyes para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos, conocidas como leyes de Kirchhoff. Esta es considerada la primera aplicación de la Teoría de Grafos a un problema de ingeniería.

En 1852 Francis Guthrie planteó el problema de los cuatro colores el cual afirma que es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. Este problema, que no fue resuelto hasta 1976 por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, fue el que hizo que se desarrollara definitivamente la Teoría de Grafos ya que, al tratar de resolverlo, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales de los grafos.

Caminos de longitud mínina.

Dos *aristas adyacentes* son aquellas que inciden en un mismo nodo.

Un *camino*, dentro de un grafo, es una sucesión de aristas adyacentes.

Además de los caminos eulerianos, mencionados antes, existen otro tipo de caminos llamados caminos hamiltonianos. Estos se llaman así en honor de *William Rowan Hamilton*, inventor de un juego que consistía en encontrar un ciclo hamiltoniano en las aristas de un grafo de un dodecaedro.

Un *camino hamiltoniano* es un camino de un grafo que visita todos los vértices del grafo una sola vez. Si además el último vértice visitado es adyacente al primero, el camino es un *ciclo hamiltoniano.*

Un *grafo ponderado* es aquel al que le hemos asignado un peso a cada arista (en nuestro caso, una distancia).

Dado un grafo ponderado, se define el *camino de coste mínimo* de un nodo u a un nodo v, como el camino donde la suma de los pesos de las aristas que lo forman es la más baja entre las de todos los caminos posibles de u a v.

Para resolver este problema, los algoritmos más usados son los de Dijkstra, Floyd y Warshall. Nosotros usaremos el de **Dijkstra**.

El **algoritmo de Dijkstra** es un algoritmo eficiente de complejidad $O(n^2)$, donde n es el número de vértices del grafo, que sirve para encontrar el camino de coste mínimo desde un nodo origen a todos los demás nodos del grafo. Su nombre se refiere a *Edsger Wybe Dijkstra*, quien lo describió por primera vez en 1959.

Este algoritmo es un típico ejemplo de algoritmo ávido, que resuelve los problemas en pasos sucesivos, seleccionando en cada paso la solución más óptima con el objeto de resolver el problema.

El fundamento sobre el que se basa este algoritmo es el principio de optimizar: si el camino más corto entre los nodos u y v pasa por el nodo w, entonces la parte de camino que va de w a v debe ser el camino más corto entre todos los caminos que van de w a v. De esta manera, se van construyendo sucesivamente los caminos de coste mínimo desde un nodo inicial hasta cada uno de los vértices del grafo, y se utilizan los caminos conseguidos como parte de los nuevos caminos.

El algoritmo de Dijkstra en cada paso selecciona un nodo u cuya distancia es desconocida, entre los que tiene la distancia más corta al nodo origen s, entonces el camino más corto de s a u ya es conocido y marca el nodo u como ya conocido. Así, sucesivamente se van marcando nuevos nodos hasta que estén todos marcados; en ese momento es conocida la distancia mínima del origen s al resto de los nodos.

Entre las condiciones más importantes que deben considerarse para aplicar el algoritmo están:

- Las aristas deben tener un peso no negativo. En nuestro caso una distancia.
- El grafo debe ser dirigido y por supuesto poderado. En nuestro caso el nodo origen es el que marca la plaza de nuestro pueblo y la poderación viene dada por los pesos asignados a las aristas.

Los pasos del algoritmo son los siguientes:

1. Elegimos un nodo como nodo de partida, A. Creamos una lista de ternas ordenadas en las que el primer elemento del par es el nombre del nodo, el segundo la distancia del nodo al nodo de partida, A, y el tercer elemento el camino para llegar desde el nodo de partida a nodo que está en el primer lugar de la terna. En el caso del nodo de partida el segundo elemento de la terna es

0 y el tercer elemento AA. El resto de nodos comienzan con el segundo elemento de la terna infinito y el tercero vacío, ∅.

2. Consideramos los nodos que son adyacentes al nodo de partida y el segundo elemento de la terna ordenada correspondiente con cada uno de ellos pasa tomar el valor del peso correspondiente a la arista que los une con el nodo de partida, A. El tercer elemento de la terna, será A y el nombre del nodo correspondiente, adyacente a A. Aquellos que no son adyacentes al nodo de partida continúan teniendo como segundo elemento de la terna el valor infinito y como tercer elemento ∅.

3. Tomamos el primer nodo de los adyacentes al nodo de partida, A, como si fuese el nodo de partida y actuamos con él como lo hicimos en el paso dos. Si en la nueva lista de ternas ordenadas hay dos de ellas que tienen el primer elemento igual, nos quedamos con aquella que tenga el segundo elemento menor. Hay que observar que el segundo elemento siempre va a ser la distancia del nodo al punto de partida, A, el elegido en el paso 1, y que el tercer elemento será el camino desde el nodo de partida al nodo que estemos considerando, el primer elemento de la terna.

4. Repetimos el proceso hasta que todos las ternas ordenadas de la lista tengan como segundo elemento el menor valor posible.

Veámoslo con un ejemplo. Vamos a calcular el camino de longitud mínima en el grafo siguiente. Elegiremos como nodo inicial el A.

