Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Cuarta Edición, 2009/2010

TRABAJO: Paseo por un mundo reticular en el cuaderno de mates

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

- David Laso Álvarez
- Javier Lazcano Pardos
- Daniel Loscos Barroso
- Jorge Pérez González

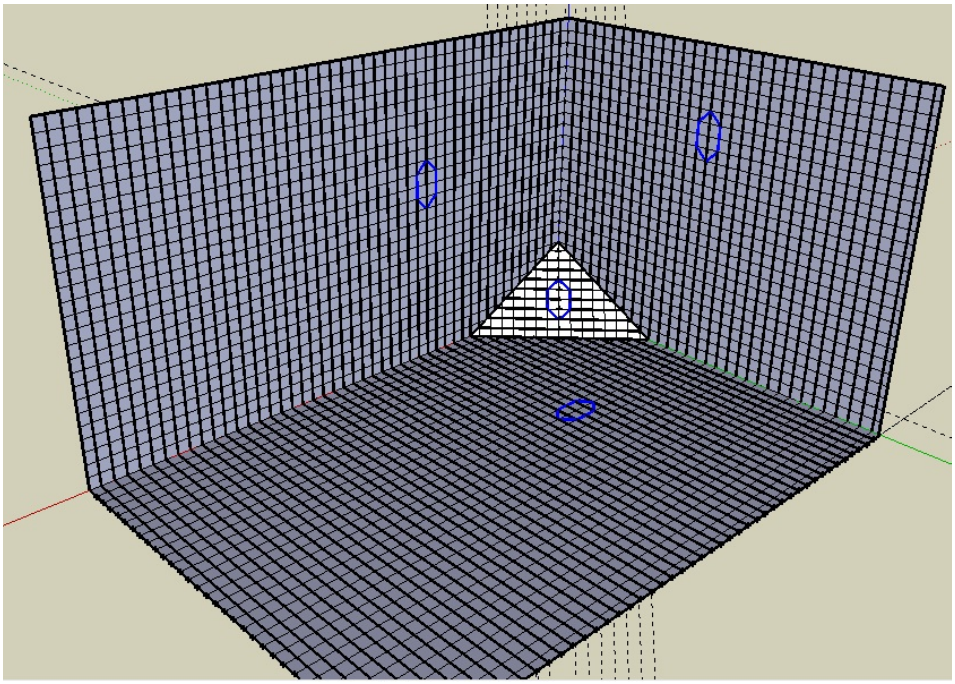
TUTORA:

- Mercedes Sánchez Benito

CENTRO: IES Gran Capitán (Madrid)

PASEO POR UN MUNDO RETÍCULAR

EN EL CUADERNO DE MATES



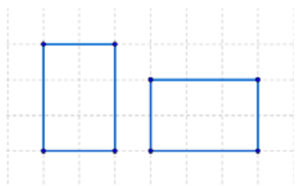
PUNTOS SUSPENSIVOS

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES:

El problema de partida es, aparentemente sencillo, pero encierra otros problemas que los matemáticos han tardado bastante tiempo en resolver:

Llamamos **puntos reticulares** al conjunto de puntos del plano de coordenadas enteras.

Dado un número entero positivo A, encontrar todos los rectángulos, esencialmente distintos, que tienen un vértice en el punto $O=(0,0)$ y los otros tres vértices en puntos reticulares de área A.



Entendemos por rectángulos esencialmente distintos aquellos que no se pueden obtener uno del otro a partir de un giro , una simetría o una traslación. Por ejemplo estos dos rectángulos son esencialmente el mismo

Al resolver algunos casos particulares hemos descubierto que hay algunos números que se pueden obtener como suma de dos cuadrados y otros que no.

Buscando la información necesaria para resolver este problema hemos encontrado resultados muy interesantes en el plano reticular, parece mentira que bajo una apariencia tan simple haya problemas tan difíciles, y algunos todavía sin resolver!

OBJETIVOS:

Conocer mejor ese mundo de los números enteros desde el punto de vista numérico y sobre todo desde el punto de vista geométrico en el sentido de las construcciones geométricas que se pueden hacer en un plano de coordenadas enteras, pues aunque los números enteros los conocemos desde la primaria cuando un problema exige que las soluciones sean sólo números enteros empieza un lío muy grande.

RESULTADOS

-Hemos analizado en un mundo reticular, el comportamiento de las rectas, los polígonos regulares, los círculos las circunferencias, es decir si tienen puntos reticulares, ¿cuántos tienen? ……

- Hemos encontrado la mágica fórmula de Pick para calcular el área de un polígono reticular y hemos extendido esta fórmula a un polígono reticular contenido en un plano en el espacio.

Comenzamos resolviendo el problema inicial.

Obviamente, el número de rectángulos posibles depende de la descomposición en factores primos del número A.

Lo primero que hemos aprendido es saber cuántos divisores tiene un número N y cómo se calculan.

Si $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots\ldots\ldots\ldots p_k^{a_k}$, el número de divisores que tiene N, es $(a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_k+1)$

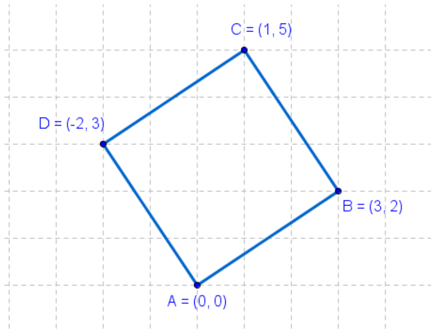
Pero además de la descomposición de A en factores primos tendremos que ver si hay factores que se puedan poner como suma de dos cuadrados de números enteros y de cuántas maneras puede hacerse.

Los números primos excepto el 2 son impares y hemos observado distinto comportamiento según sean de la forma $4n+1$ o de la forma $4n+3$.

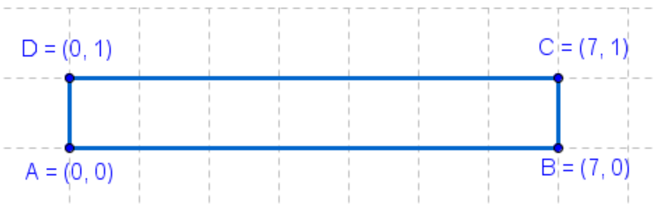
Vamos a explorar algunos casos:

$A=13$, un número primo de la forma $4n+1$.

En este caso sólo hay **2 rectángulos**

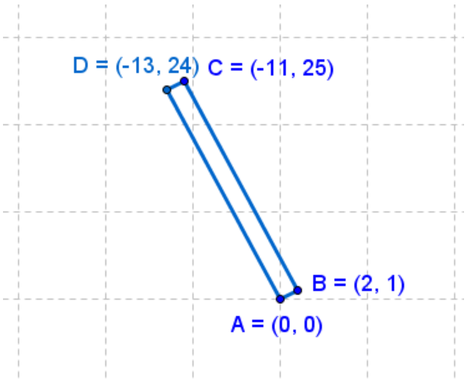


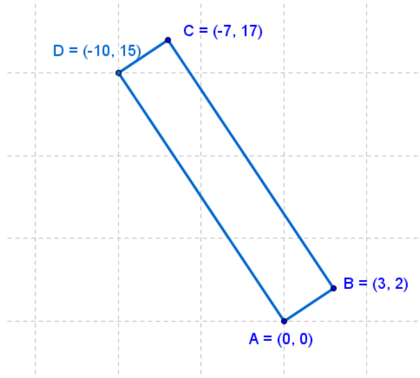
$A=7$, un número primo de la forma $4n+3$, en este caso sólo hay 1



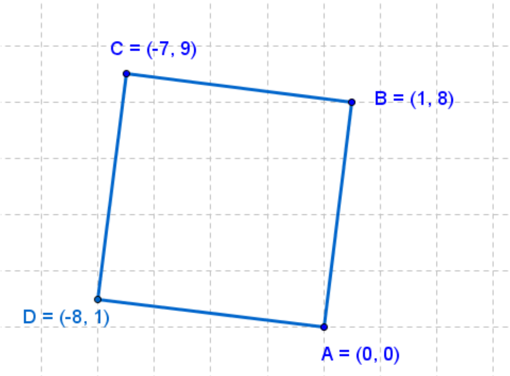
$A=65$, un número compuesto y en su descomposición hay dos factores primos de la forma $4n+1$.

