Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Octava Edición, 2013/2014

TRABAJO: Un camino inusual: Resolución de problemas de optimización mediante desigualdades

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

- Fernando Ballesta Yagüe
- Jorge Ibáñez Puertas
- Javier García Román

TUTOR:

- Antonio Egea Alarcón

CENTRO: I.E.S. Infante Don Juan Manuel (Murcia)

Un camino inusual: resolución de problemas de optimización mediante desigualdades

ÍNDICE

1. Introducción y antecedentes ____ 2

2. Objetivos ____ 2

3. Resultados ____ 3

3.1. Orden de los números reales ____ 3

3.2. Acotación de funciones cuadráticas ____ 4

3.3. Desigualdad de la media aritmética-media geométrica ____ 5

3.4. Desigualdad de la media geométrica-media armónica ____ 6

3.5. Desigualdad de la media cuadrática-media aritmética ____ 7

3.6. Demostración geométrica de la cadena de desigualdades ____ 8

3.7. Resolución de problemas de optimización aplicando las técnicas descritas ____ 10

4. Conclusiones ____ 19

5. Bibliografía ____ 19

6. Anexo ____ 20

1. Introducción y antecedentes

Una de las aplicaciones fundamentales del Cálculo Diferencial es la resolución de los problemas de optimización de funciones planteados en Ingeniería, en Economía, etc, El cálculo de las dimensiones que minimizan el coste de la construcción de un envase, sujeto a unas condiciones de diseño, o el precio del alquiler de apartamentos que proporciona un mayor beneficio, con unas restricciones bien definidas, son ejemplos de estos problemas.
La forma tradicional de resolverlos se basa en el uso de la derivada para determinar los puntos donde la función alcanza los valores extremos, con lo que los alumnos que no cursan Matemáticas en Bachillerato se quedan sin saber cómo solucionarlos.
Este trabajo tiene como objetivo principal desarrollar métodos para abordar y resolver problemas propuestos en Selectividad, que se estudian dentro del Cálculo Diferencial, con conocimientos de 3º ESO, de modo que un alumno interesado pueda intentarlos.
En diversas ocasiones, hemos escuchado a nuestros profesores que se puede profundizar en Matemáticas enfrentándonos a problemas que, en apariencia, están por encima de nuestro nivel, pero que sólo requieren el uso de herramientas que ya tenemos. En concreto, al prepararnos para participar en Olimpiadas, hemos comprobado que algunos que parecían dificilísimos y que creíamos que estaban fuera de nuestro alcance, se podían sacar usando adecuadamente lo que ya sabíamos. Esta idea es la que queremos poner en práctica en este trabajo.
El primer contacto con el tema desarrollado lo tuvimos al estudiar las desigualdades que relacionan las medias en su aplicación a problemas de Olimpiadas, y saber que lo que estábamos aprendiendo no servía sólo para estos concursos y para mejorar nuestra destreza algebraica, sino que tenía otros usos, alguno de ellos tan interesante como el que pasamos a estudiar.

2. Objetivos

Los objetivos planteados son:

1.- Profundizar en el conocimiento del orden de los números reales y de sus propiedades.

2.- Comprender las desigualdades y sus propiedades y aprender a usarlas.

3.- Estudiar, de una manera diferente a la de clase, el comportamiento de la función cuadrática, determinando su vértice como máximo o mínimo absoluto de la función.

4.- Aplicar este método a los problemas de optimización que dan lugar a funciones cuadráticas.

5.- Conocer la definición de las medias aritmética, geométrica, armónica y cuadrática generalizadas, y las desigualdades que las relacionan.

6.- Aplicar dichas desigualdades a la resolución de problemas de optimización en los que aparecen funciones de varias variables sujetas a condiciones que se pueden expresar como sumas o productos.

7.- Aprender y manejar técnicas de resolución de problemas diferentes a las que se estudian en los programas de clase, como la resolución de una ecuación homogénea de 2ºgrado, pero que se pueden entender con los conocimientos de 3ºESO.

3. Resultados

3.1 Orden de los números reales

Partimos de unas propiedades básicas que no se demostrarán y que servirán para probar las restantes. Supondremos que: *R contiene un conjunto P, llamado* ***conjunto de los números positivos*** *(expresaremos $x \in P$ con el símbolo $x > 0$), tal que:*

1. *Todo número real cumple una y sólo una de las siguientes relaciones:*

i) $x = 0$ *ii)* $x \in P, o\ sea, x > 0$ *iii)* $-x \in P, o\ sea, -x > 0$

2. *Si $x, y \in P \rightarrow x + y \in P$, es decir, $x > 0, y > 0 \rightarrow x + y > 0$.*

3. *Si $x, y \in P \rightarrow xy \in P$, es decir, $x > 0, y > 0 \rightarrow xy > 0$.*

Propiedad

1 *es un número positivo*

Demostración (Reducción al absurdo):

Supongamos que 1 no es positivo. Entonces $-1 > 0$, luego:

a) Dado $x > 0 \rightarrow x \cdot (-1) = -x > 0 \rightarrow x < 0$, contradicción;

b) si $x < 0 \rightarrow -x > 0, -1 > 0 \rightarrow (-x) \cdot (-1) = x > 0$, contradicción.

La ***recta real*** (representación geométrica de los reales) está orientada al colocar 0 como separación entre dos semirrectas, perteneciendo los positivos a la semirrecta donde se sitúa el 1, que se coloca a la derecha de 0, y llamando números negativos a los que se encuentran en la otra semirrecta. R^+ simboliza el conjunto de los reales positivos.

Definición de la relación de orden

Dados $a, b \in R$, definimos la relación ***a es mayor que b, a*** $> b$, *cuando $a - b \in P$. De forma semejante, definimos la relación* ***a es menor que b, a*** $< b$, *cuando $b - a \in P$.*

Se definen también las relaciones: ***a es mayor o igual que b, a ≥ b****, cuando $a > b$ o $a = b$;* ***a es menor o igual que b****, $a \leq b$, cuando $a < b$ o $a = b$.*

Propiedades de la relación de orden:

- *a)* *Si $a < b$ y $c \in R$ es un número cualquiera, entonces $a + c < b + c$.*
- *b)* *Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$; si $c < 0$, entonces $ac > bc$.*
- *c)* *$a < 0$ y $b < 0$ implica $ab > 0$; $a < 0$ y $b > 0$ implica $ab < 0$.*
- *d)* *$0 < a < b$ implica $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.*
- *e)* *(Transitividad) $a < b$ y $b < c$ implica $a < c$.*
- *f)* *Si $ac < bc$ y $c > 0$, entonces $a < b$.*
- *g)* *$0 < a < 1$ implica $a^2 < a$; $a > 1$ implica $a^2 > a$.*
- *h)* *Para cualquier número real a, se cumple que $a^2 \geq 0$.*
- *i)* *Si $a, b \in R^+$ y $a^2 < b^2$, entonces $a < b$.*

Demostraciones:

a) $a < b \rightarrow b - a > 0$. Como $(b + c) - (a + c) = b - a > 0$, tenemos $a + c < b + c$.

b) $a < b \rightarrow b - a > 0$. Como $c > 0$, $bc - ac = (b - a)c > 0$. Luego $ac < bc$.