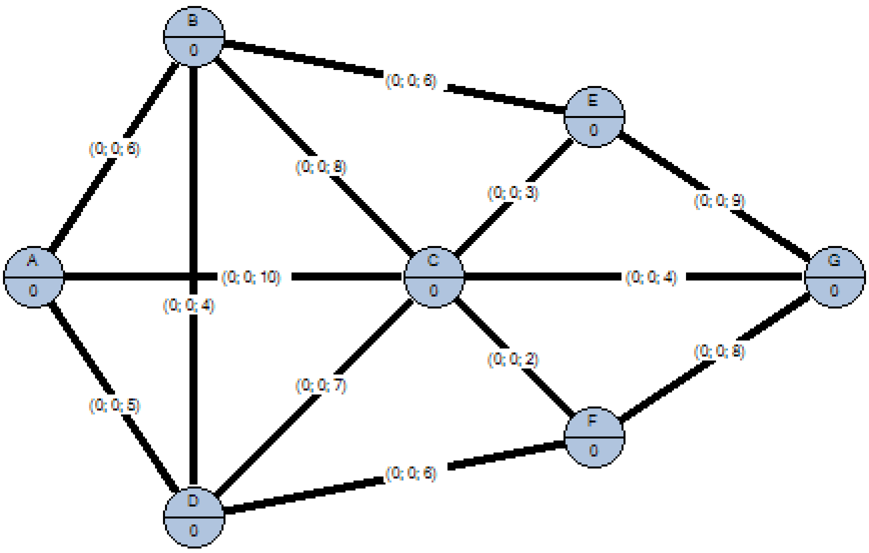


Figura 3. Grafo al que vamos a aplicar el algoritmo de Dijkstra.

Elegimos como nodo de partida el nodo A. La lista de ternas ordenadas es: $\{(A, 0, AA),\ (B, \infty, \emptyset), (C, \infty, \emptyset), (D, \infty, \emptyset), (E, \infty, \emptyset),\ (F, \infty, \emptyset), (G, \infty, \emptyset)\}$.

Los nodos adyacentes a A son B, C y D. En la fig. 4 podemos ver la situación.

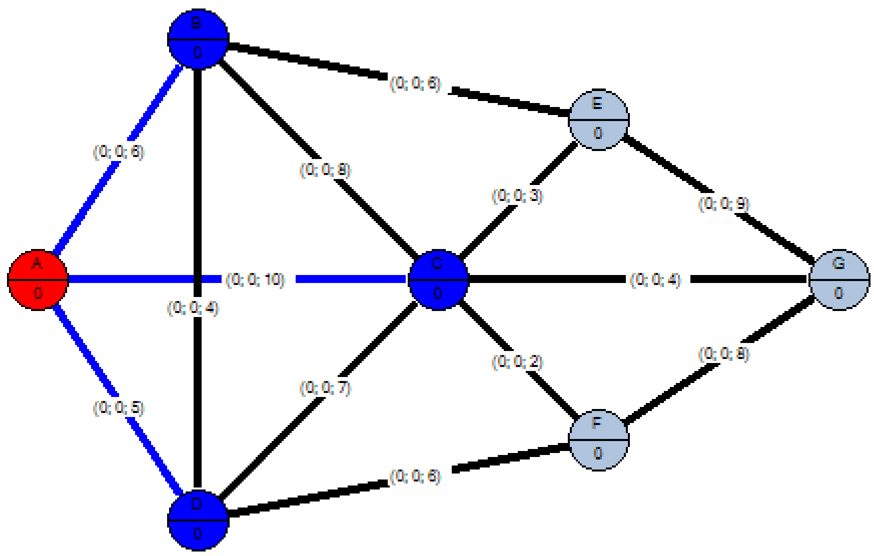


Figura 4. Nodo de partida y los adyacentes a él.

La lista de ternas ordenadas pasa a ser $\{(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(B,\infty,\emptyset),(C,\infty,\emptyset),(D,\infty,\emptyset),(E,\infty,\emptyset),$ $(F,\infty,\emptyset),(G,\infty,\emptyset)\}$. Como B, C y D se repiten como primer elemento en dos ternas de la lista, nos quedamos con las ternas que tengan el segundo elemento menor. Por tanto la lista pasa a ser $\{(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,\infty,\emptyset),\ (F,\infty,\emptyset),(G,\infty,\emptyset)\}$

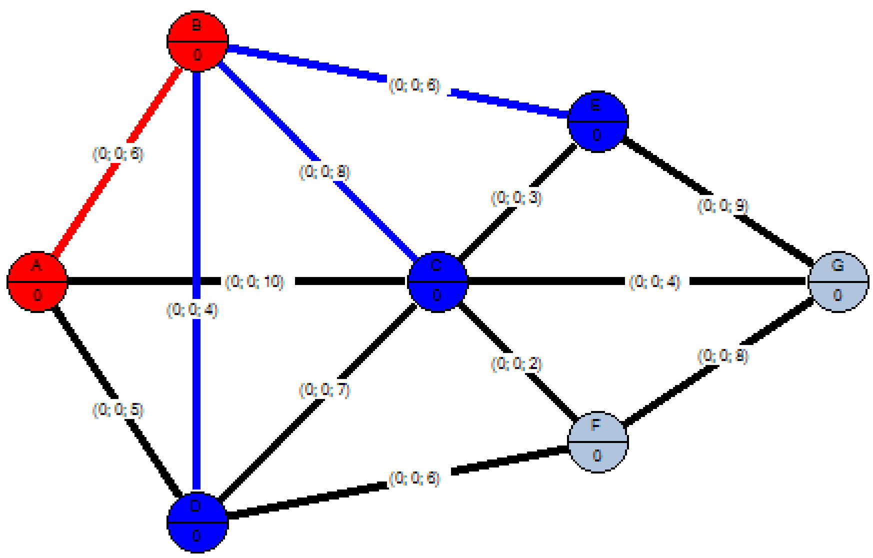


Figura 5. Nodos adyacentes al nodo B, el primero que elegimos de los adyacentes al nodo de partida, A.

Consideramos ahora el nodo B, los nodos adyacentes a B son E, C y D (ver fig. 5) y la lista de ternas ordenadas es

$$\left\{\begin{array}{c}(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,12,ABE),(C,14,ABC),(D,10,ABD),\\ (E,\infty,\emptyset),\ \ (F,\infty,\emptyset),(G,\infty,\emptyset)\end{array}\right\}$$

. Como C y D se repiten como primer elemento en dos ternas de la lista, nos quedamos con las ternas que tengan el segundo elemento menor. La lista es ahora

$\{(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,12,ABE),\ \ (F,\infty,\emptyset),(G,\infty,\emptyset)\}$.

