

# Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

**Cuarta Edición, 2009/2010**

**TRABAJO:** Algunos patrones de  
formación de mosaicos en el espacio

***GANADOR EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.***

**AUTORES:**

- o Lorena Caballero Sánchez
- o Jenner Patricio Feijoó Valarezo
- o Óscar García de Marina
- o Gonzalo Pérez Alonso
- o Laura Sanz Pulido

**TUTOR:**

- o José Luís Mira Peidro

**CENTRO:** IES Las Canteras (Collado Villalba, Madrid)

**AUTÓNOMA 40 años**



# **ALGUNOS PATRONES DE FORMACIÓN DE MOSAICOS EN EL ESPACIO**

**Autores: DELTA**

**Categoría 3º y 4º E.S.O.**

Cuarta edición de los premios de matemáticas para estudiantes de secundaria.

Departamento de Matemáticas de la U.A.M

# 1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Un mosaico, desde el punto de vista de las matemáticas, es un recubrimiento de un plano o un espacio mediante piezas que no se superponen ni dejan huecos.

Los mosaicos en el plano han sido estudiados por varios matemáticos y artistas, entre los que destacamos a Fedorov, Escher y Penrose.

Observando la formación de mosaicos en el plano, nos hemos preguntado si es posible formar mosaicos en el espacio. Existen muy pocas obras que traten este asunto, que nos ha parecido muy interesante, sobre todo por las aplicaciones que podría tener en arquitectura.

La pieza básica de formación del mosaico en el plano es el polígono; en el espacio es el poliedro.

Si intentamos recubrir un plano con polígonos iguales y regulares, es fácil demostrar que sólo podemos hacerlo con tres de ellos: triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos. Todos estos cumplen la condición de que sus ángulos dividen de forma exacta los  $360^\circ$  de la circunferencia.

Hemos querido estudiar las condiciones y reglas de formación de mosaicos en el espacio enfocando el problema de la siguiente manera. En primer lugar, ver qué poliedros son capaces de formar mosaicos. Dado que hay infinitos poliedros, nos ha parecido un buen método comenzar por los poliedros regulares, o sólidos platónicos.

## 2. OBJETIVOS

### Rellenar el espacio sin dejar huecos

Intentar rellenar el espacio con figuras geométricas es un problema, ya que no todas valen para ello. En la mayoría de los casos quedarán espacios. Sin embargo, podemos rellenar el espacio con algunos poliedros sin dejar huecos. Nuestro objetivo en este trabajo será estudiar la formación de mosaicos en el espacio, utilizando el tetraedro, el cubo y el octaedro. Mediante transformaciones del cubo consideraremos también el poliedro de Kelvin y el rombododecaedro (ambos poliedros semirregulares). Para estudiar la formación demostraremos, en la medida de nuestras posibilidades, el encaje o imposibilidad de encaje de poliedros para constituir formar mosaicos.

### Rellenar el espacio con teselas mínimas de máxima regularidad

También examinaremos la posibilidad de formación de teselas mínimas descomponiendo esos cuerpos en pirámides rectas. Se estudiarán las características de estas teselas, entre las que se encontrarán sus volúmenes, que se compararán con los volúmenes de los poliedros a partir de los que se obtienen.

### Obtener los patrones de formación de mosaicos en el espacio

Asimismo obtendremos conclusiones sobre el autorrelleno y la formación de mosaicos y, por último, tras una clasificación de todas las teselas encontradas, llegaremos a unas pautas para la construcción de mosaicos espaciales.

## 3. DEFINICIONES Y CONCEPTOS

Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por caras poligonales, planas, que encierran un volumen. Un poliedro se llama cóncavo cuando el plano que contiene a alguna de sus caras parte al poliedro en dos trozos, por el contrario un poliedro es convexo.

Tesela (del latín *tessella*) es una pieza para la formación del mosaico. Así como las teselas para la formación de mosaicos en el plano son polígonos, las que forman mosaicos espaciales serán poliedros. Llamaremos tesela regular a cualquier poliedro regular en el mosaico y tesela semirregular a la consistente en un poliedro semirregular (el poliedro convexo en el que todas las caras son polígonos regulares de más de un tipo y las caras de diferentes tipo se arreglan de la misma manera alrededor de cada vértice)

Llamaremos mosaico espacial regular a la composición formada por un solo tipo de tesela (regular o semiregular) y mosaico espacial semiregular a la composición formada por dos o más tipos de teselas (regulares o semiregulares).

## 4. ESTUDIO Y RESULTADOS

### Cómo se rellenan el plano y el espacio.

Hay tres polígonos regulares que rellenan el plano formando mosaicos (el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular). La condición necesaria es que la suma de sus ángulos internos sea  $360^\circ$ .

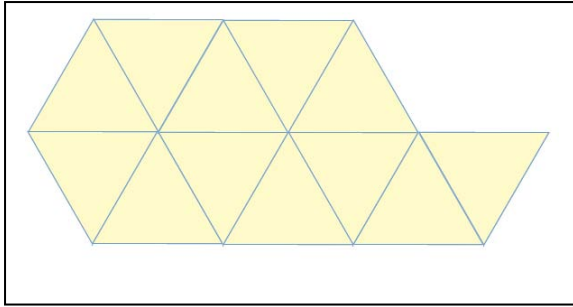


Fig. 1. El triángulo equilátero forma mosaicos.