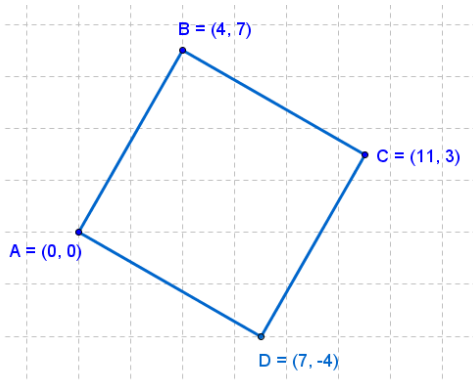
Además de los rectángulos de lados paralelos a los ejes de lados $a=1$, $b=65$ y $a=5$, $b=13$; se pueden construir los rectángulos de lados $a=13\sqrt{5}$, $b=\sqrt{5}$ y $a=5\sqrt{13}$, $b=\sqrt{13}$





Pero también $65 = 1 + 64$ y $65 = 16 + 49$, por lo tanto, hay dos cuadrados de lado $\sqrt{65}$ que son esencialmente el mismo



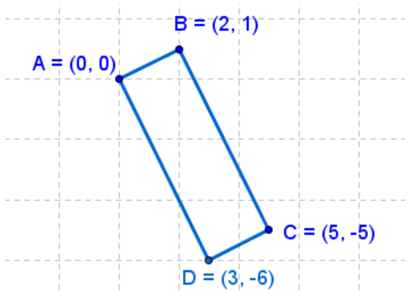


Es decir para $A = 65$ salen **5**

Si $A = 15$, un número compuesto por un número primo de la forma $4n+1$ y otro de la forma $4n+3$

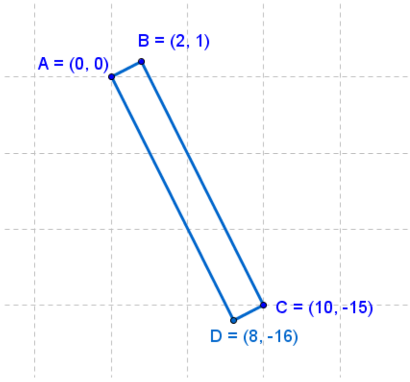
Además de los rectángulos de lados paralelos a los ejes de lados $a = 1$, $b = 15$ y $a = 3$, $b = 5$, podemos construir el que tienen por lados $a = \sqrt{5}$ y $b = 3\sqrt{5}$

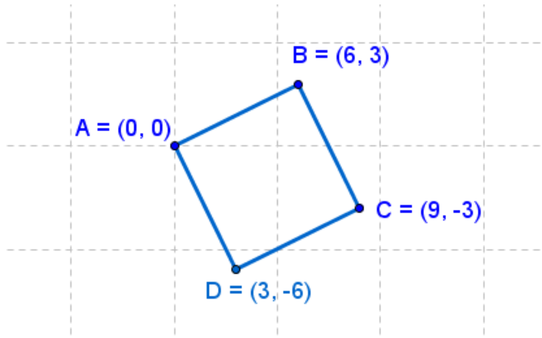
En este caso hay **3**



Si $A = 45$, un número compuesto por un primo de la forma $4n+1$ y el cuadrado de un primo de la forma $4n+3$

Además de los rectángulos de lados paralelos a los ejes de lados $a = 1$, $b = 45$; $a = 3$ y $b = 15$; $a = 5$, $b = 9$ estarán los que tienen por lados $a = \sqrt{5}$, $b = 9\sqrt{5}$, $a = 3\sqrt{5}$, $b = 3\sqrt{5}$

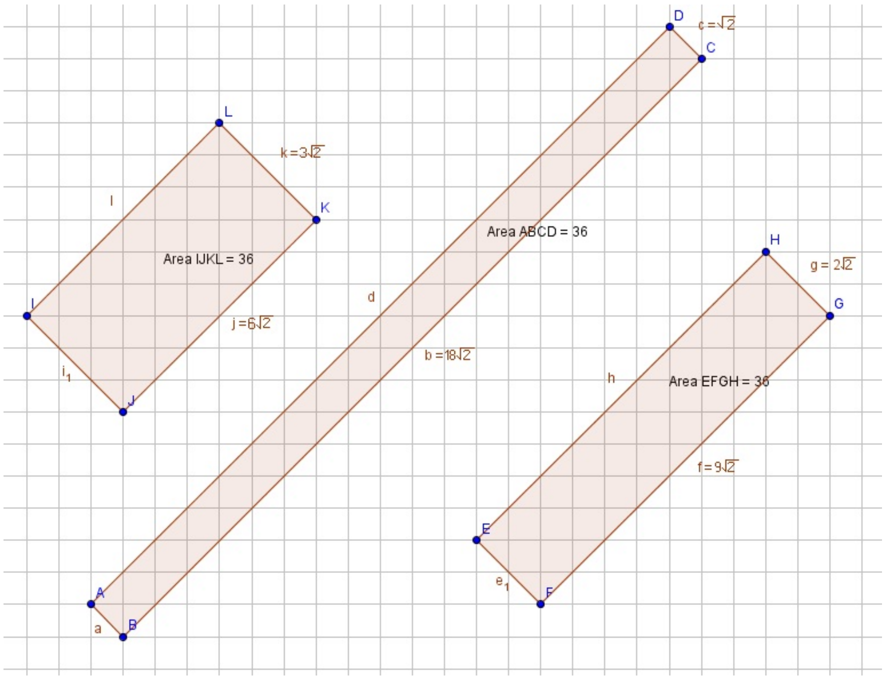




En este caso hay **5**

Si $A = 36$, un número compuesto por una potencia de 2 (el 2 se comporta como los primos de la forma $4n+1$)y el cuadrado de un primo de la forma $4n+3$.

Además de los rectángulos de lados $1.36 = 2.18 = 3.12 = 4.9 = 6.6$ paralelos a la retícula; están los que tienen por lados $a=\sqrt{2}$, $b=18\sqrt{2}$; $a=2\sqrt{2}$, $b=9\sqrt{2}$; $a=3\sqrt{2}$, $b=6\sqrt{2}$



En este caso encontramos: **8**

Si $A = 90$, un número compuesto por una potencia de 2 , un primo de la forma $4n+1$ y el cuadrado de un primo de la forma $4n+3$.

Todos los productos de dos factores $1.90 = 2.45 = 3.30 = 5.18 = 6.15 = 9.10$ y además se pueden construir $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{10}$, entonces hacemos las parejas correspondientes:

Puntos suspensivos

$\sqrt{2}$ y $45\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$ y $15\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$ y $9\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$ y $18\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$ y $9\sqrt{5}$; $3\sqrt{5}$ y $6\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$ y $9\sqrt{10}$; $3\sqrt{10}$ y $3\sqrt{10}$

Total: **14**

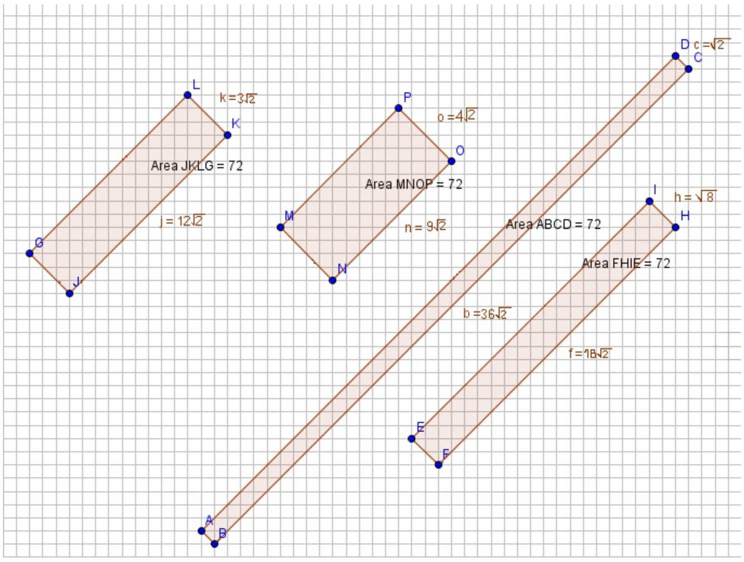
Si $A=216$, un número compuesto por una potencia de 2 y el cubo de un primo de la forma $4n+3$.

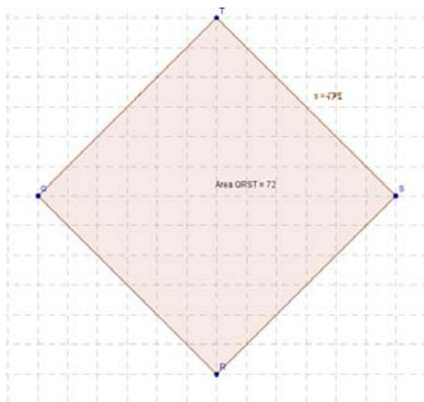
En este caso tenemos $1.216 = 2.108 = 3.72 = 4.54 = 6.36 = 8.27 = 9.24 = 12.18$ de lados paralelos a la retícula y los que tienen por lados $a=\sqrt{2}$, $b=108\sqrt{2}$; $a=2\sqrt{2}$, $b=54\sqrt{2}$; $a=3\sqrt{2}$, $b=36\sqrt{2}$; $a=4\sqrt{2}$, $b=27\sqrt{2}$; $a=6\sqrt{2}$, $b=18\sqrt{2}$; $a=9\sqrt{2}$, $b=12\sqrt{2}$.