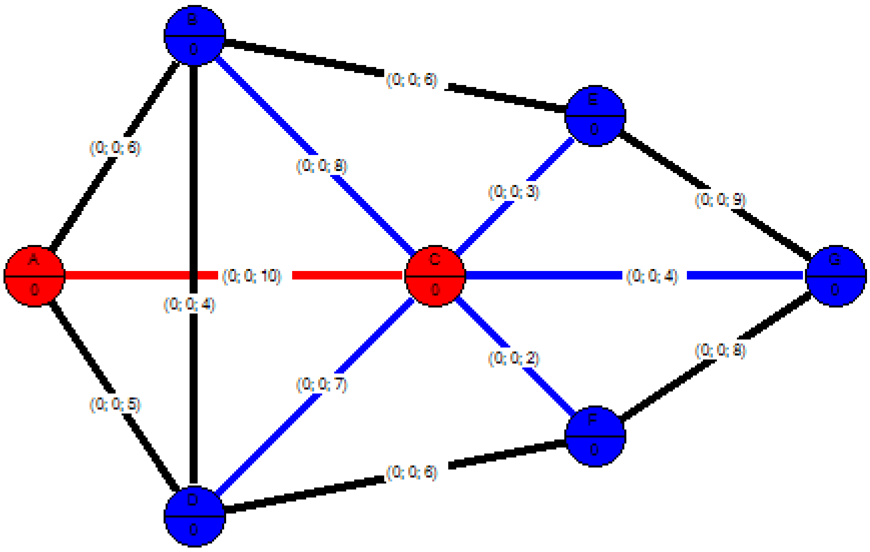


Figura 6. Nodos adyacentes al nodo C, el segundo que elegimos de los adyacentes al nodo de partida, A.

Consideramos ahora el nodo C, que tiene como nodos adyacentes, B, D, E, F y G (ver fig 6). La lista de ternas ordenadas es ahora

$$\left\{\begin{array}{c}(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,12,ABE),(B,18,ACB),(D,17,ACD),\\ (E,13,ACE),(F,12,ACF),(G,14,ACG),(F,\infty,\emptyset),(G,\infty,\emptyset)\end{array}\right\}$$

Como hay nodos que se repiten como primeros elementos de las ternas de la lista, nos quedamos con las ternas que tienen el segundo elemento menor. Es decir la lista es

$\{(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,12,ABE),(F,12,ACF),(G,14,ACG)\}$

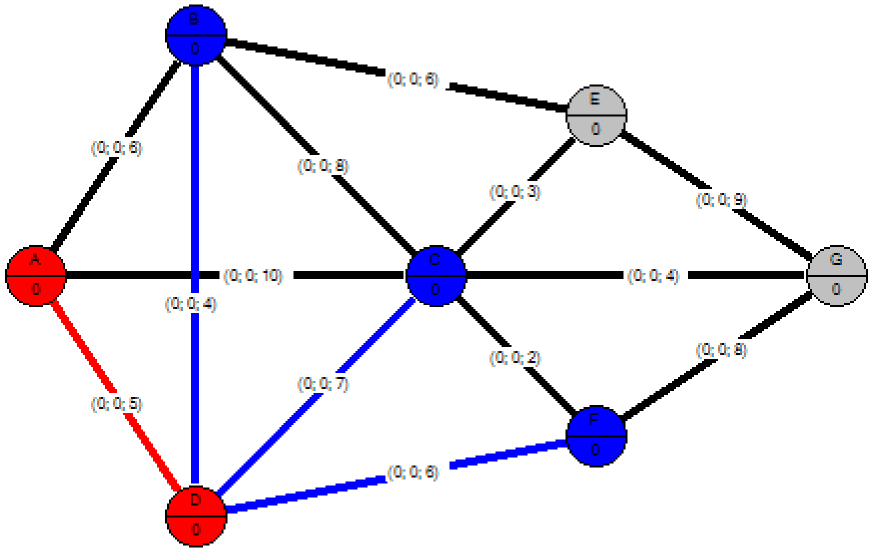


Figura 7. Nodos adyacentes al nodo D, el tercero que elegimos de los adyacentes al nodo de partida, A.

Consideramos el nodo D, que tiene como nodos adyacentes, B, C y F (ver fig. 7). La lista de ternas ordenadas es ahora

$$\left\{ \begin{matrix} (A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,12,ABE),(F,12,ACF),(G,14,ACG), \\ (B,9,ADB),(C,12,ADC),(F,11,ADF) \end{matrix} \right\}$$

Como vuelven a haber nodos que se repiten como primer elemento en algunas de las ternas de la lista, nos quedamos con aquellas que tienen el segundo elemento menor $\{(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,12,ABE),(F,11,ADF),(G,14,ACG)\}$ Ya hemos analizado todos los modos posibles de ir desde A a los nodos B y D, por tanto ya tenemos calculados los caminos de pesos mínimos de A a B y de A a D. Los marcamos en rojo.

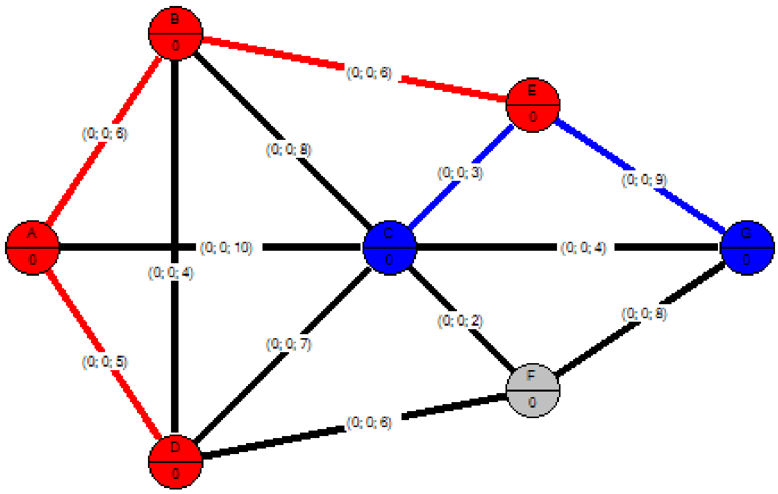


Figura 8. Nodos adyacentes al nodo E. Marcamos en rojo el camino de pesos mínimos que nos lleva hasta E.