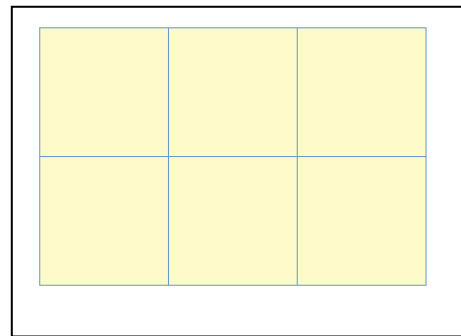


Fig. 2. El cuadrado forma mosaicos.

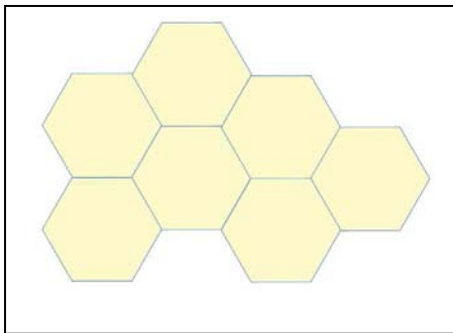


Fig. 3. El hexágono regular forma mosaicos.

Existen varios poliedros que, solos, o combinados con otros, pueden rellenan el espacio. La condición necesaria para que un poliedro regular rellene el espacio es que los ángulos diedros formados por las caras dividan de forma exacta a  $360^\circ$ . Sólo el cubo cumple esta condición, como veremos más adelante.

### 4.1 EL TETRAEDRO NO RELLENA EL ESPACIO

Veremos en primer lugar algunas características importantes de este poliedro que nos ayudarán en cálculos posteriores. Consideraremos que las caras del tetraedro tienen un lado de 1 u. de longitud

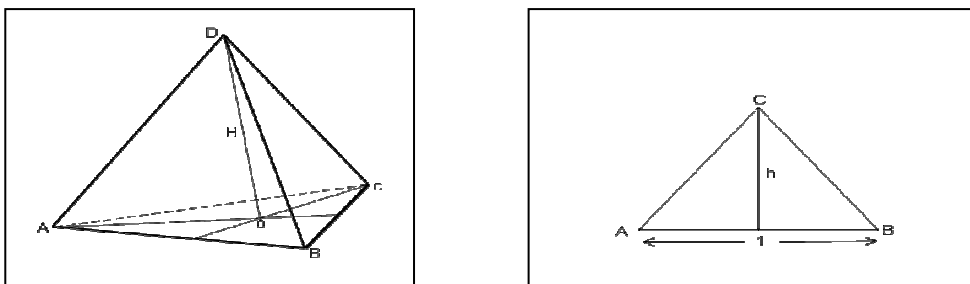


Figura 4. Tetraedro y su base

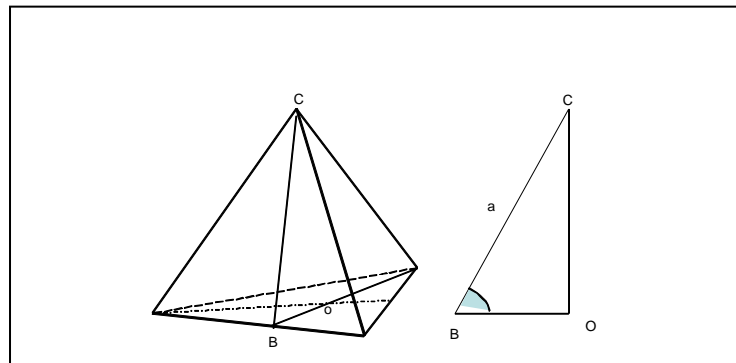
### Volumen

$h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . El área del triángulo ABC es  $A = \frac{1}{2} \left( 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} u^2$ , ya que, en el triángulo

AOB, AO es  $\frac{2}{3}$  de h, por ser O el baricentro. Es decir  $H = \sqrt{\frac{2}{3}}$ . El volumen del tetraedro será

$$V = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} u^3$$

### Cálculo del ángulo diedro de un tetraedro:



**Fig. 5. Cálculo del ángulo diedro del tetraedro.**

H: es la altura de tetraedro y  $a$  su apotema lateral.

O es el baricentro, punto donde se cortan las medianas de la base. Ese punto tiene la propiedad de dividir a la mediana en dos segmentos, que miden  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{3}$  de su longitud.

Ya sabemos que la altura del triángulo de la base mide  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

El segmento OB mide  $OB = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ , dado que, por tener un extremo en O (punto de corte de las medianas) y el otro en B, mide  $\frac{1}{3}$  de la altura del triángulo de la base

La apotema lateral  $a$  es igual a la altura del triángulo de la base, dado que todas las caras son iguales.

Por tanto tenemos  $\cos \hat{B} = \frac{OB}{a} = \frac{1}{3}$  y  $\arcs \frac{1}{3} \approx 70,53^\circ$ , que no es un divisor de  $360^\circ$

Juntando 5 tetraedros de la impresión de que se rellena el espacio ya que la suma de sus ángulos diedros es casi  $360^\circ$ ; pero no llega a alcanzarlos. Por lo tanto, el tetraedro no rellena el espacio.

## **4.2 EL CUBO RELLENA EL ESPACIO**

Para poder verificar esta afirmación hemos de recurrir al plano. En él podemos decir que se puede crear una estructura formada por cuadrados, es decir; un mosaico formado por cuadrados. En el espacio, el poliedro regular cuyas caras son cuadradas es el cubo. Por tanto el cubo rellena al espacio formando un mosaico regular en 3D.