Total : **14**

Si $A=72$, un número compuesto por una potencia de 2 (el 2 se comporta como los primos de la forma $4n+1$)y el cuadrado de un primo de la forma $4n+3$.

Además de los que tienen los lados paralelos a la trama reticular encontramos:





En todos estos rectángulos entendemos que uno de sus vértices es el punto $(0,0)$ porque en realidad lo que importa es la longitud de sus lados y que los vértices sean puntos reticulares.

Total **: 11**

Para resolver este problema tenemos que saber si un número primo se puede descomponer como suma de dos cuadrados y hemos encontrado lo siguiente:

Puntos suspensivos

Si tenemos un número primo p de la forma $p = 4k+3$, no se puede poner como suma de dos cuadrados:

Como es impar, uno de los sumandos debe ser par y el otro impar. Si un número es impar, o bien es de la forma $4k+1$, o bien es de la forma $4k+3$; pero el cuadrado de un número de la forma $4k+1$ es de la forma $(4k+1)^2 = 16k^2+8k+1 = 4(4k^2+2k)+1$, y el cuadrado de un número de la forma $4k+3$ es $(4k+3)^2 = 16k^2+24k+9 = 4(4k^2+6k+2)+1$, así que nunca se puede obtener un número primo de la forma $p = 4k+3$ como suma de dos cuadrados de números enteros.

Euler demostró que todo número primo de la forma $p = 4k+1$ siempre se puede poner como suma de dos cuadrados de forma única.

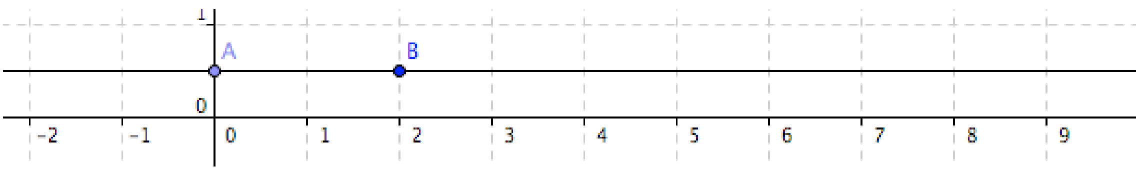
Por lo tanto siempre vamos a poder elegir puntos reticulares adecuados para construir segmentos de longitudes: $\sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{13}, 4, \sqrt{17}, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{5}, 5$....... Teniendo en cuenta estos dos resultados, si un número $A = 2^a\, p_1^{a_1} p_2^{a_2} .... p_k^{a_k} q_1^{b_1} q_2^{b_2} .... q_m^{b_m}$, donde los números : $p_1, p_2, ... p_k$ son de la forma $4n+1$ y $q_1, q_2 ... q_m$ son de la forma $4n+3$, el número de rectángulos que vamos a poder construir es lo mismo que considerar que $A = \left(\sqrt{2}\right)^{2a} \left(\sqrt{p_1}\right)^{2a_1} .... \left(\sqrt{p_k}\right)^{2a_k} q_1^{b_1} q_2^{b_2} .... q_m^{b_m}$, y el número de “divisores” que podríamos obtener será: $R = (2a+1)(2a_1+1).....(2a_k+1)(b_1+1)(b_2+1).....(b_m+1)$, si $R = 2r$, el número de rectángulos que se obtienen es r; y si $R = 2r-1$, el número de rectángulos que obtenemos es r

Ya hemos conseguido un primer resultado!!!!

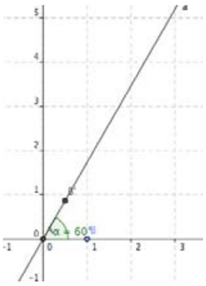
Después de resolver este problema vamos a iniciar un paseo por algunos problemas planteados en un plano reticular, como nuestro cuaderno de mates.

RECTAS:

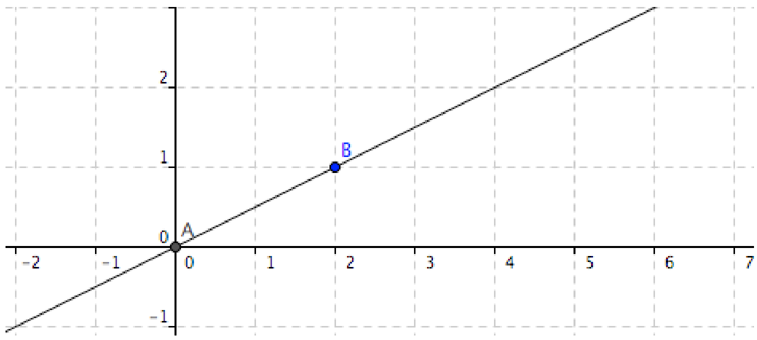
En el plano hay rectas que no tienen puntos reticulares, tales como por ejemplo las rectas que pasas por los puntos medios de dos lados contiguos o dos lados opuestos de un cuadrado unidad.



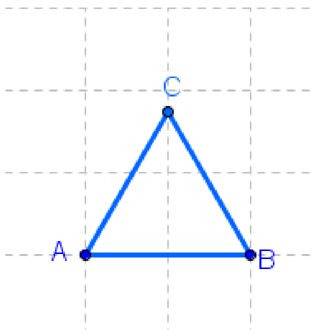
Hay rectas que sólo tienen un punto reticular, por ejemplo la que pasa por (0,0) y forma un ángulo de 60º con el eje OX.



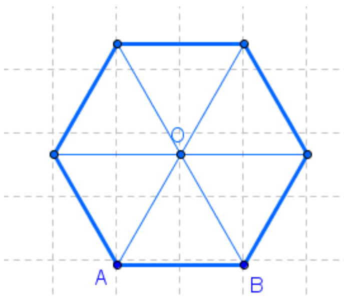
Si una recta contiene más de un punto reticular, entonces tiene infinitos puntos reticulares igualmente espaciados :



POLÍGONOS REGULARES:

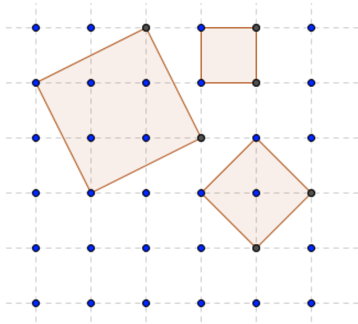


Los polígonos regulares que rellenan el plano son el triángulo, el cuadrado y el hexágono. Es imposible obtener un triángulo equilátero con los tres vértices en puntos reticulares, pues si un vértice es el punto $(0,0)$ y el otro es el punto $(l,0)$, entonces el tercero debe ser $\left(\frac{l}{2},\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)$ y si l es un número entero $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ no lo es.



De manera análoga se puede ver que el hexágono regular no puede tener todos los vértices en puntos reticulares, al fin y al cabo un hexágono está formado por 6 triángulos equiláteros.

El único polígono regular que puede ser colocado en el plano de coordenadas enteras de modo que sus vértices sean puntos reticulares es el cuadrado.



La demostración de este resultado se puede ver en un artículo de Daniel J. O'loughlin en Mathematics Magazine vol75, nº1 febrero 2002. La demostración se basa en tres ideas:

I) Si A es el área de un polígono en el plano cuyos vértices son puntos reticulares entonces $2A$ es un número entero (resultado elemental a partir del Teorema de Pick como veremos más adelante).

II) La fórmula para calcular el área de un polígono regular de n lados de longitud s es:

$$A(P_n) = \frac{ns^2}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

III) Si $n \geq 3$ el valor de $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ es racional sólo para $n = 4$. Para completar esta demostración son necesarios unos cálculos con funciones trigonométricas, nos dicen que las cuentas no son difíciles pero nosotros sabemos muy poco de trigonometría.

CÍRCULOS Y CIRCUNFERENCIAS

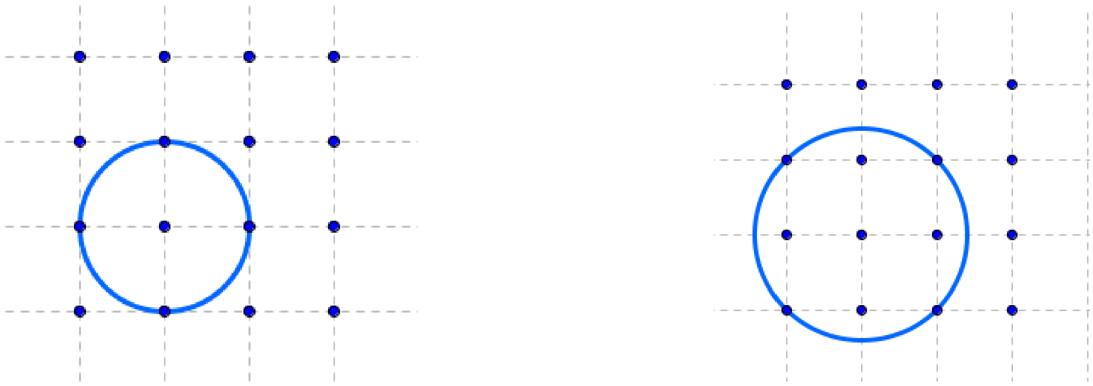
H. Steinhaus propuso el siguiente problema.