c) Si $a < 0, b < 0$, entonces $-a, -b \in R^+$. Luego $ab = (-a)(-b) \in R^+ \rightarrow ab > 0$. Si $a < 0, b > 0$, entonces $-a, b \in R^+$. Luego $-ab = (-a)b \in R^+ \rightarrow ab < 0$.

d) Si $0 < a < b \rightarrow a, b, b - a \in R^+$. Como $a \cdot \frac{1}{a} = 1 > 0 \rightarrow \frac{1}{a} \in R^+$. Por lo mismo, $\frac{1}{b} \in R^+$. En conclusión, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot (b - a) \in R^+$, por ser producto de positivos. Luego $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

e) Si $a < b \to b - a > 0; b < c \to c - b > 0$, se deduce que $c - a = (c - b) + (b - a) > 0$.
f) Si $ac < bc\ y\ c > 0$, entonces $bc - ac = (b - a)c > 0$. Por tanto, $b - a$ debe ser positivo, ya que en caso contrario el producto anterior saldría negativo.
g) Si $0 < a < 1$, entonces $1 - a, a \in R^+$. Luego $a - a^2 = a(1 - a) > 0$, por ser producto de dos cantidades positivas. Si $a > 1$, entonces $a - 1, a \in R^+$. Luego $a^2 - a = (a - 1)a > 0$, por ser producto de dos cantidades positivas.
h) Dado $a \in R$, puede ocurrir que: i) $a > 0 \to a \cdot a = a^2 > 0$; ii) $a = 0 \to a^2 = 0$; iii) $a < 0 \to -a > 0 \to (-a)(-a) = a^2 > 0$. Por tanto, $a^2 \geq 0, \forall a \in R$.
i) Si $a, b \in R^+, a^2 < b^2,$ tenemos que $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. Como $b^2 - a^2, b + a \in R^+$, se deduce que $b - a$ debe ser positivo. O sea, $b > a$.

3.2 Acotación de funciones cuadráticas.

La desigualdad $x^2 \geq 0, \forall x \in R\ (h)$ es la base de este trabajo. Será usada de forma directa y como medio para demostrar otras. En primer lugar, la aplicaremos a la búsqueda de extremos de funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Caso 1: $a > 0$

Usamos las transformaciones que resuelven la ecuación de 2ºgrado:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}(4a^2x^2 + 4abx + 4ac) = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac] =$$
$$= \frac{(2ax + b)^2}{4a} + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \geq \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

Luego $f(x)$ está acotada inferiormente por $\frac{-b^2+4ac}{4a}$, y este valor es su mínimo, ya que se alcanza cuando $2ax + b = 0 \to x = \frac{-b}{2a}$. En consecuencia, las funciones cuadráticas con $a > 0$ tienen mínimo absoluto en el punto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$, llamado *vértice*.

Caso 2: $a < 0$

En este caso, seguimos los pasos anteriores teniendo en cuenta que $a < 0$, es decir:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}(4a^2x^2 + 4abx + 4ac) = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac] =$$
$$= \frac{(2ax + b)^2}{4a} + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{(2ax + b)^2}{4(-a)} + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \quad (*)$$

Tenemos que $\frac{(2ax+b)^2}{4(-a)} \geq 0$, pues es un cuadrado partido de un número positivo. Al llevar en (*) un signo negativo delante, es como si hubiéramos multiplicado por -1 a ambos lados de la desigualdad, lo que hace que el sentido de esta cambie y sea menor o igual que 0. Por último, sumamos $\frac{-b^2+4ac}{4a}$ a ambos lados y queda que: $-\frac{(2ax+b)^2}{4(-a)} + \frac{-b^2+4ac}{4a} \leq \frac{-b^2+4ac}{4a}$.

$f(x)$ está acotada superiormente por $\frac{-b^2+4ac}{4a}$, y este valor es su máximo, ya que se alcanza cuando $2ax + b = 0 \to x = \frac{-b}{2a}$. En consecuencia, las funciones cuadráticas con $a < 0$ tienen máximo absoluto en el punto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)$, llamado *vértice*.

3.3 Desigualdad de la media aritmética-media geométrica

Si a, b son dos números reales no negativos, entonces existen $\sqrt{a}, \sqrt{b}$. Como $x^2 \geq 0, \forall x \in R$, entonces $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$. Por tanto, $\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$. Operando, $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. En consecuencia, **la media aritmética de dos números reales no negativos es mayor o igual que la media geométrica de dichos números. La igualdad se cumple cuando $a = b$.** En general,

Definición

Dados n números reales $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, definimos sus ***medias aritmética y geométrica*** *como:*

$$MA(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$MG(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Teorema:

Dados $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, se cumple que $MA(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq MG(a_1, a_2, \dots, a_n)$. La igualdad ocurre si y sólo sí $a_1 = a_{2=} \dots = a_n$.

A partir del caso anterior $n = 2$, podemos demostrar el caso $n = 4$:

$$MA(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2}$$

$$\geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt{\sqrt{a_1 a_2 a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} = MG(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

La igualdad se dará si y sólo si $a_1 = a_2, a_3 = a_{4,} a_1 a_2 = a_3 a_4$, y esto último sucederá si y sólo sí $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, ya que todos son números no negativos.

Repitiendo el argumento, se prueba que la desigualdad es cierta para $n = 2^k, k \in N$.

El caso $n = 3$ sirve para construir un argumento que permite demostrar los restantes. Sean $a_1, a_2, a_3 \geq 0$, definimos $a_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$ y aplicamos la desigualdad para $n = 4$:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \rightarrow$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)} \rightarrow$$

$$\frac{\frac{3(a_1 + a_2 + a_3)}{3} + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3} \cdot \sqrt[4]{\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}} \rightarrow$$

$$\frac{\frac{4(a_1 + a_2 + a_3)}{3}}{4} \geq (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^{\frac{1}{4}} \rightarrow$$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right) \geq (a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Dividiendo ambos miembros de la desigualdad por $\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$, queda

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^{\frac{3}{4}} \geq (a_1a_2a_3)^{\frac{1}{4}} \xrightarrow{\text{elevando a la cuarta}} \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)^{3} \geq (a_1a_2a_3)^1$$

$$\xrightarrow{\text{sacando la raíz cúbica}} \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

Consideremos ahora cualquier cantidad n de números reales no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Existe un único número natural k tal que $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Llamemos $A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ y consideremos el conjunto de 2^k números $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, A, A, \ldots, A\}$, en el que A aparece $2^k - n$ veces. Aplicamos la desigualdad MA-MG a estos números 2^k y obtenemos:

$$a_1 + a_2 + \ \ldots + \ a_n + A + A + \cdots A \geq 2^k (a_1\ a_2 \ldots a_n \cdot A \cdot A \ldots \cdot A)^{1/2^k}$$

$$n \cdot A + (2^k - n)A \geq 2^k \left(a_1\ a_2 \ldots a_n \cdot A^{2^k-n}\right)^{1/2^k}$$

$$2^k \cdot A \geq 2^k \left(a_1\ a_2 \ldots a_n \cdot A^{2^k-n}\right)^{1/2^k} \to A \geq \left(a_1\ a_2 \ldots a_n \cdot A^{2^k-n}\right)^{1/2^k}$$