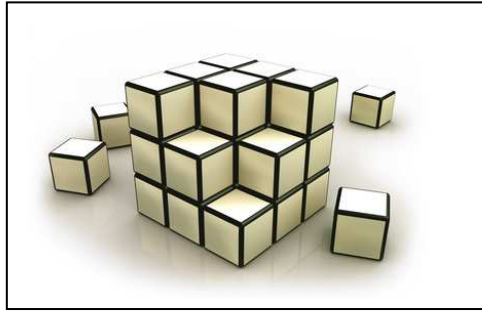


Figura 6. Mosaico espacial formado por el cubo.

### ***4.3 EL POLIEDRO DE KELVIN (OCTAEDRO TRUNCADO) RELLENA EL ESPACIO***

La siguiente figura nos muestra un poliedro de Kelvin.

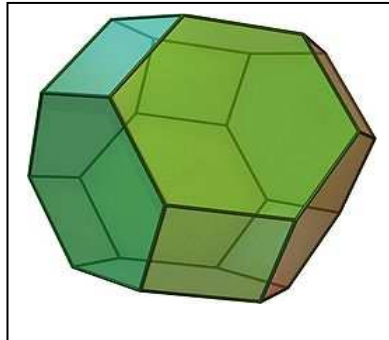


Fig 7. Poliedro de Kelvin

Podemos considerar un mosaico de cubos y un cubo mayor formado por ocho pequeños. Este circunscribirá un poliedro de Kelvin. Todos los cubos pequeños forman una malla que contiene el mosaico de poliedros.



Figura. 8. Poliedro de Kelvin llenando el espacio

#### 4.4 EL ROMBODODECAEDRO RELLENA EL ESPACIO

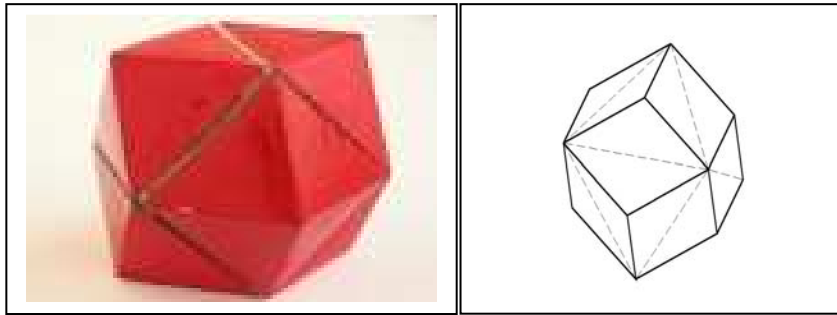


Fig. 9. Rombododecaedro como cubo transformado

Podemos observar que el rombododecaedro rellena el espacio considerando que, como se muestra en la figura 10, el incremento del cubo con una pirámide que tiene como base la cara izquierda del cubo y como vértice el punto donde se cortan las diagonales del cubo adyacente (pirámide en rojo) y la pirámide correspondiente a la cara derecha de otro cubo (pirámide en azul) dejan 4 huecos piramidales que se ocuparán por otras tantas pirámides con las que se han incrementado los cubos adyacentes. La figura 11 muestra un relleno parcial con rombododecaedros.

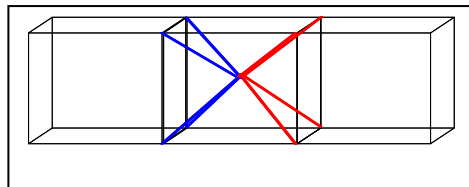


Figura. 10. El rombododecaedro puede rellenar el espacio

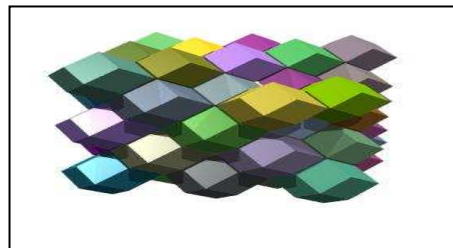


Fig. 11. Rombododecaedro llenando el espacio

#### 4.5 EL OCTAEDRO NO RELLENA EL ESPACIO

Veremos en primer lugar algunas características importantes de este poliedro que nos ayudarán en cálculos posteriores.

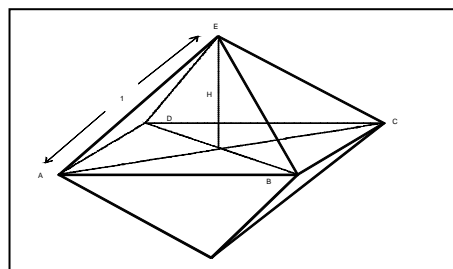


Fig 12. Octaedro

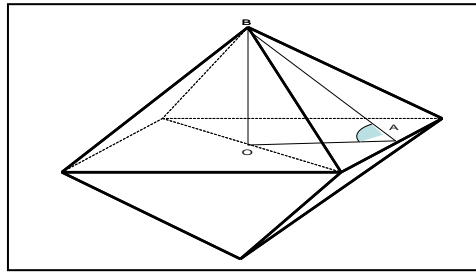
### Volumen

Consideraremos que las caras del octaedro tienen un lado de 1 u. de longitud. La diagonal del cuadrado

cuyos lados son el "ecuador" del octaedro es  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .  $H = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  El volumen de la pirámide

ABCDE es  $V = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} u^3$ . El volumen del octaedro es  $2V = \frac{\sqrt{2}}{3} u^3$

### Cálculo del ángulo diedro de un octaedro:



**Fig. 13. Cálculo de ángulo diedro en el octaedro.**

El ángulo A es  $\arctg \frac{OB}{OA} = \arctg \sqrt{2} \approx 54.74$ . Por lo tanto, el octaedro no rellena el espacio.