Para cada número natural n, ¿existe en el plano un círculo que contenga en su interior exactamente n puntos reticulares?

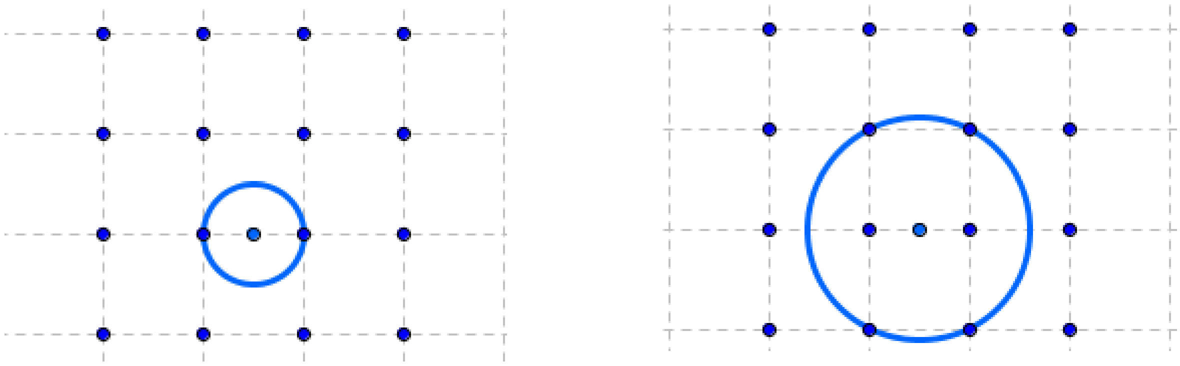
Es fácil demostrar que existen números naturales n para los que no hay ningún círculo con centro en un punto reticular y en cuyo interior haya exactamente n puntos reticulares.

Claramente:

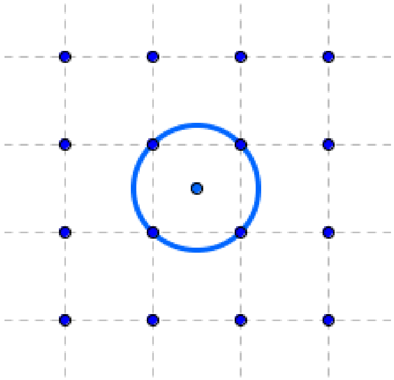
Si tenemos un círculo de centro un punto reticular y radio $r \leq 1$ entonces sólo hay un punto reticular en su interior; pero si el radio es $1 < r \leq \sqrt{2}$ entonces en el interior de ese círculo habrá exactamente cinco puntos reticulares. Y no existe ningún círculo de centro un punto reticular que tenga en su interior exactamente dos, tres o cuatro puntos reticulares.

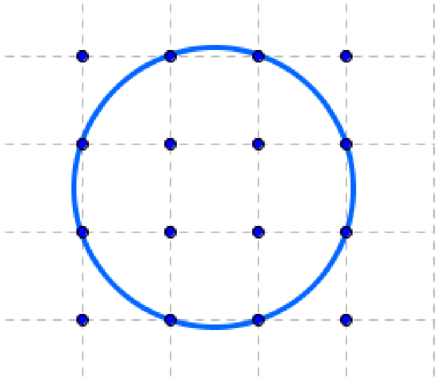


Si tuviéramos un círculo de radio $r \leq 1/2$ y centro el punto medio de un lado cualquiera de un cuadrado unidad del retículo, no habrá ningún punto reticular en su interior, pero para un radio $1/2 < r < \sqrt{5}/2$, tendríamos exactamente dos puntos reticulares en el interior del círculo.

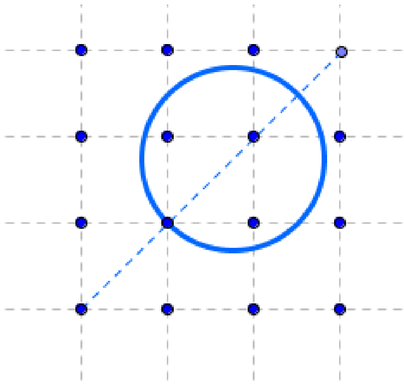


Si ahora consideramos un círculo cuyo centro sea el centro de cualquier cuadrado unidad y radio $r \leq \sqrt{2}/2$, entonces tampoco tendríamos puntos reticulares en su interior; pero para un radio $\sqrt{2}/2 < r \leq \sqrt{10}/2$, habría exactamente cuatro puntos reticulares en su interior.





Supongamos a continuación que el centro de nuestro círculo pudiera moverse partiendo del centro de un cuadrado unidad y siguiendo la dirección de la diagonal, podríamos conseguir un círculo que tiene exactamente tres puntos reticulares en su interior

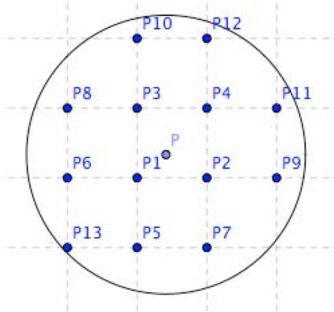


Probaremos ahora que, eligiendo un centro y un radio apropiados en el plano, es posible tener un círculo en cuyo interior haya exactamente el número de puntos reticulares que queramos.

Si fijamos unos ejes de coordenadas, vamos a elegir como centro del círculo el punto $O\left(\sqrt{2},\frac{1}{3}\right)$, entonces para cada número natural n existirá un radio r_n tal que en el interior del círculo de centro O y radio r_n contendrá exactamente n puntos reticulares.

Para demostrarlo:

PRIMERO: las distancias del punto O a dos puntos reticulares cualesquiera son distintas, por lo que siempre habrá un círculo con un radio comprendido entre las distancias de dos puntos distintos a *P*. Como todos ellos tienen distancias distintas a P los ordenamos en una sucesión finita de acuerdo a sus distancia crecientes desde O. $P_1, P_2 \ldots\ldots P_n$.



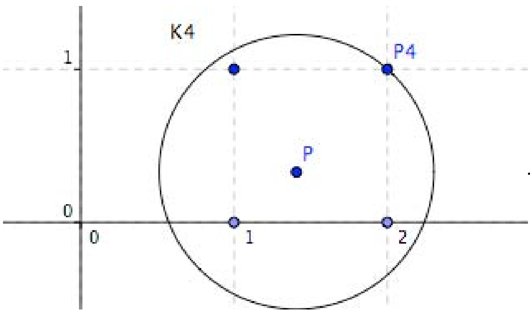
Supongamos que $P_1(a,b)$ y $P_2(c,d)$ son dos puntos reticulares distintos, pero que la distancia a O fuera la misma, es decir: $d(O,P_1)=d(O,P_2)$

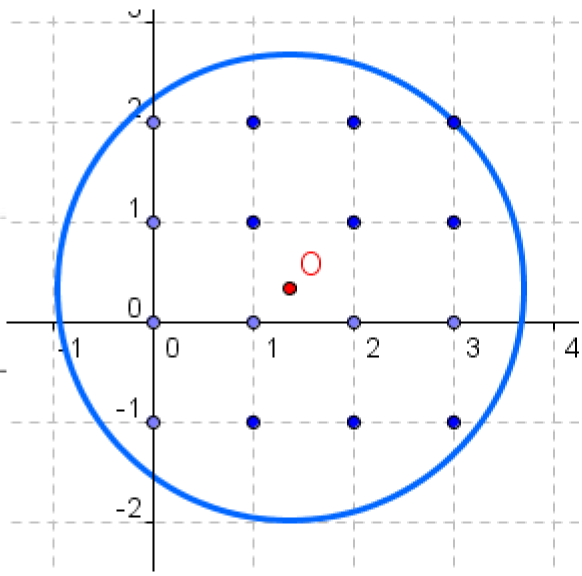
Por el teorema de Pitágoras se tendría que: $\left(a-\sqrt{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{3}\right)^2=\left(c-\sqrt{2}\right)^2+\left(d-\frac{1}{3}\right)^2$, de donde $2\left(c-a\right)\sqrt{2}=c^2+d^2-a^2-b^2+\frac{2}{3}\left(b-d\right)$, y como el miembro de la derecha es un número racional, entonces $c=a$ y consecuentemente $\left(d+b+\frac{2}{3}\right)\left(b-d\right)=0$, pero como b y d son números enteros $b=d$, contrario a la hipótesis de que los puntos P_1 y P_2 son distintos.