Elevando ambos miembros de la última desigualdad a 2^k, obtenemos:

$$A^{2^k} \geq \left(\left(a_1\ a_2 \ldots a_n \cdot A^{2^k-n}\right)^{1/2^k}\right)^{2^k} = a_1\ a_2 \ldots a_n \cdot A^{2^k-n}$$

Dividiendo ambos miembros de la desigualdad última por A^{2^k-n}, queda:

$$A^{2^k} : A^{2^k-n} \geq a_1\ a_2 \ldots a_n \cdot A^{2^k-n} : A^{2^k-n} \to A^n \geq a_1\ a_2 \ldots a_n$$

En conclusión, se tiene que:

$$A \geq \sqrt[n]{a_1\ a_2 \ldots a_n} \to \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\ a_2 \ldots a_n}$$

3.4 Desigualdad de la media geométrica-media armónica

Definición

*Dados n números reales positivos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se define su **media armónica** como:*

$$MH(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

Es decir, la media armónica de n números reales positivos es igual al reciproco de la media aritmética de los recíprocos de los números dados.

Teorema

Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, se cumple que $MG(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq MH(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. La igualdad ocurre si y sólo sí $a_1 = a_{2=} \ldots = a_n$.

Demostración

Aplicando la desigualdad MA-MG a $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, tenemos que:

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2 \ldots . a_n}}$$

$$\xrightarrow{\text{invirtiendo las fracciones}} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots . a_n}$$

Luego queda demostrada la desigualdad. La igualdad se cumplirá cuando $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \cdots = \frac{1}{a_n}$. Por tanto, cuando $a_1 = a_2 = \cdots . = a_n$

3.5 Desigualdad de la media cuadrática-media aritmética

Definición

Dados n números reales positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$, se define su media cuadrática como:

$$MC(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

Teorema

Dados $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, se cumple que $MC(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq MA(a_1, a_2, \dots, a_n)$. La igualdad ocurre si y sólo si $a_1 = a_{2=} \dots = a_n$.

Demostración

Caso $n = 2$. Tenemos que:

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 = \frac{a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2}{4} \leq \frac{a_1^2 + (a_1^2 + a_2^2) + a_2^2}{4} = \frac{2(a_1^2 + a_2^2)}{4} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$$

$$\rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}$$

Caso $n = 3$. Tenemos que:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}\right)^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3}{9} \leq$$

$$\leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + (a_1^2 + a_2^2) + (a_1^2 + a_3^2) + (a_2^2 + a_3^2)}{9} = \frac{3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{9}$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3} \rightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{3}}$$

Caso general: El cuadrado de la suma de n términos es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los términos más los dobles productos de las parejas posibles, en las que cada término aparece en $n - 1$ de ellas. Luego, tenemos que:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \cdots + 2a_1a_n + \cdots + 2a_{n-1}a_n}{n^2}$$

$$\leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + (a_1^2 + a_2^2) + (a_1^2 + a_3^2) + \cdots + (a_1^2 + a_n^2) + \cdots + (a_{n-1}^2 + a_n^2)}{n^2}$$

$$= \frac{n \cdot (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}{n^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \rightarrow$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

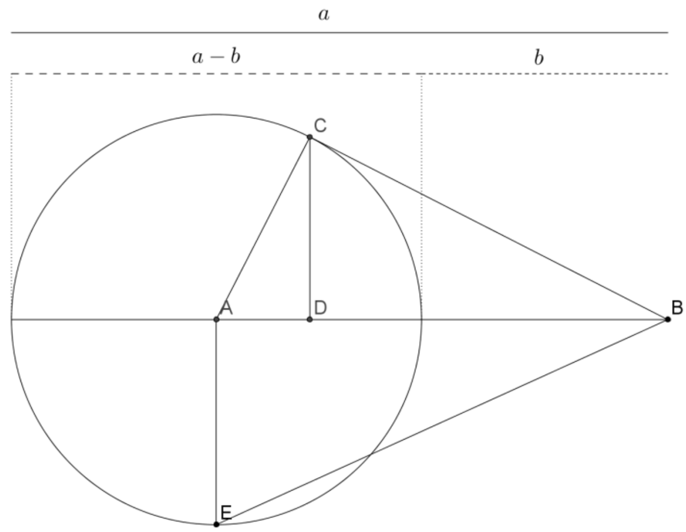
Conclusión:

$$\boldsymbol{MH(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq MG(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq MA(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq MC(a_1, a_2, \dots, a_n)}$$

3.6 Demostración geométrica de la cadena de desigualdades:

$$\boldsymbol{b = min\,\{a, b\} \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq max\{a, b\} = a, \forall a, b} > 0$$

Supongamos que $a > b$. Dibujamos una circunferencia de centro A y radio $\frac{a-b}{2}$. Trazamos un diámetro y lo prolongamos una longitud b hasta el punto B.



a) La media aritmética es $\overline{AB}$, porque

$$\overline{AB} = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a-b+2b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

b) La media geométrica es $\overline{BC}$, porque $\overline{BC}$ es un cateto del triángulo rectángulo ABC, recto en C. Luego, aplicando el Teorema de Pitágoras, se cumple que:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{CA}^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{4ab}{4} = ab \rightarrow \overline{BC} = \sqrt{ab}$$

Como la hipotenusa es mayor que un cateto, se deduce que

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

c) La media armónica es $\overline{DB}$. Aplicando el teorema del cateto al triángulo rectángulo ABC, cuya altura CD corta a la hipotenusa en dos segmentos, $\overline{AD}, \overline{DB}$, tenemos que

$$\overline{DB} \cdot \overline{AB} = \overline{BC}^2 \rightarrow \overline{DB} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\sqrt{ab}\right)^2 \rightarrow \overline{DB} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) = ab \rightarrow \overline{DB} = \frac{2ab}{a+b}$$

Como la proyección es menor que el cateto, se deduce que

$$\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

d) La media cuadrática es $\overline{EB}$. Si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo BAE, tenemos:

$$\overline{EB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} + \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$
$$= \frac{2a^2+2b^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2} \to \overline{EB} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Como $\overline{EB}$ es la hipotenusa, es mayor que el cateto $\overline{AB}$. Luego
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2}$$

Por último,
$$a = max\{a,b\} = \sqrt{\frac{a^2+a^2}{2}} > \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \frac{2ab}{a+b} > \frac{2bb}{b+b} = min\{a,b\} = b$$

En conclusión, hemos demostrado que
$$a = max\{a,b\} > \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b} > min\{a,b\} = b$$

Si $a = b$, entonces las cuatro medias son iguales. Por tanto, dados $a, b \geq 0$, se cumple que:
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

Nota:

Aunque aplicaremos las desigualdades fundamentalmente para $n = 2, n = 3$, nos ha parecido interesante para nuestra formación el estudio del caso general y el aprendizaje de las demostraciones rigurosas.

Al enfrentarnos a los problemas que resolveremos mediante las desigualdades de las medias, tendremos en cuenta los siguientes puntos:

1. ¿De qué tipo es la función planteada en el problema: suma, producto, cociente, suma de cuadrados,..?
2. ¿Qué condición se ha impuesto a las variables?
3. ¿Se va a maximizar o a minimizar la función?