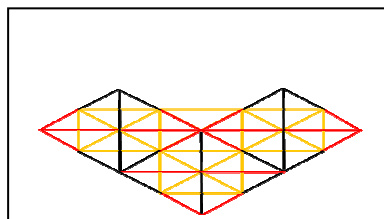
## **4.6 EL OCTAEDRO Y EL TETRAEDRO PUEDEN RELLENAR EL ESPACIO**

Es posible combinar octaedro y tetraedros para rellenar el espacio. Esto lo haremos rodeando un octaedro por 8 tetraedros, tal como se muestra en la siguiente figura. Se obtiene un poliedro convexo que llamaremos octaedro estrellado.



**Figura 14. Octaedro estrellado**

La formación del mosaico puede entenderse con más facilidad con la siguiente figura, en la que aparecen tres octaedros estrellados vistos con una visual perpendicular a los cuadrados que forma el poliedro. Las diagonales del cuadrado tienen el mismo color que los correspondiente segmentos en la figura 14, para mayor claridad.



**Fig.15. Ilustración de parte del mosaico formado con el octaedro estrellado.**



## Imposibilidad de rellenar el octaedro con tetraedros

Un octaedro, según los volúmenes calculados más arriba, contiene un número entero de tetraedros. En

$$\text{efecto } \frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{\sqrt{2}}{12} = 4$$

Esto podría llevarnos a pensar que el octaedro puede ser rellenado por 4 tetraedros (sin dejar huecos ni presentar superposiciones). De hecho el que un cuerpo A contenga un número entero de cuerpos B es una condición necesaria para que A sea rellenado por B. Sin embargo, no es una condición suficiente, como vemos con el caso octaedro-tetraedro.

Supongamos que el octaedro de arista 1 u. fuera rellenado por tetraedros de arista 1 u. Entonces 4 tetraedros lo rellenarían. Por otra parte, dado que el octaedro tiene 8 caras, se necesitarían 8 tetraedros, con lo que llegamos a una contradicción que nos demuestra que nuestra suposición es incorrecta.

Basándonos en lo anterior podemos, adicionalmente, dar una demostración alternativa de que el tetraedro no rellena el espacio. Dado que el tetraedro no rellena el octaedro, no rellena el espacio octaedral rodeado por cuatro tetraedros (nuestro octaedro semiestrellado) que, como veremos más adelante es un tetraedro, es decir, el tetraedro no se rellena a sí mismo y, por tanto, no puede usarse como tesela para formar un mosaico espacial regular.

## **4.7 RELLENO DEL ESPACIO MEDIANTE LA COMBINACIÓN DE OCTAEDROS SEMIESTRELLADOS**

El mosaico lo forman dos teselas regulares: el octaedro y el tetraedro.

Supongamos que la arista de los polígonos básicos (aquellos con los que comienza la construcción) mide 1 u.

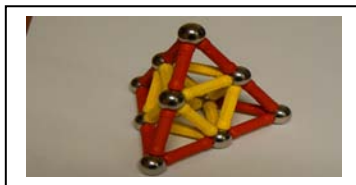
Podemos rodear el octaedro por cuatro tetraedros, formando un nuevo tetraedro de arista 2 u., semejante al tetraedro básico y, por tanto, con volumen  $2^3$  veces el de éste. Esto puede comprobarse de

otra forma teniendo en cuenta que el volumen del octaedro básico es  $V_o = \frac{\sqrt{2}}{3}$  y el del tetraedro básico

es  $V_t = \frac{\sqrt{2}}{12}$ , como ya hemos visto. El volumen del nuevo tetraedro será

$$V = 4V_t + V_o = 4 \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3} \sqrt{2}. \text{ La razón de los volúmenes es } V/V_t = \frac{\frac{2}{3} \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{12}} = 8. \text{ La figura siguiente}$$

muestra la disposición del octaedro y los tetraedros que lo rodean. Denominaremos a esta construcción *octaedro semiestrellado*



**Fig. 16. Octaedro semiestrellado.**

Cuatro tetraedros de volumen  $V$  pueden, a su vez, rodear a un octaedro de volumen  $4V$ , con lo que se obtendrá un nuevo tetraedro de arista  $4u$  y volumen  $8v$ . Así es posible ir formando tetraedros cada vez mayores. La siguiente tabla muestra las dimensiones de los sucesivos tetraedros y octaedros.

Arista del octaedro	Volumen del tetraedro formado	Volumen del octaedro rodeado
1	$V_t$	$4 V_t$
2	$8V_t$	$32 V_t$
4	$64V_t$	$256 V_t$
8	$512 V_t$	...
...	...	...

El mosaico está formado por tanto por tetraedros de arista  $1u$  y volumen  $V_t = \frac{\sqrt{2}}{12} u^3$  y por octaedros de aristas en progresión geométrica de razón 2: 1, 2, 4, 8, 16, ..., y volúmenes en progresión geométrica de razón 8:  $4V_t$ ,  $32V_t$ ,  $256V_t$ .