Pasamos a considerar el nodo E, que tiene como nodos adyacentes C y G (ver fig. 8). La lista de ternas ordenadas es ahora

$$\left\{\begin{matrix}(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,12,ABE),(F,11,ADF),(G,14,ACG),\\(C,15,AEC),(G,21,AEG)\end{matrix}\right\}$$

Como vuelven a haber nodos que se repiten como primer elemento en algunos de las ternas de la lista, nos quedamos con aquellos que tienen el segundo elemento menor $\{(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,12,ABE),(F,11,ADF),(G,14,ACG)\}$

En este caso la lista queda como ya estaba en el paso anterior.

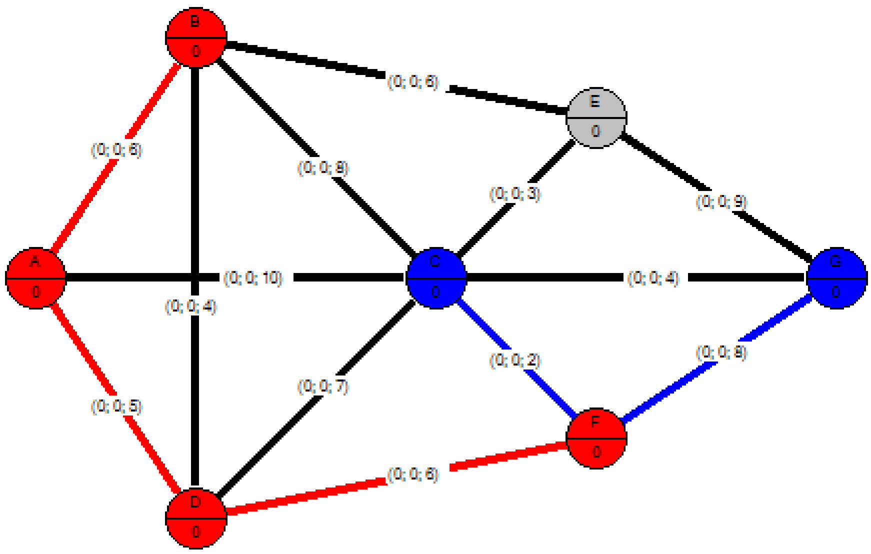


Figura 9. Nodos adyacentes al nodo F. Marcamos en rojo el camino de pesos mínimos que nos lleva hasta F.

Ahora consideramos el nodo F, que tiene como nodos adyacentes C y G (ver fig. 9). La lista de pares ordenados es ahora

$$\left\{\begin{matrix}(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,12,ABE),(F,11,ADF),(G,14,ACG),\\(C,13,AFC),(G,19,AFG)\end{matrix}\right\}$$

Vuelven a haber nodos que se repiten como primer elemento en algunas de las ternas de la lista, así que nos quedamos con aquellas que tienen el segundo elemento menor $\{(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,12,ABE),(F,11,ADF),(G,14,ACG)\}$

En este caso también queda la lista como ya estaba en el paso anterior. Ya hemos analizado todos los caminos que hay de llegar a C desde A, marcamos en rojo el de longitud mínima.

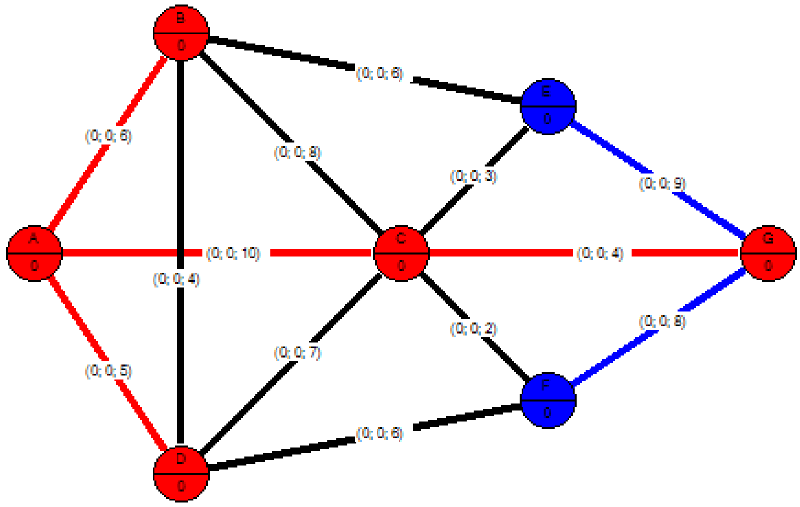


Figura 10. Nodos adyacentes al nodo G. Marcamos en rojo el camino de pesos mínimos que nos lleva hasta G.

En la fig. 10 aparece la situación cuando nos situamos en el nodo G y nos fijamos en sus nodos adyacentes E y F. La lista de pares ordenados es ahora

$$\left\{\begin{matrix}(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,12,ABE),(F,11,ADF),(G,14,ACG),\\ (E,23,ACGE),(F,22,ACGF)\end{matrix}\right\}$$

Los nodos E y F se repiten como primer elemento en dos de las ternas de la lista, así que nos quedamos con aquellos que tienen el segundo elemento menor. La lista es la que aparece a continuación y vuelve a ser la misma que en los casos anteriores:

$$\{(A,0,AA),(B,6,AB),(C,10,AC),(D,5,AD),(E,12,ABE),(F,11,ADF),(G,14,ACG)\}$$

Con este último paso ya hemos analizado todos los modos posibles de llegar desde el nodo de partida A a todos los nodos que forman el grafo. Los últimos elementos de las ternas de la última lista que hemos construido es la que nos da los caminos de longitud mínima, que aparecen en rojo en la Fig 9', donde está el árbol recubridor mínimo.