Por ejemplo, si tenemos una función que se puede expresar como el producto de una serie de variables y estas variables están sujetas a una condición en la que la suma de todas ellas da un valor constante, será posible aplicar la desigualdad media geométrica-media aritmética y la función quedará acotada superiormente por una constante. Esta cota superior será el valor máximo de la función si conseguimos que ese valor se alcance. Esto sucederá cuando sea posible igualar todas las variables. De este modo, habremos resuelto un problema típico de maximización. Así que, partiendo de la observación de cada función y cada condición, tendremos que decidir qué desigualdad entre dos medias nos conviene emplear.

3.7 Resolución de problemas de optimización aplicando las técnicas descritas

Pasamos a estudiar problemas sacados de libros de 2º de Bachillerato, de COU y de Análisis Matemático, que son planteados en ellos como aplicación de las propiedades de la derivada, para resolverlos mediante su transformación en funciones cuadráticas, o bien mediante el empleo de las desigualdades demostradas.

1) *Halla el número positivo cuya suma con 4 veces su recíproco sea mínima.*

Como el número es positivo ($a > 0$), podemos representar la suma del número con 4 veces su recíproco como un cuadrado:

$$a + \frac{4}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2 + 4 \geq 4$$

Nota: los términos que hay dentro del paréntesis deben estar restando porque si no fuera así, quedaría: $a + \frac{4}{a} = \left(\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2 - 4 \geq -4$ *, lo que no nos aporta ninguna información, pues si sumamos dos números positivos nos da un resultado mayor que 0.*

Ya hemos acotado la función por debajo. El valor mínimo 4 se alcanzará cuando el cuadrado dé 0, y eso va a pasar si y solo si:

$$\sqrt{a} = \frac{2}{\sqrt{a}} \to \sqrt{a}^2 = 2 \to a = 2$$

El problema se puede generalizar a la suma de un número positivo con n veces su recíproco:

$$a + \frac{n}{a} = \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{a}}\right)^n + 2\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n}$$

Y el valor mínimo $2\sqrt{n}$ se alcanzará cuando:

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{a}} \to a = \sqrt{n}$$

2) *Una agencia inmobiliaria tiene alquilados* 200 *apartamentos a* $160€/mes$ *cada uno. Por cada* $5€$ *de aumento en el precio del alquiler pierde un inquilino, que se traslada a un apartamento más económico. ¿Cuál es el precio del alquiler que produce mayor beneficio a la agencia?*

Necesitamos hallar el máximo de la función ingresos, pues cuando lo encontremos sabremos cuál es el precio del alquiler que produce mayor beneficio a la agencia. La función es (tomando como variable el número de alquileres perdidos):

$$f(x) = Precio \cdot nº\ apartamentos = (160 + 5x) \cdot (200 - x)$$
$$= 32000 - 160x + 1000x - 5x^2 = -5x^2 + 840x + 32000$$

Tenemos una función cuadrática que podemos minimizar:

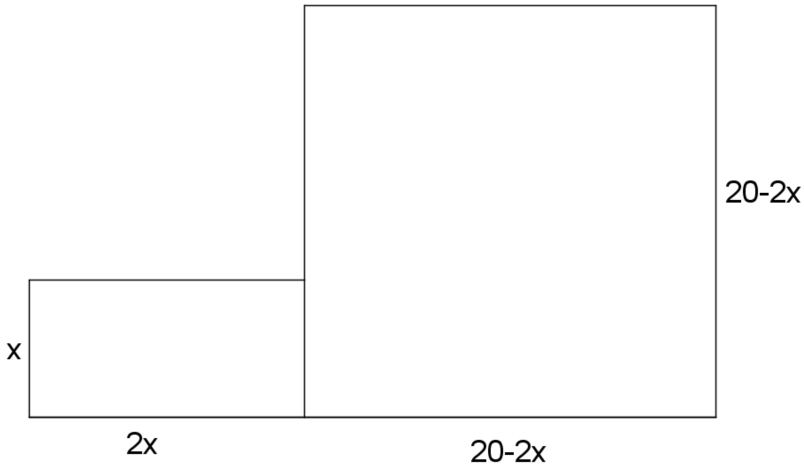
$$f(x) = -5x^2 + 840x + 32000 = -5 \cdot (x^2 - 168x - 6400)$$
$$= -5 \cdot \{(x - 84)^2 - 13456\} = -5 \cdot (x + 84)^2 + 67280 \leq 67280$$

Por tanto, ya hemos acotado la función por arriba. El máximo se alcanzará cuando:

$$(x - 84)^2 = 0 \leftrightarrow x - 84 = 0 \to x = 84$$

Como el número de apartamentos perdidos es 84, los apartamentos alquilados son 116 al precio de $160 + 5 \cdot 84 = 160 + 420 = 580€/mes$. De este modo, se obtiene el máximo beneficio: 67280€.

3) *Un trozo de alambre de longitud 20 se divide en dos trozos. Con el primero se forma un rectángulo cuya base es el doble que su altura y con el segundo trozo se forma un cuadrado. Encontrar las longitudes de dichos trozos para que sea mínima la suma del área del rectángulo y la del cuadrado. (Selectividad 2007. País Vasco. Bloque C. Problema C)*



Llamemos $2x$ a la base del rectángulo. Por tanto, la base del cuadrado es $20-2x$. Tenemos que minimizar la función:

$$f(x) = 2x^2 + (20-2x)^2$$

Al ser una función cuadrática, podemos aplicar un método para acotarla que puede ser usado con todas las funciones cuadráticas, y es el siguiente:

$$f(x) = 2x^2 + (20-2x)^2 = 2x^2 + 400 + 4x^2 - 80x = 6x^2 - 80x + 400$$

Teniendo la función escrita de la forma $ax^2 + bx + c$, nuestro objetivo es meter dentro del cuadrado de un binomio suma (o resta) las incógnitas, y dejar fuera de este un número sumando o restando. Así, multiplicamos por $1/6$ para que a sea un cuadrado perfecto:

$$f(x) = 6x^2 - 80x + 400 = \frac{1}{6} \cdot (36x^2 - 480x + 2400) = \frac{1}{6} \cdot \{(6x-40)^2 + 800\}$$
$$= \frac{(6x-40)^2}{6} + \frac{400}{3} \geq \frac{400}{3}$$

Ya hemos encontrado el mínimo de la función. Dicho mínimo se dará cuando el cuadrado sea 0. Esto pasa cuando:

$$6x = 40 \rightarrow x = \frac{20}{3}$$

Por tanto, el primer trozo vale:

$$2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{40}{3}$$

y el segundo:

$$20 - \frac{40}{3} = \frac{60-40}{3} = \frac{20}{3}$$

4) *De entre todos los números reales positivos x, y tales que $x + y = 10$, encontrar aquellos para los que el producto $P = x^2 y$ sea máximo. (Selectividad Junio 2005 Murcia)*