Como curiosidad, cabe apuntar que, tomando como  $a_1 = 8 V_t$  y arista del tetraedro  $1 \text{ cm}$ , en el término nº 31 de la progresión, el volumen del tetraedro supera el volumen de la esfera de la Tierra. En efecto,

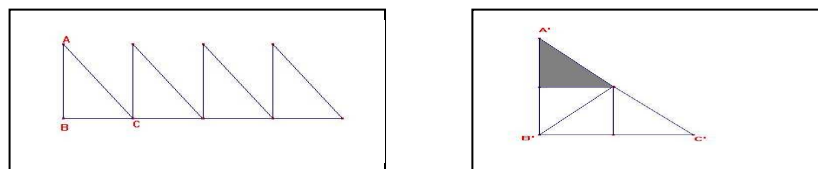
$$8 \cdot 8^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 10^{-6} m^3 > 1,0832073 \cdot 10^{21} m^3 \rightarrow n > 31$$

#### 4.8 AUTO-RELLENO

Nos hemos preguntado si las teselas que hemos encontrado presentan la propiedad de auto-relleno, es decir si dada una tesela, esta puede rellenarse a sí misma con teselas semejantes. Para ello hemos comenzado considerando polígonos.

Si un polígono se rellena a sí mismo entonces contiene un número entero de polígonos semejantes a él. El recíproco no es cierto.

Para ilustrar esto hemos considerado dos polígonos: un triángulo equilátero y un triángulo rectángulo. El triángulo equilátero contiene un número entero de superficies de triángulos equiláteros que lo rellenan, como puede verse en la siguiente figura.



**Fig. 17. Triángulo rectángulo dividido en 4 triángulos rectángulos más pequeños.**

Veamos ahora un triángulo rectángulo ABC con lados de longitudes 3, 4 y 5 u. Construyamos un triángulo semejante  $A'B'C'$ , con lados de longitudes 6, 8 y 10 u.

El área del triángulo ABC es  $A_1 = 3 \cdot 4 = 12 u^2$ . El área del triángulo A'B'C' es  $A_2 = 6 \cdot 8 = 48 u^2$ . Evidentemente la superficie del triángulo A'B'C' puede dividirse de forma exacta por la superficie del triángulo ABC, dando 4 como resultado; es decir, las áreas de 4 triángulos ABC completan el área del triángulo A'B'C'. El triángulo ABC rellena el triángulo A'B'C'.

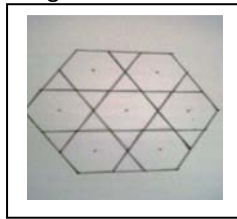
Podría pensarse que todo polígono puede descomponerse en un número entero de polígonos semejantes, que lo rellenan. Pero la geometría nos da sorpresas. Veamos un contraejemplo.

Consideremos un hexágono regular (ya sabemos que es una tesela regular de un mosaico regular) de

lado 1 y área  $A_1 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} u^2$ . El hexágono regular de lado 3 u tiene un área

$A_2 = 3^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} u^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2} \sqrt{3} u^2$ . ¿Es posible rellenar el hexágono mayor con 9 hexágonos

menores? La siguiente figura nos indica que es imposible. Por fuerza tenemos que hacer coincidir los ángulos del hexágono mayor con los del menor, lo que conduce a un único tipo de mosaico. Existen 7 hexágonos menores y 12 triángulos equiláteros que, combinados adecuadamente formarían los dos hexágonos menores restantes. La siguiente figura ilustra lo anterior.



**Fig. 18. Imposibilidad de autorrelleno del hexágono regular**

En cuanto a los mosaicos encontrados, diremos, en primer lugar, que el tetraedro no se rellena a sí mismo. Para demostrarlo partiremos de la suposición de la hipótesis contraria: el tetraedro se rellena a sí mismo. Partimos, por ejemplo, de un octaedro de arista 1 u. y consideramos un tetraedro mayor de

arista a. La razón de semejanza de los poliedros es  $r = \frac{a}{1} = a$ . Si el volumen del poliedro de arista 1 u.

es v, el del poliedro mayor será  $a^3 v$ . Es decir, el hipotético tetraedro mayor contendría  $a^3$  tetraedros de arista 1 u. Pero entonces, podemos considerar un nuevo tetraedro mayor que el de volumen  $a^3 v$ , que sería rellenado por tetraedros de este tipo, etc., con lo que el espacio podría ser rellenado con teselas en forma de tetraedro. Esto es algo que hemos visto que no sucede, por lo que nuestra hipótesis es falsa y el tetraedro no se rellena a sí mismo. De forma análoga podemos razonar para demostrar que el octaedro no se rellena a sí mismo.

El poliedro de Kelvin no se rellena a sí mismo, dado que, sea cual sea el número de poliedros de este tipo que añadamos, las superficies que delimitan el cuerpo que se va construyendo, no forman las figuras planas necesarias para constituir un poliedro de Kelvin. Se obtiene un poliedro cóncavo.

Tampoco podemos encontrar la propiedad de auto-relleno en el rombododecaedro, como puede observarse en la figura 11, en la que, al igual que en el caso del poliedro de Kelvin, obtenemos un poliedro cóncavo.

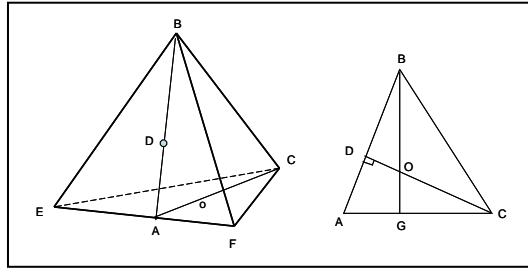
Podemos observar, por último, que el cubo se rellena a sí mismo. Partiendo de un cubo base de

volumen V, de arista a, podemos rellenarlo con  $a^3$  cubos de volumen  $\frac{V}{a^3}$ . Nos parece que esta

propiedad, junto con la propiedad de rellenar el espacio, que son caras de la misma moneda, ha sido esencial para tomar como unidad de volumen la unidad cúbica.