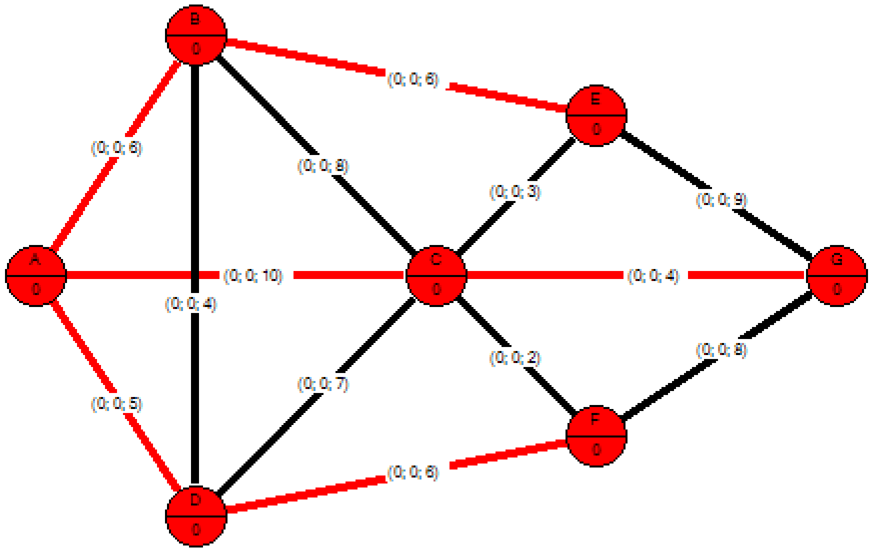


Figura 11. Árbol recubridor mínimo.

Una vez resuelto el problema comprobamos que además de haber encontrado el camino de longitud mínima, hemos encontrado un camino hamiltoniano puesto que el camino recorre todo los nodos del grafo.

Teminamos dando tres definiciones más:

Dado un grafo, un *subgrafo* de él es un grafo cuyos conjuntos de nodos y de aristas son subconjuntos de los conjuntos de nodos y de aristas, respectivamente, del grafo de partida.

Un *árbol* es un grafo en el que cualesquiera dos vértices están conectados por exactamente un camino.

Un *árbol recubridor mínimo* es un subgrafo que es un árbol, que tiene todos los nodos del grafo de partida y en el que cada camino es un camino de coste mínimo. (Ver fig. 11.)

Por tanto, en el ejemplo anterior el camino que hemos encontrado también es un árbol recubridor mínimo.

5. Resultados.

En la fig. 12 mostramos la fotografía aérea de nuestro pueblo sobre la que hemos trabajado.

Figura 12. Fotografía aérea de nuestro pueblo.

Usando **Grafos** construimos el grafo que nos ayudará a calcular los caminos de longitud mínima (ver fig 13). Los pesos que aparecen sobre las aristas son las distancias, en metros, entre los distintos puntos de interés: plaza, cabañas, colegio, cruces de caminos,... Esas distancias han sido calculadas usando **Iberpix.** Las capturas de pantalla de cómo se calcularon algunas de esas distancias aparecen en el anexo.

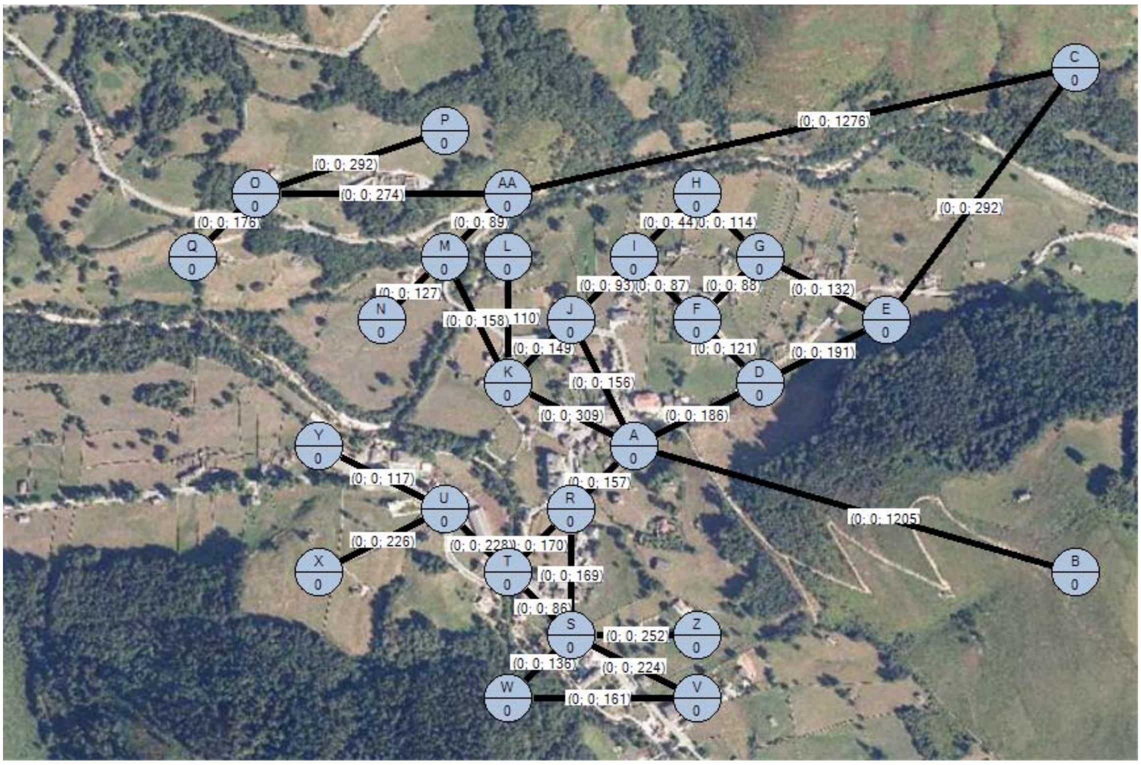


Figura 13. Grafo construido sobre la fotografía aérea de nuestro pueblo.