Queremos hallar los valores positivos x, y para los cuales P alcanza su valor máximo. Nuestro objetivo es encontrar una expresión ante la cual P sea menor o igual (pues cuando alcance el igual habrá alcanzado su máximo) y en la que podamos sustituir la condición eliminando las incógnitas. Como P es un producto, lo podemos interpretar como el cuadrado de una media geométrica, y al ser la condición una suma, podemos pensar que la expresión buscada es la media aritmética. Sin embargo, si aplicamos directamente la desigualdad no conseguimos eliminar las incógnitas. Por eso, aplicamos un pequeño truco, que es el siguiente:

$$P = x^2 y = x \cdot x \cdot y = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y$$

Ahora, si usamos la desigualdad de la Media aritmética-Media geométrica, nos queda:

$$P = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot y \leq 4 \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y}{3} \right)^3 = 4 \left(\frac{x + y}{3} \right)^3 = 4 \left(\frac{10}{3} \right)^3 = 4 \cdot \frac{1000}{27} = \frac{4000}{27}$$

Ya sabemos cuál es el valor máximo que puede tomar el producto, y ese valor se alcanza cuando se dé la igualdad entre los elementos de la desigualdad, es decir, cuando:

$$\frac{x}{2} = \frac{x}{2} = y \xrightarrow{x+y=10} x + \frac{x}{2} = 10 \to \frac{3}{2}x = 10 \to x = \frac{10}{3/2} = \frac{20}{3} \to y = \frac{20}{3} : 2 = \frac{10}{3}$$

De este modo ya hemos acotado por arriba el producto P y encontrado los valores con los que se alcanza dicho valor.

5) *De todos los rectángulos de diagonal igual a 1, halla las dimensiones del de área máxima.*

Sean $x, y > 0$ los lados del rectángulo. Tenemos que hallar el máximo de la función $f(x, y) = x \cdot y$, donde las variables cumplen la condición $x^2 + y^2 = 1$. Para acotar la función por arriba, es necesario encontrar una expresión que sea mayor o igual que la función y en la que podamos sustituir la condición. Al tener como condición la suma de dos cuadrados, y como función un producto, podemos emplear la desigualdad de la MC-MG. Queda:

$$f(x, y) = x \cdot y = \left(\sqrt{xy}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{2}$$

El máximo valor al que puede optar la función es 0,5. Se alcanzará cuando se dé la igualdad entre los términos de la desigualdad, es decir, cuando:

$$x = y \xrightarrow{x^2+y^2=1} 2x^2 = 1 \to x^2 = \frac{1}{2} \to x = \frac{1}{\sqrt{2}} = y$$

Por tanto, ha de ser un cuadrado de lado $l = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

.

6) *Un coche hace un trayecto de ida y vuelta entre dos ciudades. Sabemos que la suma de la velocidad de ida más la velocidad de vuelta es de $200km/h$. Halla la velocidad de ida y la velocidad de vuelta para que la velocidad media sea la máxima posible.*

A este problema parece que le falta el dato de la distancia entre las ciudades. Sin embargo, si hallamos la velocidad media en función de una distancia arbitraria entre las dos ciudades, d, de la velocidad del viaje de ida, x, y de la velocidad del viaje de vuelta, y, tenemos que:

$$V_{media} = \frac{E_{total}}{T_{total}} = \frac{2d}{\frac{d}{x} + \frac{d}{y}} = \frac{2d}{d\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

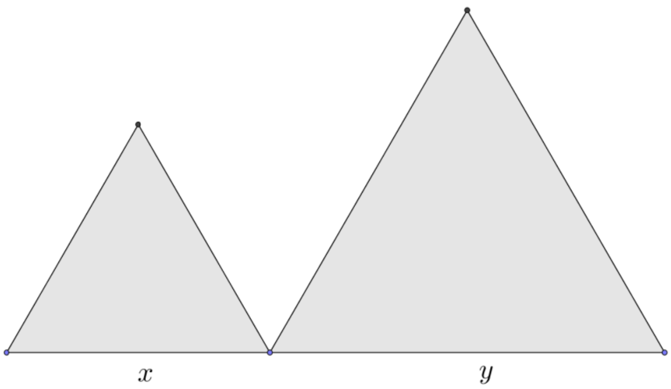
luego la velocidad media no depende de la distancia, sino que es igual a la media armónica de x, y. Como la media armónica es menor o igual que la media aritmética, y $x + y = 200km/h$, se deduce que:

$$V_{media} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{200}{2} = 100km/h$$

El valor máximo se alcanzará cuando las velocidades x, y sean iguales, es decir, cuando:

$$\boxed{x = y = 100km/h}$$

7) *Divide un segmento de $6cm$ en dos partes tales que sea mínima la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas.*



El área de un triángulo equilátero es igual a $\frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, siendo l la longitud del lado. En nuestro caso, si x, y son los lados de los dos triángulos equiláteros formados, con $x + y = 6$, tenemos que minimizar la función

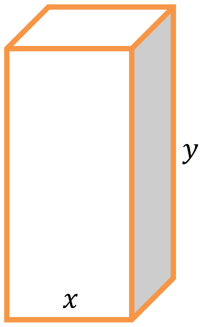
$$f(x,y) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{y^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$

A la vista de su expresión y teniendo en cuenta la condición dada, nos conviene aplicar la desigualdad Media cuadrática-Media aritmética:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{6}{2}\right)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}cm^2$$

alcanzándose el valor mínimo de la suma de las áreas, $\frac{9\sqrt{3}}{2}cm^2$, cuando $\boxed{x = y = 3cm}$.

8) *Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad $80cm^3$. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos usar un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.*



Usamos las variables x para el lado del cuadrado de la base e y para la altura del prisma. Luego $x, y > 0$. Supondremos que el precio del material de la tapa y de la superficie lateral es de 1 $€/cm^2$. La función coste queda:

$$f(x,y) = 1 \cdot A_{Base} + 1{,}5 \cdot A_{Tapa} + 1 \cdot A_{Lateral} = x^2 + 1{,}5x^2 + 4xy = 2{,}5x^2 + 4xy$$

Como la capacidad debe ser $80cm^3$, tenemos la condición $x^2 \cdot y = 80$, que nos permitirá hallar el mínimo.

Queremos hacer que la función coste (una suma) sea mayor o igual que una cantidad, de manera que al sustituir la condición (un producto) se obtenga un valor constante. Para ello, vamos a aplicar la desigualdad M.A.-M.G.