## 4.9 DESCOMPOSICIÓN DE LAS TESELAS EN PIRÁMIDES RECTAS

El tetraedro puede descomponerse en pirámides rectas



**figura 19. Tetraedro que se descompone en pirámides.**

Cálculo de la altura de la pirámide recta

Consideremos el triángulo BAC. Su altura es la del tetraedro.  $AC = AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$  (apotema lateral del

tetraedro). D es el baricentro de EBF, por tanto  $BD = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

DC es la altura del tetraedro, por tanto  $DC = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Las alturas BG y DC son iguales por ser iguales las bases para una única área de BAC

$BG = DC = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . Los ángulos ABG y DCA son iguales, ya que los triángulos DCA y ABG lo son. Por tanto, los triángulos BDO y CDA son semejantes, Es decir:

$$\frac{DB}{DO} = \frac{DC}{DA} \rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{DO} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} \rightarrow DO = \frac{\sqrt{6}}{12} \text{ que es la altura de la pirámide recta.}$$

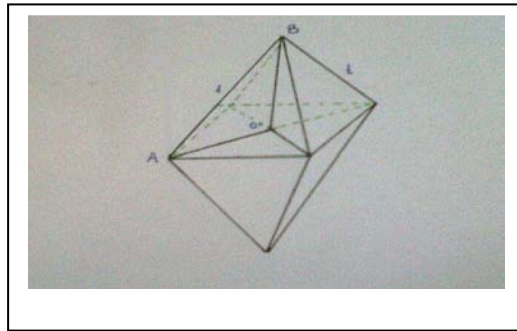
Volumen de las pirámides rectas

$$\text{El área de } m \text{ base es } S = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} u^2. \text{ Es decir } V = \frac{S \cdot DO}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{12}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{48} u^3$$

El volumen de 4 pirámides es  $\frac{4 \cdot \sqrt{2}}{48} = \frac{\sqrt{2}}{12} u^3$ , que es el volumen del tetraedro.

El octaedro puede descomponerse en pirámides rectas

Consideraremos pa posibilidar de formar pirámides rectas con bases en las caras y vértice en el centro de simetría del octaedro.



**Fig. 20 Octaedro que se descompone en pirámides**

$OA = \frac{\sqrt{2}}{2}$  por ser la mitad de la diagonal de un cuadrado de lado 1

$OB = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . La pirámide tiene un volumen de  $\frac{1}{8} V$ .  $V_p = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{24} u^3$

Si llamamos H a la altura de la pirámide, tenemos que  $\frac{\sqrt{2}}{24} = (1 \cdot H) / 3 \rightarrow H = \frac{\sqrt{2}}{8} u$

El cubo puede descomponerse en pirámides rectas.

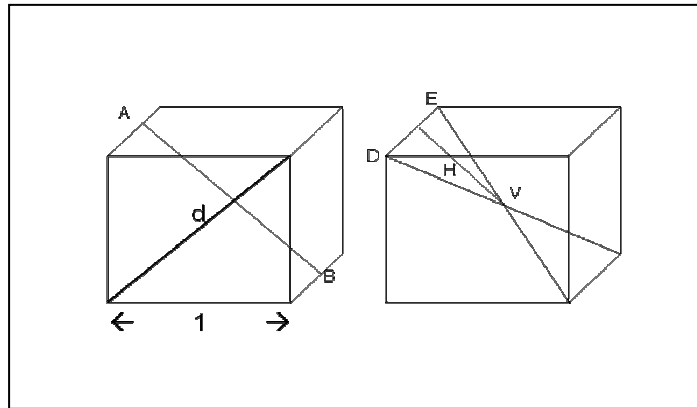
Un cubo es un cuerpo formado por 6 caras cuadradas y en cada vértice convergen 3 aristas perpendiculares. Si la arista  $a$  del cubo mide 1 u:

$V(\text{cubo}) = (1)^3 = 1u$ . Por tanto  $V(\text{cubo}) = a^3$

Si la arista del cubo es  $a$  y el volumen del cubo es  $a^3$ , se formarán 6 pirámides triangulares. Cada una tiene una de las *bases* formada por media cara del cubo, y la *altura* correspondiente es la arista del mismo. Por tanto las seis pirámides tienen el mismo volumen. El volumen de una de las pirámides será la sexta parte del volumen del cubo.

Volumen de las piramides =  $\frac{a^3}{6} u^3$

El rombododecaedro puede descomponerse en pirámides rectas



**Fig. 21. Ilustración para el cálculo de las pirámides en las que se descompone el rombododecaedro.**

*Altura de la pirámide de base romboidal (una de las caras del rombododecaedro)*

H es la mitad de la diagonal d, ya que el vértice de la pirámide será V, y V es el punto medio del segmento AB.  $H = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

*Base de la pirámide*

Es el doble del área del triángulo DVE. Su altura, al igual que H es  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Por tanto:

$$S = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} u^2$$

*Volumen de la pirámide de base romboidal.*

$$V = \frac{S \cdot H}{3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} u^3$$

*Volumen total de las pirámides en las que se descompone el rombododecaedro*

Dado que hay 12 caras en el poliedro, tenemos

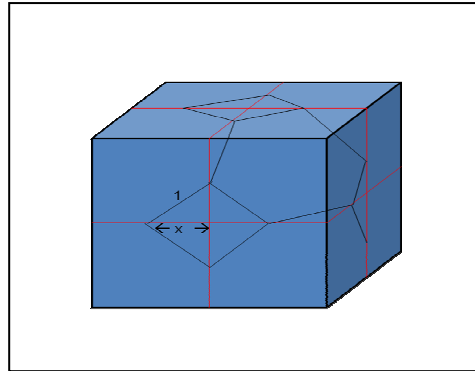
$$V_t = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2 u^3$$

### Volumen del rombododecaedro

El rombododecaedro está formado por el cubo base y 6 pirámides, en las que se descompone éste. Por tanto, el volumen es  $1+1=2$

Cada pirámide es la doceava parte del poliedro

El poliedro de Kelvin puede descomponerse en pirámides rectas



**Fig. 22. Ilustración para el cálculo de las pirámides en las que se descompone el poliedro de Kelvin.**

El poliedro de Kelvin presenta 14 caras regulares: seis cuadrados y seis hexágonos.