En la fig. 14 se puede ver el grafo solo, sin la fotografía aérea como tapiz.

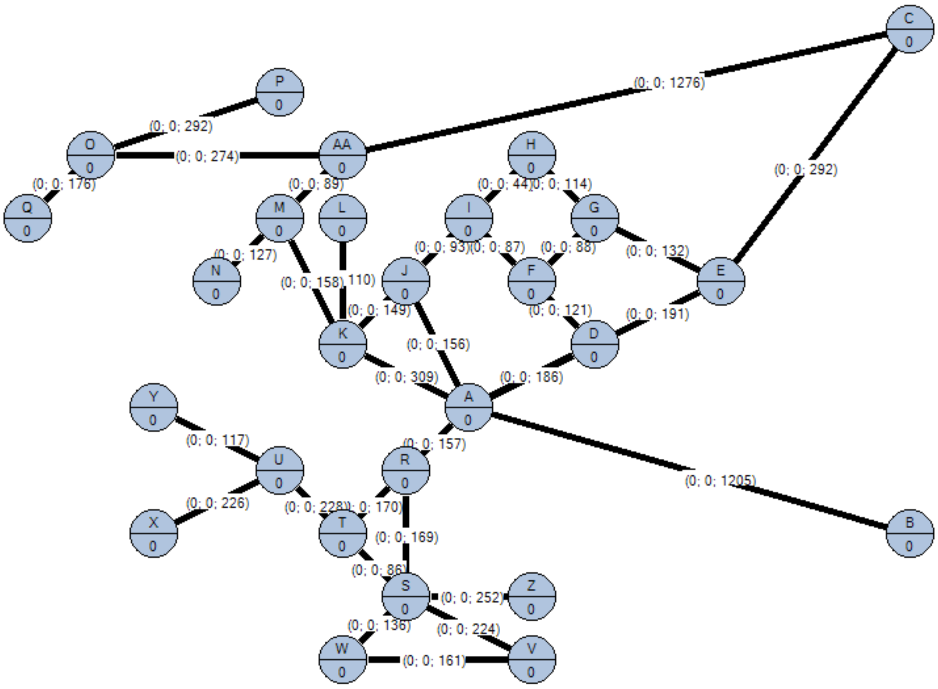


Figura 14. Grafo sobre el que realizamos los cálculos.

Por último, en la fig. 15 mostramos en rojo el árbol recubridor mínimo, es decir los caminos mínimos, calculados mediante el algoritmo de Dijkstra, y los nodos que han sido elegidos al aplicar el algoritmo. Como es evidente están todos en rojo puesto que se trata de calcular el camino mínimo desde el nodo A (el que marca la plaza de nuestro pueblo) hasta cada uno de los nodos del grafo.

En la tab. 1 aparecen los caminos desde el nodo A hasta los distintos nodos finales, junto con las longitudes mínimas totales.

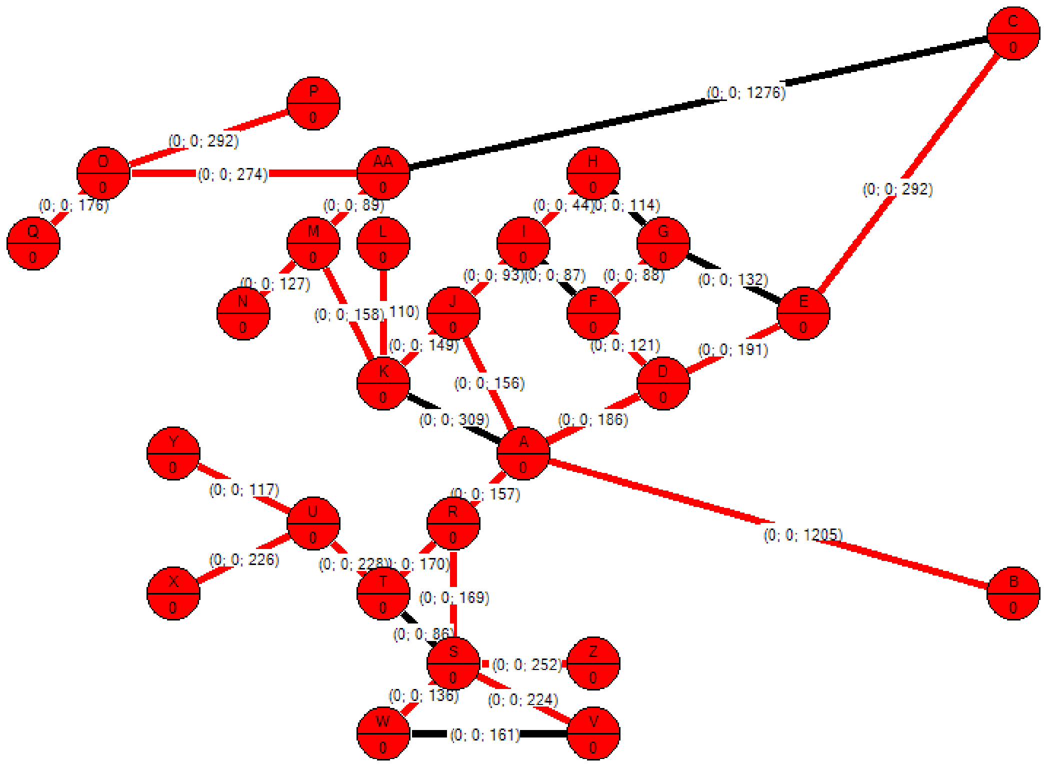


Figura 15. Caminos mínimos calculados mediante el algoritmo de Dijkstra.

Caminos	**Longitudes (m)**
AB	1205
$ADEC$	669
$AJIH$	293
$ADFG$	395
$AJKL$	415
$AJKMN$	590
$AJKMAAOQ$	1002
$AJKMAAOP$	1118
$ARSZ$	578
$ARSV$	550
$ARSW$	462
$ARTUY$	672
$ARTUX$	781

Tabla 1. Caminos mínimos y sus longitudes.