Si la usáramos directamente, tendríamos:

$$f(x,y) = 2{,}5x^2 + 4xy \geq 2\sqrt{2{,}5x^2 \cdot 4xy} = 2\sqrt{10x \cdot x^2y} = 2\sqrt{800x},$$

donde las variables no desaparecen. Para que sí lo hagan, aplicamos un pequeño truco, que consiste en descomponer $2{,}5x^2 + 4xy$ en $2{,}5x^2 + 2xy + 2xy$. De esta manera, ya podemos aplicar la M.A-M.G (aunque ahora es con tres elementos):

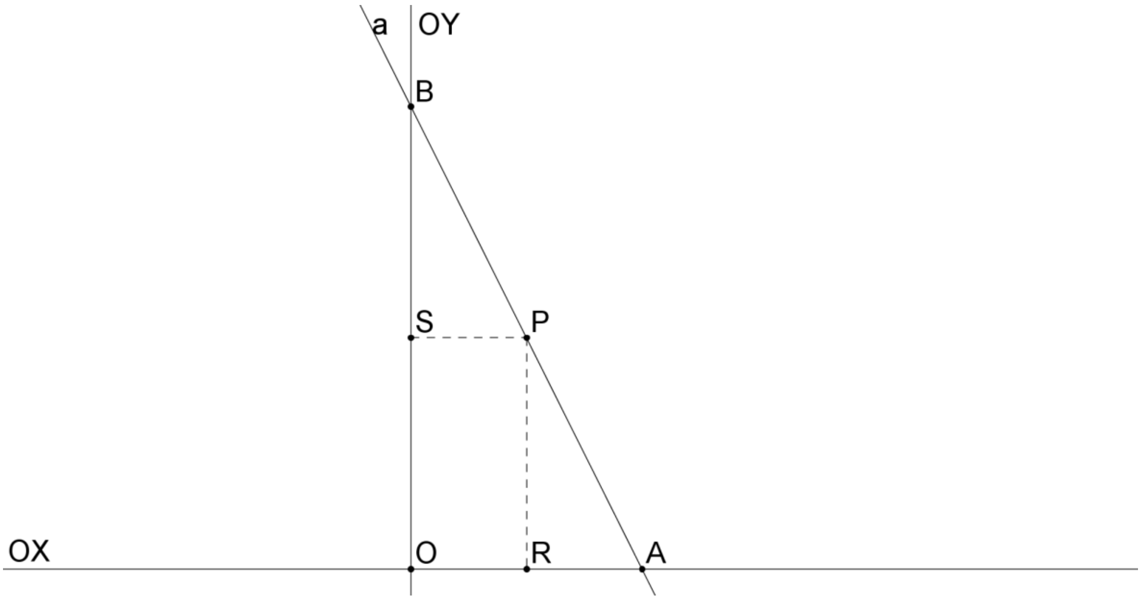
$$\begin{aligned} f(x,y) = 2{,}5x^2 + 4xy = 2{,}5x^2 + 2xy + 2xy &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{2{,}5x^2 \cdot 2xy \cdot 2xy} \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{10x^4y^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{10 \cdot (x^2y)^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{10 \cdot 80^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{64000} \\ &= 3 \cdot 40 = 120 \end{aligned}$$

Ya hemos acotado la función por abajo. Su mínimo se alcanzará cuando se dé la igualdad entre los tres elementos. Como hay dos iguales, sólo tenemos en cuenta que $2{,}5x^2 = 2xy \xrightarrow{x \neq 0} 2{,}5x = 2y \rightarrow y = 1{,}25x$. Si sustituimos en la condición, tenemos:

$$x^2 \cdot 1{,}25x = 80 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4 \rightarrow y = 1{,}25 \cdot 4 = 5$$

Por tanto, <u>las medidas del envase deben ser $4cm$ para las aristas de la base y la tapa y $5cm$ para las aristas de la altura</u>. El coste mínimo será $f(4,5) = 2{,}5 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 5 = 120$€. <u>Si el precio del material fuera de k $€/cm^2$, entonces el coste sería $120k$ €.</u>

9) *Halla la recta que pasa por el punto P(3,6) y forma con los semiejes positivos de coordenadas un triángulo de área mínima.*



Dada una recta que pasa por $P(3,6)$ y corta a los semiejes positivos en los puntos $A(0,x), B(0,y)$, queda formado el triángulo rectángulo OAB con los semiejes. Queremos hallar qué recta determina el triángulo de área mínima. Tenemos que minimizar la función $A = f(x,y) = \frac{x \cdot y}{2}$, siendo x la abscisa de A e y la ordenada de B.
Los triángulos rectángulos BSP y PRA son semejantes, ya que tienen sus ángulos agudos iguales. Por tanto, se cumple que:

$$\frac{BS}{PR} = \frac{SP}{RA} \to \frac{y-6}{6} = \frac{3}{x-3} \to (y-6)\cdot(x-3) = 18 \to yx - 3y - 6x + 18 = 18$$

$$\to yx - 3y = 6x \to y(x-3) = 6x \to y = \frac{6x}{x-3}$$

Esto nos permite expresar el área como función de una única variable:

$$A = f(x) = \frac{x \cdot \left(\frac{6x}{x-3}\right)}{2} = \frac{x \cdot 6x}{2 \cdot (x-3)} = \frac{3x^2}{x-3} = 3x + 9 + \frac{27}{x-3}$$

Esta función es una suma de expresiones que vamos a minimizar aplicando la desigualdad MA-MG (Se puede usar la desigualdad pues $x > 3, y > 6$ para que exista el triángulo que corte a los semiejes positivos y pase por$(3,6)$). Para ello, queremos que aparezca un sumando $x - 3$ para que, al transformar la suma en producto, se elimine el factor $x - 3$ del denominador. Así que sacamos factor común 3 y queda:

$$A = f(x) = 3x + 9 + \frac{27}{x-3} = 3(x-3) + \frac{27}{x-3} + 18 \geq 2 \cdot \sqrt{3(x-3) \cdot \frac{27}{x-3}} + 18$$

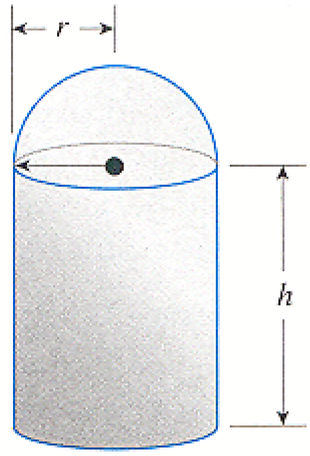
$$= 2\sqrt{3 \cdot 27} + 18 = 2 \cdot 9 + 18 = 36 \;\; u.a.$$

Luego $A \geq 36$ y el valor mínimo 36 se alcanzará cuando se dé la igualdad entre los elementos de la desigualdad, es decir, cuando

$$3(x-3) = \frac{27}{x-3} \to 3(x-3)^2 = 27 \to (x-3)^2 = 9 \to x - 3 = 3 \to x = 6\, u.l.$$

(la posibilidad $x - 3 = -3 \to x = 0$ no tiene sentido). En consecuencia, el triángulo formado tiene área mínima cuando $x = 6 \to y = \frac{6 \cdot 6}{6-3} = 12\, u.l.$ Luego la recta buscada pasa por los puntos $A(0,12), B(6,0)$ y tiene ecuación explícita $\boxed{y = -2x + 12}$.