Consideremos un poliedro Kelvin cuya arista mide 1u.  $1 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$ , es decir

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El lado del hexaedro es  $l = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ . Su volumen es  $V = (2\sqrt{2})^3 = 8 \cdot 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \text{ u}^3$ . El Volumen del poliedro será  $8\sqrt{2} \text{ u}^3$ , es decir, el poliedro Kelvin tiene un volumen igual a la mitad del hexaedro en el que se inscribe.

*Volumen de la pirámide de base cuadrada y altura la mitad del lado del cubo a partir del cual se obtiene el poliedro.*

$$V = \frac{l^2 \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ u}^3. \text{ El Volumen de 6 pirámides es } \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2} \text{ u}^3$$

*Volumen de la pirámide de base hexagonal*

$$\text{La altura de la pirámide es } \frac{2\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Área del hexágono de perímetro } p=6 \text{ y apotema } a = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} u^2$$

Diagonal del cubo

$$\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

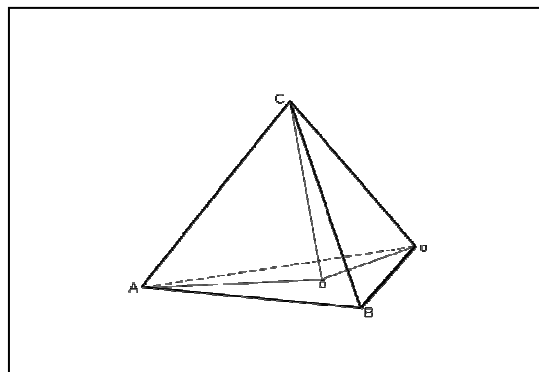
El volumen de la pirámide es  $V = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{18}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} u^3$ , con lo que el volumen de 8 pirámides de base hexagonal será  $\frac{8 \cdot 3\sqrt{2}}{4} = 6\sqrt{2} u^3$

Volumen de 6 pirámides de base cuadrada y 8 de base hexagonal  $2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 8\sqrt{2} u^3$

Por lo tanto con el poliedro Kelvin se pueden crear 6 pirámides de base cuadrada 8 pirámides hexagonales, de forma que sus vértices serán el centro de nuestro poliedro.

El octaedro estrellado no puede descomponerse en pirámides rectas

Partimos de la sección del tetraedro en pirámides, ya considerada, pero ahora se aplicará al tetraedro formado por un octaedro rodeado de cuatro tetraedros (el octaedro semiestrellado.) Dado que el octaedro semiestrellado está formado por dos tipos de poliedro regular: el tetraedro y el octaedro, consideremos primero las secciones que se producen en cada uno de los cuatro tetraedros. Veamos uno de ellos.



**Fig. 23. Secciones piramidales de los tetraedros**

Las caras de las pirámides dividen el tetraedro en tres pirámides, cuyas bases son triángulos isósceles (los que se forman al unir cada vértice de la cara del tetraedro con su baricentro, y cuya altura es la altura del tetraedro. Una de tales pirámides es la ABOC que se presenta en la figura anterior. El

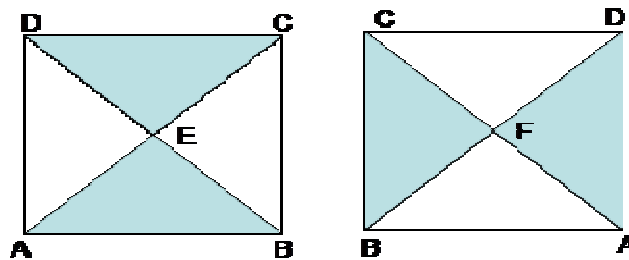
volumen de cada una de estas pirámides es  $\frac{\sqrt{2}}{12} : 3 = \frac{\sqrt{2}}{36} u$ .

Consideremos ahora las secciones del octaedro.

Clasifiquemos las caras de éste en dos tipos: (a) las que no quedan seccionadas por los planos de las caras de las pirámides y (b) las demás. Las siguientes figuras muestran un octaedro y la forma que presenta cuando se observa con una visual perpendicular al cuadrado de su ecuador teniendo a la vista

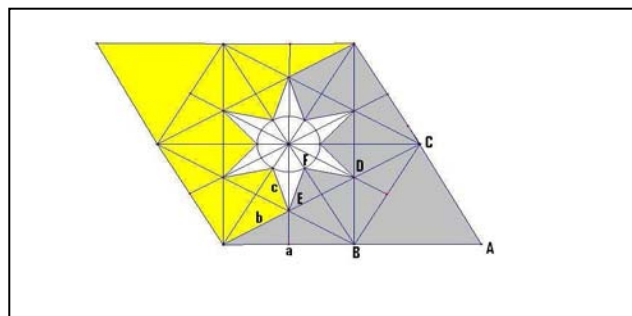


la cara parte superior y la parte inferior. Las caras de tipo (a) se presentan sombreadas, las caras de tipo (b) se presentan sin sombrar.