6. Conclusiones.

La plaza de nuestro pueblo es el centro neurálgico del mismo. En ella están el ayuntamiento, la farmacia, la iglesia y las tiendas de comida. También es en ella donde se celebran las fiestas del pueblo y a ella llegan las carreteras principales. Por tanto es el centro de reunión de todos y si ocurriese algo y tuviésemos que ir a la plaza a recibir información, con este trabajo tenemos calculadas las rutas más cortas para llegar a ella.

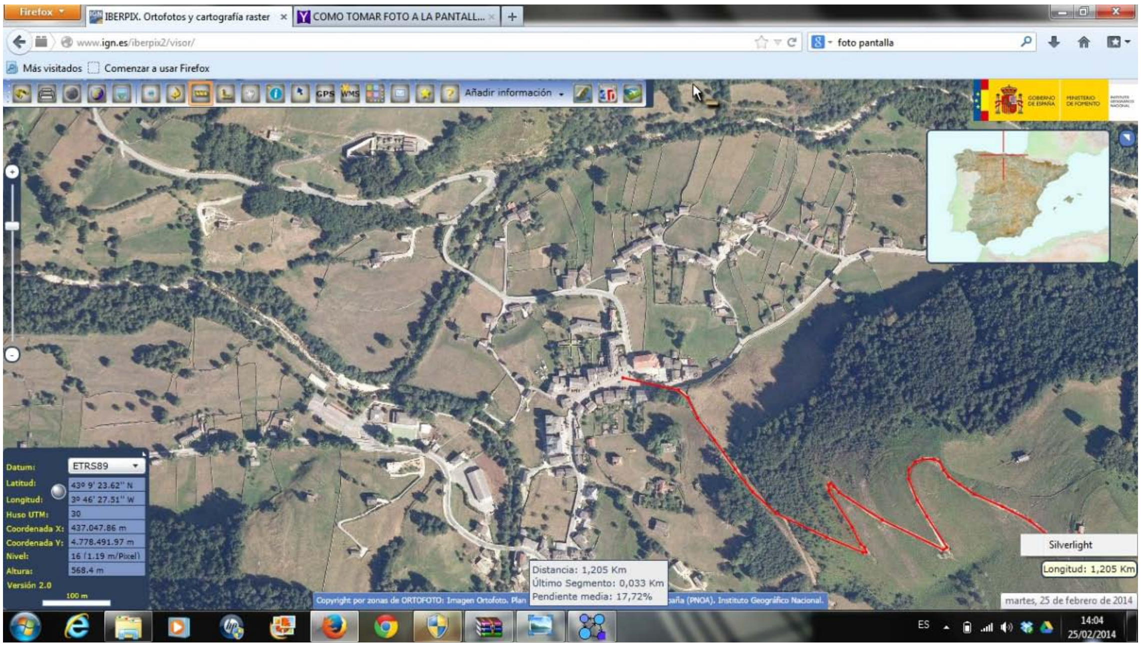
No obstante, nuestro pueblo es un pueblo pequeño y de montaña y no tenemos muchas caminos entre los que elegir para ir o salir de un lugar. Como se deduce del grafo que nos da los caminos mínimos, casi siempre existe un único camino que nos lleva de un sitio a la plaza y al revés. Por suerte, el pueblo está en un valle y, si en algún momento se cortase un camino, podríamos ir campo a través, pero si no fuese así, este trabajo muestra que habría que poner solución a esa situación puesto que no hay muchas rutas alternativas.

Por otro lado, nos gustaría destacar que nos ha gustado mucho trabajar en este proyecto por la posibilidad que nos ha dado de conocer distintas herramientas y software. Además nos ha enseñado la importancia que tiene cumplir con los plazos que nos proponemos cuando trabajamos en grupo, puesto que todos dependemos de todos y si alguien no hace su parte retrasa a los demás.

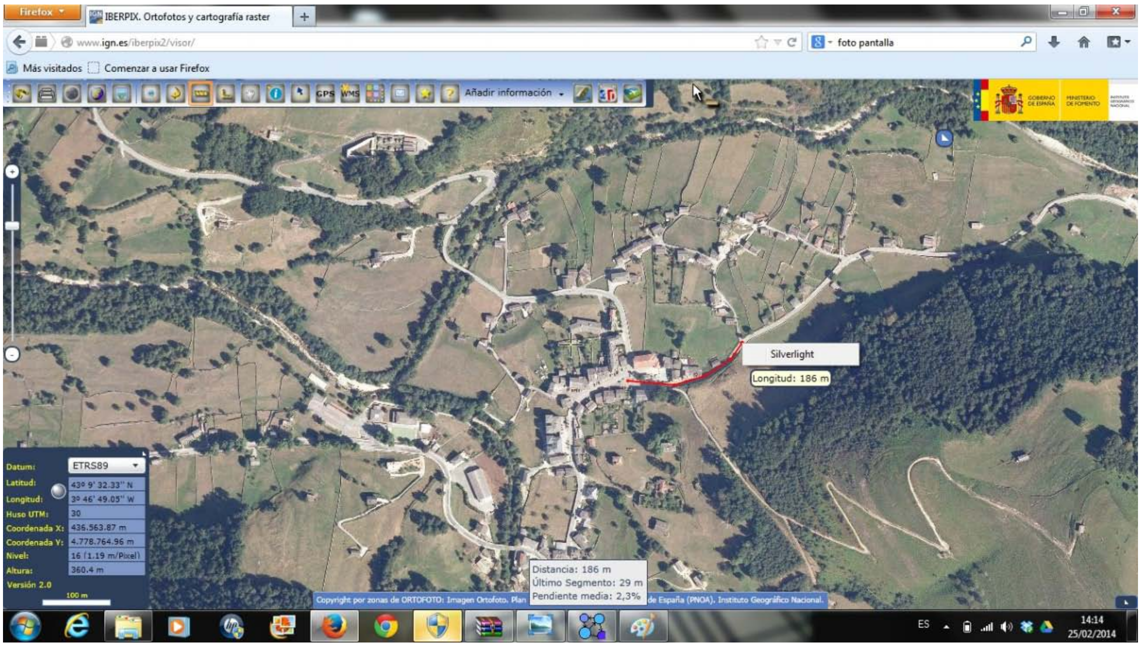
7. Bibliografía.