SEGUNDO: claramente, cada círculo de centro O y radio suficientemente grande contendrá más de *n* puntos reticulares.

En el interior de uno de esos círculos habrá un número finito de puntos reticulares.

Vamos a llamar k_{n+1} al círculo de centro O que pasa por el punto P_{n+1}. Así, los únicos puntos que están en el círculo son los puntos $P_1, P_2.....P_n$





Resultados muy difíciles de probar

En la web http://mathworld.wolfram.com hemos encontrado los siguientes resultados

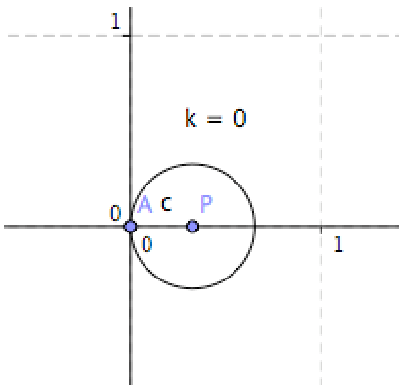
- **Para cada número natural n, ¿existe un círculo de área n que contiene en su interior exactamente n puntos reticulares?**

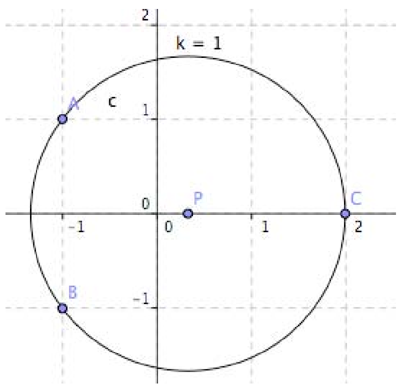
  Steinhaus probó que siempre es posible.

- **Para cada número natural n, ¿existe un círculo en cuya circunferencia haya exactamente n puntos reticulares?**

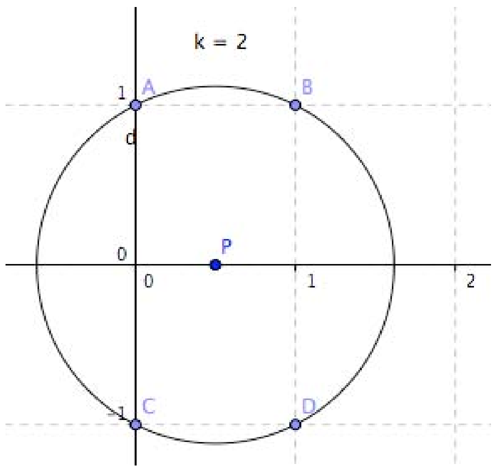
  La demostración se debe a A. Schinzel:

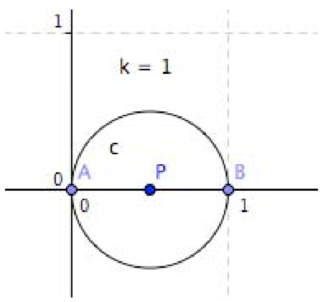
  Si $n = 2k+1$ (impar) siendo k un entero $k \geq 0$ la circunferencia de centro $(1/3, 0)$ y radio $r = \frac{5^k}{3}$ contiene exactamente n puntos reticulares.





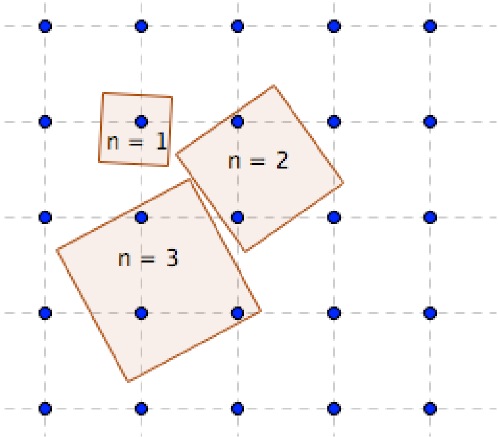
  Si n es par, $n = 2k$ siendo k un número natural, la circunferencia de centro en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y radio $r = \frac{5^{\frac{k-1}{2}}}{2}$ contendrá n puntos reticulares.





Esta solución no proporciona el menor radio posible

- **Para cada número natural n existe en el plano un cuadrado que contiene en su interior exactamente n puntos reticulares.**



Muchas otras cuestiones se pueden formular sobre círculos y puntos reticulares:

Si tenemos un círculo con centro en un punto reticular y pasa por, al menos, un punto reticular, ¿Cuál es su radio?

Imaginemos que el centro es el $O(0,0)$, si pasa por el punto reticular $A(a,b)$, entonces $r^2 = a^2 + b^2$, es decir el radio al cuadrado debe poderse escribir como suma de dos cuadrados.

Otra vez nos encontramos con la descomposición de un número como suma de dos cuadrados!!

Teniendo en cuenta lo que sabemos al respecto, la respuesta a nuestra pregunta es:

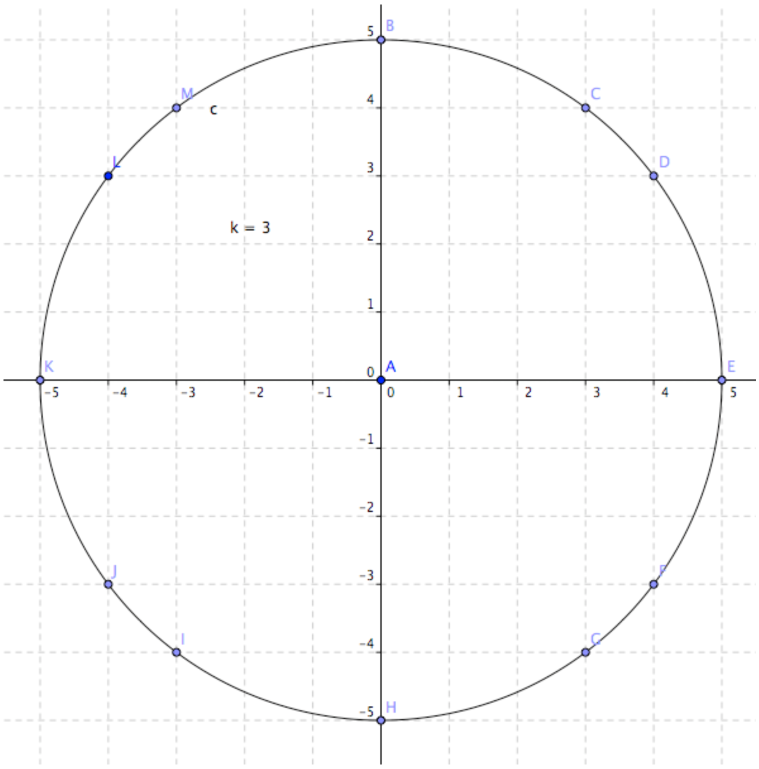
El radio del círculo tiene que ser igual a la raíz cuadrada de un número natural que, cuando se divide por su mayor factor cuadrático, da un cociente que es un número que no tiene divisores de la forma $p = 4k + 3$.

Así, si consideramos un círculo con centro en un punto reticular y en su circunferencia hay al menos un punto reticular, sus radios posibles son:
$1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{13}, 4, \sqrt{17}, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{5}...$

Otra pregunta que nos podemos hacer:

¿Cuántos puntos reticulares pueden estar en la circunferencia de un círculo de centro un punto reticular?

Es fácil ver, por simetría que siempre obtendremos un múltiplo de 4, pero lo más curioso es que se puede obtener cualquier múltiplo de 4. Se ha demostrado que: Para un número natural k, un círculo con centro en un punto reticular y radio $r=\sqrt{5^{k-1}}$ tendrá en su circunferencia exactamente $4k$ puntos reticulares.



Un problema todavía no resuelto

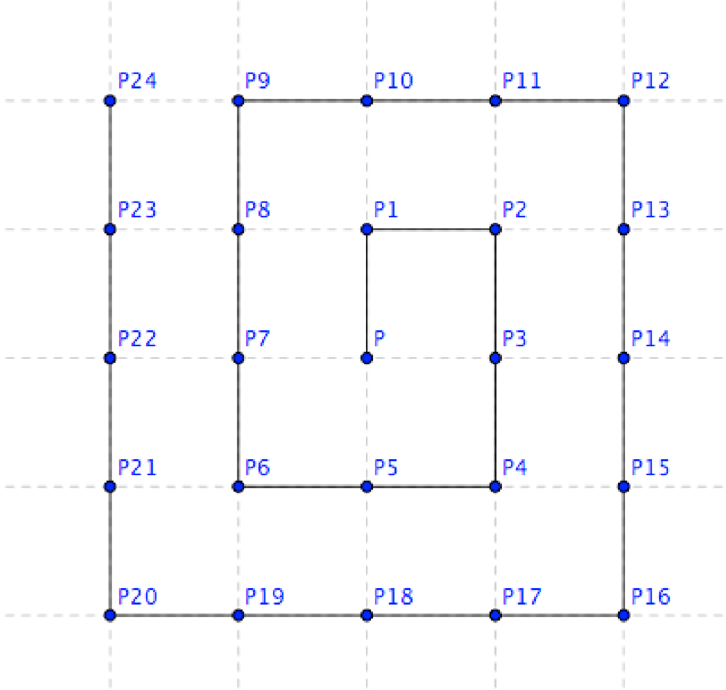
¿Existe un ortoedro cuyas aristas, diagonales de las caras y diagonales interiores tengan todas las longitudes enteras?