10) Un cuerpo está formado por un cilindro circular recto que termina por encima por una semiesfera. ¿Qué dimensiones lineales debe tener este cuerpo para que el área de la superficie total sea mínima, si su volumen es igual a V?(Demidovich problema 1578)



El área es igual al área de la semiesfera, más las áreas lateral y de la base del cilindro:

$$A(r,h) = \frac{1}{2}A_{semiesfera} + A_{lateral\ cilindro} + A_{base\ cilindro} \rightarrow$$

$$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi rh$$

La condición es que el volumen de la figura debe valer V:

$$V = \frac{1}{2}V_{semiesfera} + V_{cilindro} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$$

Despejamos la altura en la condición y queda $h = \frac{V-\frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2}$. Sustituimos en el área, la expresamos como función de una variable y aplicamos la desigualdad M.A.-M.G. para $n = 3$:

$$A(r) = 3\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = 3\pi r^2 + 2\cdot\frac{V - \frac{2}{3}\pi r^3}{r} = 3\pi r^2 + \frac{2V}{r} - \frac{4}{3}\pi r^2 \rightarrow$$

$$A(r) = \frac{2V}{r} + \frac{5}{3}\pi r^2 = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + \frac{5}{3}\pi r^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{V}{r}\cdot\frac{V}{r}\cdot\frac{5}{3}\pi r^2} = 3\sqrt[3]{\frac{5\pi V^2}{3}}$$

El valor mínimo se alcanzará cuando

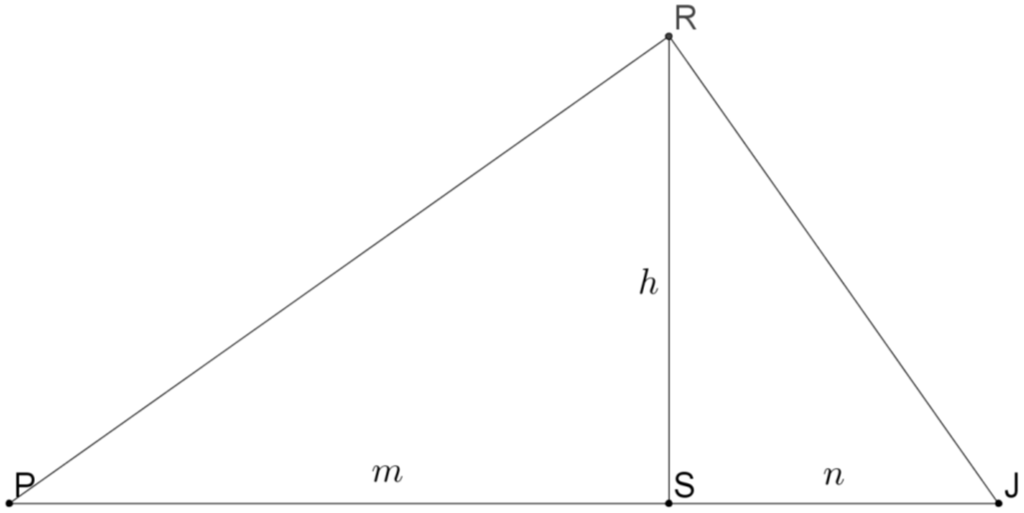
$$\frac{V}{r} = \frac{5}{3}\pi r^2 \rightarrow r^2 = \frac{3V}{5\pi} \rightarrow \boxed{r = \sqrt{\frac{3V}{5\pi}}} \rightarrow \boxed{h = \frac{V - \frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{3V}{5\pi}}\right)^3}{\pi\left(\sqrt{\frac{3V}{5\pi}}\right)^2}}$$

11) *De una cartulina rectangular de dimensiones* $30\ cm$ *de base y* $20cm$ *de altura se recortan cuatro cuadrados iguales (uno en cada esquina), y con la superficie resultante se construye una caja. ¿Cómo deben hacerse los recortes para conseguir que la caja tenga volumen máximo?*

La función es: $V = (20 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x$, siendo x la longitud del lado del cuadrado recortado. Para hallar el máximo, escribimos $V = 2 \cdot (10 - x) \cdot (15 - x) \cdot 2x$ y acotamos usando la desigualdad Media aritmética-Media geométrica con $n = 3$.

$$V = 2 \cdot (10 - x) \cdot (15 - x) \cdot 2x \le 2\left(\frac{(10 - x) + (15 - x) + 2x}{3}\right)^3 = 2\left(\frac{25}{3}\right)^3$$

Al igualar los términos, sale $\begin{cases} 2x = 10 - x \to 3x = 10 \\ 2x = 15 - x \to 3x = 15 \end{cases}$, lo que no tiene sentido. Esto nos llevó a buscar un método aplicable a los polinomios de grado 3. En Niven (pág. 45) encontramos una referencia a un artículo de Boas y Klamkin en el que indican cómo resolver el problema. Para no repetir lo allí hecho, aplicamos el método a otro problema: *Un triángulo rectángulo gira alrededor de su hipotenusa, que mide* $6cm$. *Hállese la altura del mismo para que la diferencia de volúmenes de los conos engendrados sea máxima (Indicación:* h *determina sobre la hipotenusa dos segmentos* m, n.*Recuérdese que* $h^2 = mn$.*)(Problema 124 pág. 255, González-Villanova)*



La función es: $D = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{3}h^2 m - \frac{\pi}{3}h^2 n = \frac{\pi}{3}h^2(m - n) = \frac{\pi}{3}mn(m - n)$, con las variables sujetas a la condición $m + n = 6$. Luego $D = \frac{\pi}{3}(6 - n)n(6 - 2n)$. Para hallar el máximo, al acotar aplicando la desigualdad MA-MG, debe alcanzarse el valor de cota, lo que ocurrirá cuando los términos de las medias sean iguales para algún valor de n y la cota obtenida al sumarlos no dependa de n. Lo haremos hallando tres números positivos p, q, r que multipliquen a cada factor de D y cumplan lo pedido:

$$D = \frac{\pi}{3}(6 - n)n(6 - 2n) = \frac{\pi}{3pqr}[p(6 - n)][qn][r(6 - 2n)] \to$$

$$D \le \frac{\pi}{3pqr}\left(\frac{p(6 - n) + qn + r(6 - 2n)}{3}\right)^3 = \frac{\pi}{3pqr}\left(\frac{(q - p - 2r)n + (6p + 6r)}{3}\right)^3 \to$$

$$D \le \frac{\pi}{3pqr}\left(\frac{0 + (6p + 6r)}{3}\right)^3$$

Es decir, D debe estar acotado superiormente por un número fijo que no dependa de n. Luego $(q-p-2r)n=0 \to q-p-2r=0 \to q=p+2r$. Además, para algún valor de n, los factores $p(6-n), qn, r(6-2n)$ han de ser iguales. Por tanto, tenemos que:

a) $qn=p(6-n) \to (p+2r)n=p(6-n) \to pn+2rn+pn=6p \to$

$$(2p+2r)n=6p \to n=\frac{6p}{2p+2r}$$

b) $qn=r(6-2n) \to (p+2r)n=r(6-2n) \to pn+2rn+2rn=6r \to$

$$(p+4r)n=6r \to n=\frac{6r}{p+4r}$$

$$\frac{6p}{2p+2r}=\frac{6r}{p+4r} \to \frac{p}{2p+2r}=\frac{r}{p+4r} \to p^2+4rp=2pr+2r^2 \to$$
$$p^2+2rp-2r^2=0$$

La ecuación resultante es una ecuación homogénea de segundo grado, que se resuelve dividiéndola término a término por una de las dos incógnitas elevada al cuadrado y haciendo a continuación un cambio de variable. Es decir:

$$p^2+2rp-2r^2=0 \xrightarrow{:r^2} \frac{p^2}{r^2}+2\frac{rp}{r^2}-2\frac{r^2}{r^2}=0 \to \left(\frac{p}{q}\right)^2+2\frac{p}{r}-2=0$$
$$\xrightarrow{z=\frac{p}{r}} z^2+2z-2=0$$