- Abellanas, M. y Lodares, D. “Análisis de Algoritmos y Teoría de Grafos”. Rama. 1990.
- Biggs, N.L., “Matemáticas discreta”. Ed. Vicens Vives. 1994.
- Crespo Crespo, C. R. “Cruzando puentes, pintando mapas,… Una introducción a la teoría de grafos”. Cursos cortos. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Menéndez Velázquez, A. “Una breve introducción a la teoría de grafos”, Revista Suma. Junio 1998, pp. 11-26.
- http://www.ign.es/iberpix2/visor/
- http://es.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_de_Dijkstra
- http://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Ejemplo_de_Algoritmo_de_Dijkstra

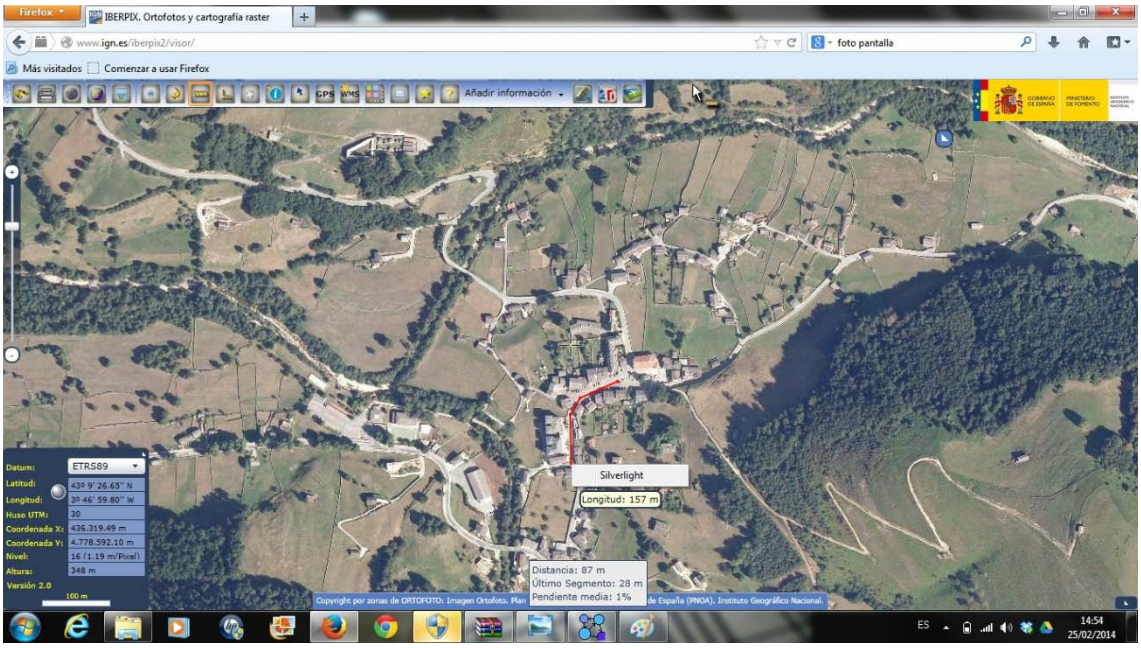
8. Anexo.



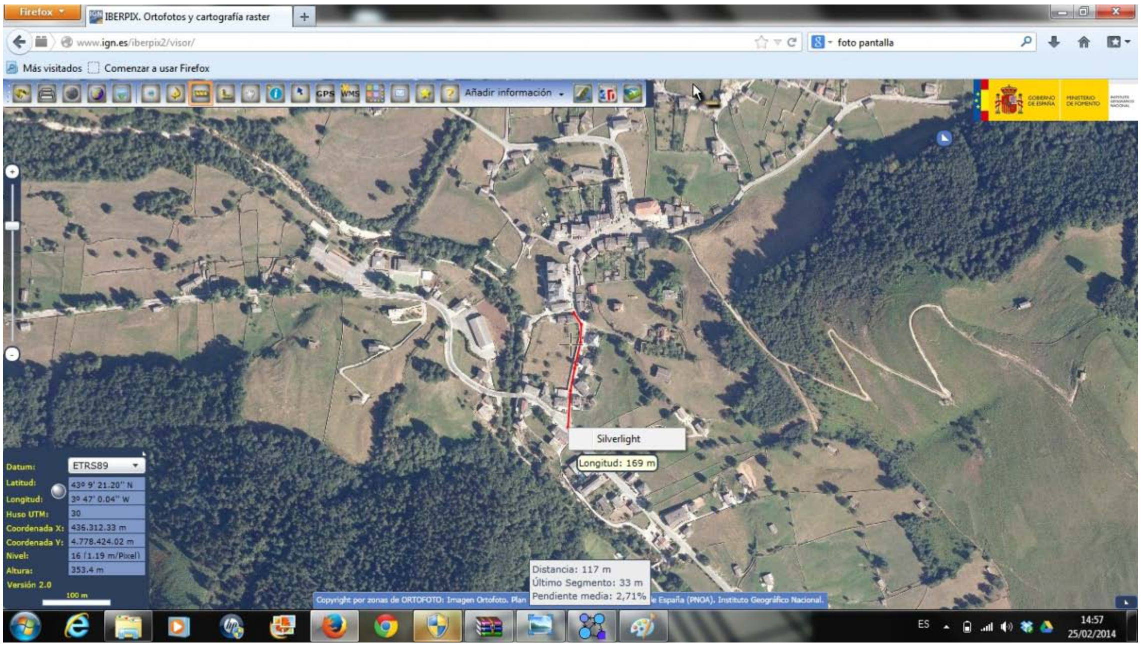
Calculo de la distancia AB.



Calculo de la distancia AD.



Calculo de la distancia AR.



Calculo de la distancia RS.