Este problema es equivalente , utilizando el Teorema de Pitágoras, a ver si existen, o no, números naturales x, y, z tales que cada uno de los números x^2+y^2, x^2+y^2, y^2+z^2 y $x^2+y^2+z^2$ sean cuadrados de números naturales. Por el momento, parece que todavía no hay respuesta!!!!!!

Una curiosidad:

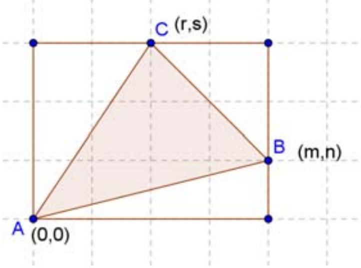
Los puntos reticulares se pueden ordenar:

Se pueden numerar todos los puntos reticulares en una sucesión infinita, de tal modo que puedan ser ordenados:



EL TEOREMA DE PICK para un polígono simple

Supongamos que tenemos un triángulo de vértices $A(0,0)$ **,** $B(m,n)$ **y** $C(r,s)$ **, puntos reticulares, el área del triángulo la calculamos restando al área del rectángulo las áreas de los tres triángulos que hemos añadido para formar el rectángulo y obtenemos que es:**



$$A = \frac{|ms - rn|}{2}$$

Llamamos triángulo fundamental a un triángulo cuyos vértices son puntos reticulares y no tienen ningún punto reticular ni en el interior ni en los lados (sólo los vértices) .Veamos que el área de cualquier triángulo fundamental es ½.

Podemos mover cualquier triángulo fundamental de modo que tenga un vértice en el punto $(0,0)$, entonces según el problema anterior el área de cualquier triángulo fundamental siempre será mayor o igual que $\frac{1}{2}$, pues el numerador es un número entero positivo no nulo, y el más pequeño de todos es el 1.

Dado un polígono simple (los lados no se cortan) reticular cualquiera, lo descomponemos en triángulos fundamentales. Supongamos que hay T triángulos fundamentales, en ese caso la suma total de los ángulos de todos los triángulos es $180T$, pero por cada punto interior estamos añadiendo 360 grados, luego la suma será $180T-360I$. Sin embargo en un polígono de k lados, los ángulos interiores suman $(k-2)180$, pero ahora estamos considerando como vértices los puntos del borde que no lo son en sentido clásico. Cada uno de ellos incrementa la suma en 180 grados. Así que en términos de B, la suma vale $(B-2)180$. Igualando $180T-360I=(B-2)180$, es decir $T=B-2+2I$

Resultado sorprendente, el número de triángulos fundamentales de un polígono reticular simple sólo depende de los puntos que hay en el borde y de los que hay en el interior y no depende de cómo se elijan los triángulos.

Dado un triángulo fundamental, seguro que se puede inscribir en un cuadrado reticular de lado n. Descomponemos ese cuadrado en triángulos fundamentales, uno de los cuales es el triángulo inicial, el número de triángulos fundamentales será $T=4n-2+2(n-1)^2=2n^2$,

Tendremos entonces que el cuadrado lo tenemos descompuesto en $2n^2$ triángulos fundamentales y la suma de las áreas de todos ellos es n^2, como el área de cada uno de ellos es mayor o igual a ½, necesariamente todos tienen que tener área ½ . Por tanto cualquier triángulo fundamental tiene área ½.

Teorema de Pick

En 1899 George Pick descubrió una fórmula para calcular el área de un polígono simple P cuyos vértices son puntos reticulares (“simple” significa que el polígono no se corta a sí mismo)

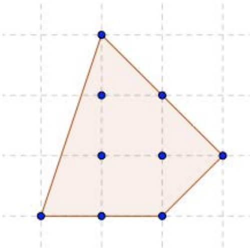
El área es $A=I+\frac{B}{2}-1$, siendo I los puntos reticulares que están en el interior y B los puntos reticulares que están en el borde.

Dado cualquier polígono simple reticular lo descomponemos en triángulos fundamentales, antes hemos visto que $T = B - 2 + 2I$ y cada triángulo fundamental tiene área ½, entonces

$$A = \frac{1}{2}T = \frac{B-2+2I}{2} = I + \frac{B}{2} - 1$$

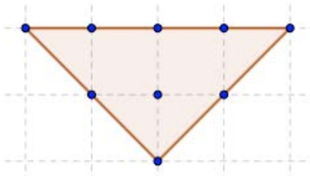
La fórmula del área es aditiva en el sentido de que si la fórmula es válida para dos polígonos con interiores disjuntos, pero que están unidos por una arista común, entonces también es válida para el polígono formado por la unión de los dos anteriores.

Polígono1



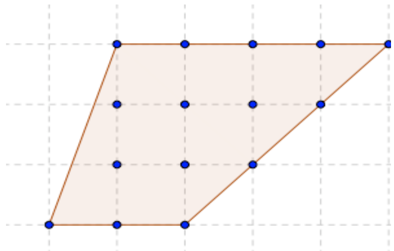
Área 5

Polígono2



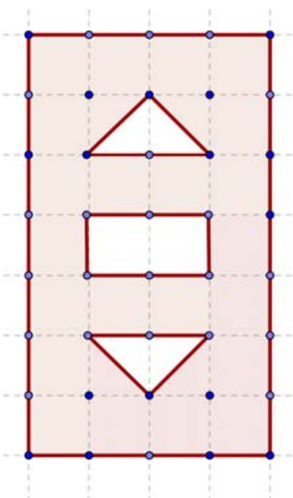
Área 4

Polígono 1+2



Área 9

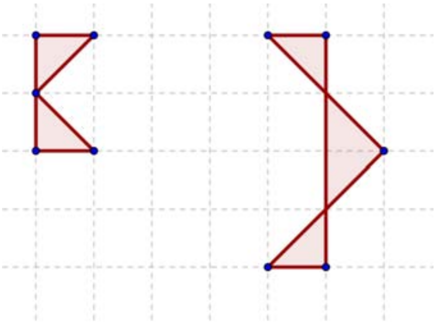
Si llamamos $A_1 = I_1 + \frac{B_1}{2} - 1$ a la fórmula de Pick para el polígono P_1, y $A_2 = I_2 + \frac{B_2}{2} - 1$ a la fórmula de Pick para el polígono P_2, y finalmente, $A = I + \frac{B}{2} - 1$ la fórmula de Pick para el polígono P construido con los polígonos P_1 y P_2 unidos por una arista común. Si E es el número de puntos reticulares de la arista común, entonces $B = B_1 - E + B_2 - E + 2$, $I = I_1 + I_2 + E - 2$ y por lo tanto $A = A_1 + A_2$



Si el polígono no es simple también se puede calcular el área mediante una generalización de la fórmula de Pick teniendo en cuenta el número de “agujeros” que tenga el polígono o si se cruzan o no los lados.

Si en el polígono los lados no se cortan y tiene m agujeros que no se tocan entonces, calculamos el área del polígono “sin agujeros” y el área de los agujeros y después se restan, pero también podemos hacerlo todo a la vez teniendo en cuenta que el número de puntos interiores del polígono ha disminuido en tantos como tienen los huecos incluido los de sus bordes, pero por otro lado el número de lados del polígono se ha incrementado y haciendo las cuentas al final queda que el área es $A = I + \frac{B}{2} - (1-m)$. En la figura anterior $A = 4 + \frac{36}{2} - (1-3) = 24$

Este resultado no se puede aplicar a figuras como:



- **Antes de abordar la siguiente parte necesitamos poder utilizar una nueva herramienta llamada determinante:**

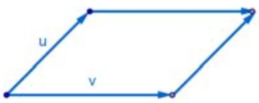
Un determinante de orden 2 se calcula de la siguiente manera $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$;

Un determinante de orden 3 se puede calcular a través de 3 determinantes de orden 2

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

Dados dos vectores de componentes $u = (a', b', c')$ y $v = (a'', b'', c'')$ se llama producto vectorial de estos dos vectores al vector cuyas componentes son