La ecuación de segundo grado resultante tiene soluciones: $z=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2}=-1\pm\sqrt{3}$. Como $p,r>0 \to z>0$, por lo que la única que tiene sentido es $-1+\sqrt{3}$. A partir de este valor, determinamos n,m,h,D. En concreto:

$$n=\frac{6p}{2p+2r}=\frac{6p}{2p+2r}:\frac{r}{r}=\frac{\frac{6p}{r}}{\frac{2p+2r}{r}}=\frac{6\frac{p}{r}}{2\frac{p}{r}+\frac{2r}{r}}=\frac{6z}{2z+2}=\frac{3z}{z+1}=\frac{3\left(-1+\sqrt{3}\right)}{-1+\sqrt{3}+1}$$
$$=\frac{-3+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\left(-3+3\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{-3\sqrt{3}+9}{3}=\frac{3\left(-\sqrt{3}+3\right)}{3}$$
$$=\boxed{3-\sqrt{3}\,cm} \to m=6-n=6-\left(3-\sqrt{3}\right)=\boxed{3+\sqrt{3}\,cm}$$
$$h^2=mn=\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)=3^2-\sqrt{3}^2=9-3=6 \to h=\boxed{\sqrt{6}\,cm}$$

$$D_{máxima}=\frac{\pi}{3pqr}\left(\frac{(6p+6r)}{3}\right)^3=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{(2p+2r)^3}{p(p+2r)r}:\frac{r^3}{r^3}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\frac{(2p+2r)^3}{r^3}}{\frac{p(p+2r)r}{r^3}}$$
$$=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\left(\frac{2p+2r}{r}\right)^3}{\frac{p}{r}\frac{p+2r}{r}\frac{r}{r}}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{(2z+2)^3}{z\cdot(z+2)\cdot 1}$$
$$=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\left[2\left(-1+\sqrt{3}\right)+2\right]^3}{\left(-1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(-1+\sqrt{3}+2\right)\cdot 1}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\left[2\sqrt{3}\right]^3}{\left(-1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)}$$
$$=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{24\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}^2-1^2\right)}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{24\sqrt{3}}{2}=\boxed{4\sqrt{3}\pi\,cm^3}$$

4. Conclusiones

La realización de este trabajo nos ha servido para acercarnos al lenguaje de las Matemáticas y para familiarizarnos con el rigor de las demostraciones.

La aplicación de las desigualdades a los problemas de optimización nos ha mostrado unos métodos de resolución de problemas diferentes a los aprendidos en el instituto, que en nuestra opinión son bastante estimulantes para seguir estudiando matemáticas y repetir esta experiencia.

Creemos que los problemas más básicos de optimización podrían ser explicados en clase de 3º como ejemplo de aplicación interesante de lo que estudiamos.

Falta decir que, además de las medias mencionadas y las desigualdades que las relacionan, hay muchas más medias con sus correspondientes desigualdades, que podrían servir como idea para un futuro trabajo, ya que tristemente por la falta de espacio no las hemos podido desarrollar en este.

5. Bibliografía

1. Víctor Arenzana Hernández, *Problemas de optimización sin cálculo diferencial,* Taller de talento matemático, Universidad de Zaragoza, 6 de Mayo de 2011
2. Ralph P. Boas, Jr. y Murray S. Klamkin, *Extrema of Polynomials,* Mathematical Magazine Vol.50, nº2, Marzo, 1977
3. Angélica Escoredo y otros autores, *Matemáticas II 2ºBachillerato,* Santillana, 2009
4. F.González, J.Villanova, *Curso práctico de Matemáticas C.O.U,* Edunsa, 1989
5. Joaquín Hernández Gómez, *Máximos y mínimos sin cálculo diferencial,* Universidad de otoño 2009
   www.cdlmadrid.org/cdl/htdocs/.../unioto/.../maximosminimos.doc
6. Ivan Niven, Maxima and minima without calculus, Mathematical Association of America, 1981
7. Bjorn Poonen, *Inequalities,* Berkeley Math Circle, November 7, 1999 http://mathcircle.berkeley.edu/archivedocs/1999_2000/lectures/9900lecturespdf/inequalities.pdf
8. Tom Rike, *Maxima and Minima Without Calculus,* Berkeley Math Circle January 13, 2002 *http://mathcircle.berkeley.edu/BMC4/Handouts/MaxMin.pdf*
9. Cristóbal Sánchez-Rubio, Manuel Ripollés Amela, *Manual de matemáticas para preparación olímpica,* Universitat Jaume I, 2000
10. B.J. Venkatachala, *Inequalities: an approach through problems,* Hindustan Book Agency, 2009

6. Anexo

Al estudiar las medias y las desigualdades que las relacionan, hemos visto que existen otras aplicaciones que merece la pena conocer.
Nos ha interesado la conexión entre las ecuaciones y las desigualdades que se plantea en problemas de olimpiadas. Por ejemplo, la resolución de la ecuación

$$\frac{x^2+4}{x^2+2x+5}+\frac{x^2-4x+6}{x^2+4}+\frac{x^2+2x+5}{x^2-4x+6}=1$$

parece, en principio, muy complicada, ya que si hacemos operaciones y simplificamos, sale una ecuación de sexto grado que escapa a nuestros conocimientos. Sin embargo, si observamos las fracciones y los polinomios que las forman, tenemos que:

$$\begin{cases} x^2+4\geq 4 \\ x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geq 4 \\ x^2-4x+6=(x-2)^2+2\geq 2 \end{cases}$$

Luego como todas las fracciones son positivas, podemos aplicar la desigualdad de la media aritmética-media geométrica para $n=3$ y tenemos que:

$$\frac{x^2+4}{x^2+2x+5}+\frac{x^2-4x+6}{x^2+4}+\frac{x^2+2x+5}{x^2-4x+6}$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2+4}{x^2+2x+5}\cdot\frac{x^2-4x+6}{x^2+4}\cdot\frac{x^2+2x+5}{x^2-4x+6}}=3\sqrt[3]{1}=3$$

Por tanto, la ecuación no tiene solución ya que el miembro de la izquierda nunca va a alcanzar el valor 1.

También nos ha gustado la posibilidad de crear nuestros propios problemas a partir del conocimiento de desigualdades. Por ejemplo, dados $x,y,z\geq 0$, sumando las desigualdades:

$$\begin{cases} x^2+y^2\geq 2xy \\ x^2+z^2\geq 2xz \\ z^2+y^2\geq 2zy \end{cases}$$ queda $2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2xz$, multiplicando ambos lados por $\frac{1}{2}$, obtenemos $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$, cumpliéndose la igualdad cuando $x=y=z$. Esta relación nos puede servir para plantear dos problemas:

1. *De todos los ortoedros de diagonal* $10\ cm$, *halla el de superficie máxima.*
2. *De todos los ortoedros de superficie* $10\ cm^2$, *halla el de diagonal mínima.*

que pueden resolverse usando la desigualdad demostrada.