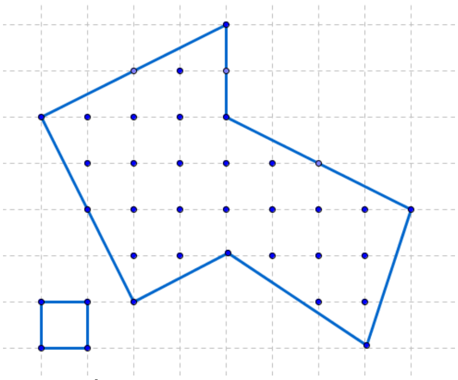
$$uxv = \left(\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \right)$$



Si los vectores u y v tienen distinta dirección determinan un paralelogramo, pues bien el área de este paralelogramo es $|uxv|$

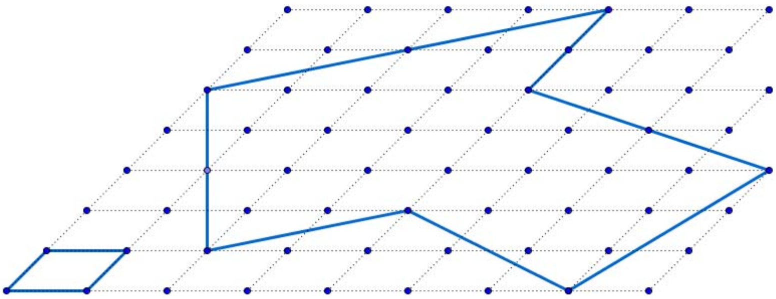
Una exploración del teorema de Pick en el espacio

Dado un polígono simple reticular P, el área de P viene dada por: $A = I + \frac{B}{2} - 1$, siendo A el área que encierra el polígono, I es el número de puntos reticulares que hay en el interior del polígono y B es el número de puntos reticulares en el borde del polígono.



Por ejemplo en esta figura, $I = 22$, $B = 11$, por lo tanto el área es $A = 22 + \frac{11}{2} - 1 = \frac{53}{2}$.

Vamos a intentar extender la fórmula de Pick a polígonos en una retícula tridimensional.



Si hacemos una transformación lineal en el plano, el teorema de Pick sigue siendo válido. Si transformamos nuestra retícula inicial en otra retícula: por ejemplo consideramos la aplicación que transforma el punto (1,0) en el punto (2,0) y el punto (0,1) en el (1,1), obtenemos esta nueva retícula. Al paralelogramo obtenido al transformar el cuadrado unidad le llamaremos paralelogramo unidad.

Esta transformación se puede escribir de la siguiente manera: $\begin{matrix} x' = 2x + y \\ y' = \quad y \end{matrix}$, o bien en forma matricial: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Los puntos reticulares de la primera figura se transforman en los de la segunda. El número de puntos reticulares que hay en el interior y en la frontera es el mismo que antes, sin embargo el área es el doble de la anterior. La razón es que el paralelogramo unidad de la retícula nueva tiene área 2. Un resultado elemental nos dice que el valor absoluto del determinante de la matriz $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, es el área de la imagen del cuadrado unidad y en general es el factor para convertir áreas.

En el teorema de Pick podemos interpretar el área como el número de cuadrados unidad que hay en el polígono, en esta nueva retícula podemos interpretarlo de la misma manera,

¿Cuántos paralelogramos unidad caben en la imagen del polígono original? Por lo tanto para calcular el área del polígono transformado, hacemos lo mismo que antes pero habrá que multiplicar esa cantidad por el área del paralelogramo unidad. En este caso $A'=53$

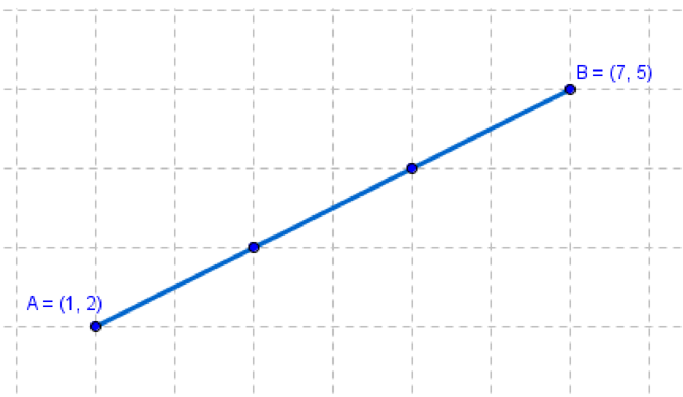
En general si el paralelogramo unidad tiene área U, entonces tenemos:

Teorema de Pick para una retícula construida con ese paralelogramo unidad: El área de un polígono simple formado por puntos reticulares es $A=U\left(I+\frac{B}{2}-1\right)$

Retículas unidimensionales

Consideremos la recta que une los puntos reticulares $(0,0)$ y (a,b). Para cualquier número entero n, el punto (na,nb) está en dicha recta. Por lo tanto en el segmento que une los puntos $(0,0)$ y (a,b) no hay puntos reticulares si y sólo sí a y b son primos entre si, es decir si $mcd(a,b)=1$.

En general dado el segmento que une los puntos $(0,0)$ y (a,b), si $d=mcd(a,b)$, entonces. $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)$, $\left(\frac{2a}{d},\frac{2b}{d}\right)$...... $\left(\frac{(d-1)a}{d},\frac{(d-1)b}{d}\right)$ son los $(d-1)$ puntos reticulares que están en el interior del segmento.



Puntos reticulares de un plano en el espacio

Consideremos el plano $\pi: 2x+3y+6z=12$.

Todos los puntos reticulares en el espacio se pueden proyectar en el plano reticular x,y. Por ejemplo el punto $(3,4,-1)$ que está en el plano π se proyecta en el punto $(3,4)$ en el plano x,y.

Queremos construir una retícula sobre el plano π para poder aplicar el teorema de Pick a un polígono construido sobre esa retícula.

Para construir dicha retícula, primero tenemos que determinar dos direcciones para formar un paralelogramo unidad.

Si $z=0$, tenemos la recta $2x+3y=12$, en esta recta están los puntos $(3,2,0)$, $(6,0,0)$....

Cualquier otra recta de la forma $2x+3y=k$ será paralela a la dada, pero para que esté contenida en el plano, k tiene que ser múltiplo de 6. Por ejemplo si $k=6$, entonces $z=1$, y sobre esa recta podemos señalar los puntos reticulares $(3,2,1)$, $(6,0,1)$....; es decir ya podemos formar un paralelogramo unidad para construir una trama reticular en el plano π.

Vamos a hacerlo en general:

Supongamos que tenemos un plano que pasa por el origen $ax+by+cz=0$, (si el plano no pasa por el origen, trazamos el plano paralelo a él que pasa por el origen para construir una trama reticular) de manera que a,b,c no son todos nulos. Y para más comodidad vamos a suponer que los tres coeficientes no tienen divisores comunes, es decir $mcd(a,b,c)=1$.

El plano π corta al plano x,y en la recta $ax+by=0$, vamos a considerar esta recta como una de las direcciones para formar el paralelogramo unidad. Si $a=0$ tendríamos la recta $y=0$,y tendríamos rectas paralelas al eje OX. Algo parecido sucede si $b=0$. Estos casos son muy simples, es mejor tratarlos como un caso aparte. Así que suponemos que $a\neq 0$ y $b\neq 0$

La recta $ax+by=0$ contiene los puntos reticulares $(0,0,0)$ y $(b,-a,0)$. Por lo que hemos visto antes, si $d=mcd(a,b)$, entonces los puntos reticulares que están en esa recta son los puntos $\left(\frac{nb}{d},-\frac{na}{d}\right)$ para todo n entero. El punto reticular $\left(\frac{b}{d},-\frac{a}{d}\right)$ es adyacente al punto $(0,0)$; es decir el vector de componentes $\left(\frac{b}{d},-\frac{a}{d}\right)$ es uno de los vectores que determinan el paralelogramo base.

En general, las rectas paralelas a esta son de la forma $ax+by=k$, y para que esta ecuación tenga solución en números enteros $k=nd$ siendo n entero. (Hemos aprendido del algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor que si $d=mcd(a,b)$, existen enteros x, y tales que $ax+by=d$)

Cada una de las rectas $ax+by=nd$ están contenidas en el plano π, pero no todas corresponden a un valor entero de z. Para ello tiene que suceder que $cz=-nd$ y por lo tanto $z=-\frac{nd}{c}$.

Como a,b y c son primos entre si, entonces d y c también lo son. Por lo tanto, para que z sea un entero, c tiene que dividir a n. Por lo tanto las rectas de puntos reticulares en el plano π deben ser de la forma $ax+by=cmd$ para cualquier entero m y en ese caso $z=-md$.

La recta $ax+by=d$ es adyacente a $ax+by=0$ en el plano x,y. Si (x_0,y_0) es una solución en números enteros de $ax+by=d$, entonces los múltiplos enteros del vector de componentes (x_0,y_0) determinarán puntos reticulares en cada nivel. Para cada m, los puntos (cmx_0,cmy_0) serán puntos reticulares correspondientes a la retícula tridimensional en el plano π. Por lo tanto el problema reside en encontrar (x_0,y_0), pero esto puede hacerse por un sencillo tanteo. Entonces tenemos el siguiente resultado:

Sea π un plano de ecuación $ax+by+cz=0$ de manera que a,b,c no son todos nulos y tales que $mcd(a,b,c)=1$. Entonces los puntos de la retícula tridimensional que están sobre el plano π tienen por coordenadas $\left(cmx_0+\frac{nb}{d},cmy_0-\frac{na}{d},-md\right)$ siendo $d=mcd(a,b)$, (x_0,y_0) es una solución particular de $ax+by=d$ y n es un entero cualquiera.

Esto se puede escribir así $\left(cmx_0+\frac{nb}{d},cmy_0-\frac{na}{d},-md\right)=m(cx_0,cy_0-d)+n\left(\frac{b}{d},-\frac{a}{d},0\right)$

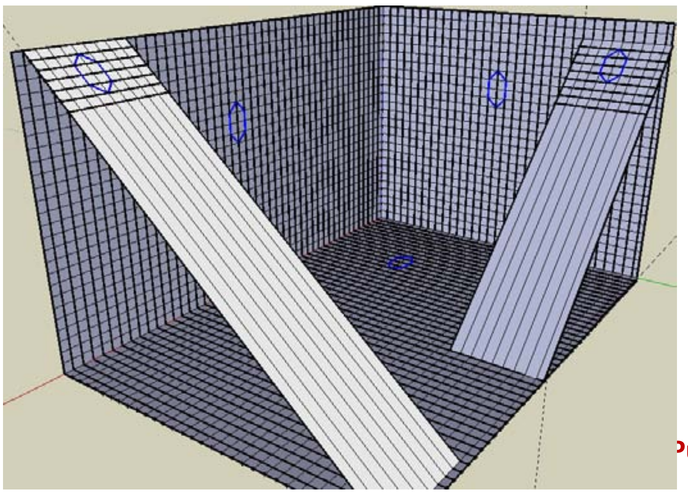
Y los vectores (cx_0,cy_0-d) y $\left(\frac{b}{d},-\frac{a}{d},0\right)$ forman una paralelogramo unidad de la retícula tridimensional en el plano π.

EL área de este paralelogramo es el módulo de $(cx_0,cy_0-d)x\left(\frac{b}{d},-\frac{a}{d},0\right)=(-a,-b,-c)$

; es decir $U=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Y ahora ya estamos en condiciones de generalizar el teorema de Pick a un plano contenido en el espacio.

Teorema de Pick en un plano contenido en el espacio



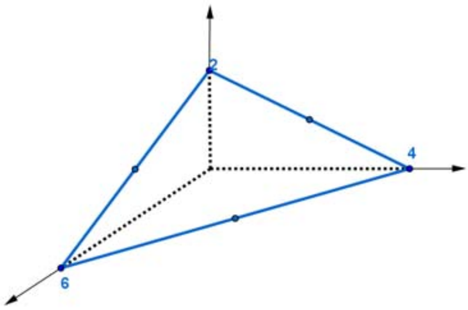
Supongamos que P es un polígono cuyos vértices son puntos reticulares en el espacio que están contenidos en el plano $ax+by+cz=0$, de manera que a,b,c no son todos nulos y tales que $mcd(a,b,c)=1$. Si B es el número de puntos reticulares del borde de P, I es el número de puntos reticulares del interior de P, entonces el área de P es

$$A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(I+\frac{B}{2}-1\right)$$

Ejemplo:

Consideramos el plano de ecuación $2x+3y+6z=0$;(paralelo al plano $2x+3y+6z=12$) . Como $mcd(2,3)=1$, la ecuación $2x+3y=1$ tiene solución en números enteros, por ejemplo la solución particular $(-1,1)$

Los vectores que forman el paralelogramo base son $(-6,6,-1)$ y $(3,-2,0)$ y el área de este paralelogramo unidad es 7 .



Entonces el área del triángulo determinado por los puntos $A=(6,0,0)$, $B(0,4,0)$ y $C(0,0,2)$ será $A=7\left(0+\frac{6}{2}-1\right)=14$, porque no tiene ningún punto reticular en el interior y hay 6 puntos reticulares en el borde.

Realmente en este ejemplo encontrar I es más complicado que encontrar A porque el polígono P es un triángulo.

Sin embargo vamos a explorar un poco más esta fórmula:

Consideramos el plano $ax+by+cz=0$, de manera que a,b,c no son todos nulos y tales que $mcd(a,b,c)=1$, sabemos que el área de un paralelogramo unidad es $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Si proyectamos los vectores que forman la retícula sobre el plano x,y tenemos los vectores $(cx_0,cy_0,0)$ y $\left(\frac{b}{d},-\frac{a}{d},0\right)$, y si consideramos la retícula que determinan estos vectores, el paralelogramo unidad tiene por área el módulo del vector:

$$\left(0,0,-\frac{cax_0}{d}-\frac{cby_0}{d}\right)=-\frac{c}{d}\left(0,0,ax_0+by_0\right)=-\frac{c}{d}(0,0,d)=-c\left(0,0,1\right)$$; es decir $|c|$

Si llamamos A_{xy} al área del polígono proyección de P sobre el plano xy, tendremos que:

$$\frac{A}{A_{xy}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|c|}$$

Análogamente se tendrá que $\frac{A}{A_{xz}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|b|}$ y $\frac{A}{A_{yz}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|a|}$ siendo A_{xz} y A_{yz} las proyecciones de P sobre los planos xz y yz.

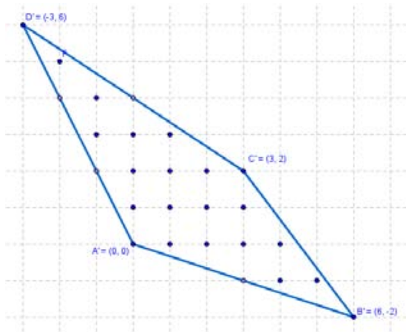
Es decir: $A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\frac{A_{xy}}{|c|}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\frac{A_{xz}}{|b|}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\frac{A_{yz}}{|a|}$ y teniendo en cuenta esto se obtiene que :

$$A^2=A_{xy}^2+A_{yz}^2+A_{xz}^2$$

Sorprendentemente podemos encontrar el área A de otra manera:

Consideremos el cuadrilátero cuyos vértices son $A=(0,0,0)$, $B=(6,-2,-1)$, $C=(3,2,-2)$ y $D=(-3,6,-2)$ que está sobre el plano $2x+3y+6z=0$.

Proyectando este cuadrilátero sobre el plano xy nos da un cuadrilátero cuyos vértices son $A'=(0,0)$, $B'=(6,-2)$, $C'=(3,2)$ y $D'=(-3,6)$, en esta figura es fácil ver que en el interior hay 18 puntos y en la frontera 8, por lo que $A_{xy}=21$



Por lo que: $A=\sqrt{2^2+3^2+6^2}\cdot\frac{21}{6}=\frac{49}{2}$

Y además , como $\frac{21}{6}=\frac{A_{xz}}{3}=\frac{A_{yz}}{2}$ podemos saber que $A_{xz}=\frac{21}{2}$ y que $A_{yz}=7$ Ahora también podemos utilizar este resultado para contar los puntos que están en el interior del polígono, de la fórmula de Pick tenemos que $\frac{49}{2}=7\left(I+\frac{B}{2}-1\right)$, es decir $9=2I+B$, el número de puntos que hay en el borde es fácil de encontrar: en este caso formamos los vectores que determinan los lados del cuadrilátero: $AB=(6,-2,1)$; $BC=(-3,4,-1)$, $CD=(-6,4,0)=2(-3,2,0)$ y $DA=(3,-6,2)$; tres de ellos tienen sus componentes primos entre si y en uno de ellos el $mcd(-6,4)=2$, por lo tanto $B=5$ hay 5 puntos en el borde, así que $I=2$

Es decir, podemos calcular el área del polígono P sin más que conocer el área de su proyección sobre el plano xy y utilizar la fórmula de Pick para calcular los puntos reticulares que hay en el interior del polígono.

CONCLUSIONES:

A partir de un problema, aparentemente fácil hemos explorado un mundo reticular y hemos encontrado una manera de utilizar el teorema de Pick para calcular el área de un polígono simple reticular contenido en un plano en el espacio.

Nos gustaría haber desarrollado también la fórmula de Pick para un polígono cualquiera! Y relacionarla con la fórmula de Euler, pero……

BIBLIOGRAFÍA:

Gardiner: Mathematical Puzzling. Dover

Daniel J. O'loughlin en Mathematics Magazine vol75, nº1 febrero 2002

W. Sierpinski: A selection of Problems in the THEORY OF NUMBERS. Pergamon Press

Howard Iseri Mathematics Magazine Vol81, nº2 Abril 2008

http://mathworld.wolfram.com