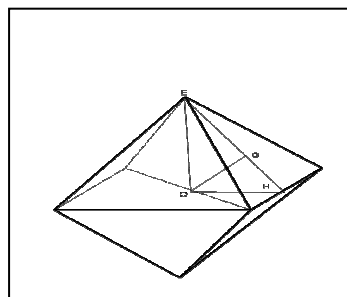
**Fig 24. Ilustración del octaedro para el estudio de la posibilidad de su descomposición en pirámides.**

Cada cara de tipo (a) puede considerarse como la base de un poliedro cuyo desarrollo es el que muestra la parte sombreada en la siguiente figura. Puede observarse que un hexágono regular puede considerarse el polígono básico para construir el desarrollo. El área sombreada en gris y su análoga, en amarillo, formarían dos poliedros.



**Fig 25 Desarrollo del poliedro**

Para el cálculo del valor de las aristas de este poliedro, procederemos de la siguiente forma. El poliedro es un heptaedro con tres tipos de caras: un triángulo equilátero ABC en la figura anterior (cara del octaedro regular) un triángulo isósceles BDC y un trapezoide simétrico BDEF (en forma de cometa). La arista  $a$  es el lado del triángulo equilátero (cara del octaedro), que tomaremos como de longitud 1. La arista  $b$  es el segmento que une un vértice del triángulo con su baricentro. La arista  $c$  es el segmento OG en el triángulo EOG



**Fig 26 Ilustración para el cálculo de la arista c del heptaedro**

Para el cálculo de  $c$ , observamos que el ángulo  $OEH = \arctg\left(\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 35,26^\circ$ ,  $OE$  es la altura de la

pirámide que tiene como base cuadrado que forma el ecuador del octaedro y  $EG$  la distancia desde un vértice del triángulo equilátero hasta su baricentro. Por tanto, aplicando el teorema del coseno tenemos

$$OG = \sqrt{EG^2 + OE^2 - 2 \cdot EG \cdot OE \cdot \cos 35,26} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{6} \cos 35,26} \approx 0.4082 \text{ u.}$$

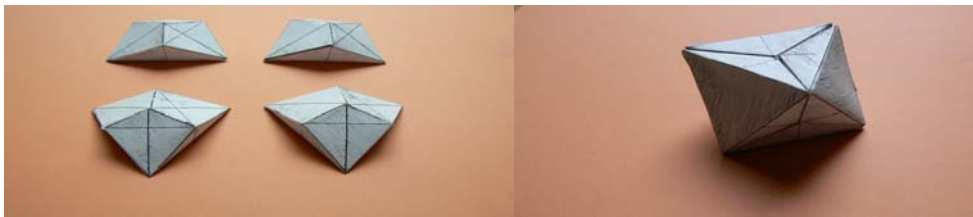
El volumen de cada poliedro es la cuarta parte del volumen del octaedro, por tanto

$$V = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} u^3$$

En resumen, la sección del octaedro semiestrellado por pirámides con bases en las caras del tetraedro compuesto resulta en 12 pirámides de base triangular isósceles, con volumen  $\frac{\sqrt{2}}{36} u^3$ . y en cuatro

heptáedros de volumen  $\frac{\sqrt{2}}{12} u^3$ .

Las siguientes figuras muestran los heptaedros y su encaje para la formación del octaedro.



**Fig 27. Heptaedros que forman el octaedro**

#### 4.10. CLASIFICACIÓN DE LAS TESELAS ENCONTRADAS

tesela	Tipo de poliedro	Volumen en $u^3$	autorrelleno	Rellena el espacio	Es sección de la tesela	Razón de volúmenes tesela/sección
CUBO	Regular	1	sí	Sí	n.a.	n.a.
TETRAEDRO	Regular	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	no	No	Octaedros semiestrellado y estrellado	8 y 12
OCTAEDRO	Regular	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	no	No	Octaedros semiestrellado y estrellado	2 y 3
ROMBODODECAEDRO	No regular	2	no	Sí	n.a.	n.a.
POLIEDRO DE KELVIN	No regular	$8\sqrt{2}$	no	Sí	cubo	2
OCTAEDRO SEMIESTRELLADO	No regular. Cóncavo	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	no	Sí (autosimilarmente)	n.a.	n.a.
OCTAEDRO ESTRELLADO	No regular. Cóncavo	$\sqrt{2}$	no	sí	n.a.	n.a.
Pirámide (1) de base triangular equilátera	No regular	$\frac{\sqrt{2}}{48}$	no	No	tetraedro	4
Pirámide (2) de base triangular equilátera	No regular	$\frac{\sqrt{2}}{24}$	no	No	octaedro	8
Pirámide (3) de base cuadrada	No regular	$\frac{1}{6}$	no	Sí	cubo	6
Pirámide (4) de base cuadrada	No regular	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	no	No	Poliedro de Kelvin	4
Pirámide (5) de base romboidal	No regular	$\frac{1}{6}$	no	sí	rombododecaedro	12
Pirámide (6) de base hexagonal	No regular	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	no	no	Poliedro de Kelvin	$\frac{32}{3}$
Pirámide (7) de base triangular isósceles	No regular	$\frac{\sqrt{2}}{36}$	no	No	tetraedro	3
Heptaedro	No regular	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	no	no	octaedro	4

## 5. CONCLUSIONES

1. De todos los regulares estudiados (cubo, tetraedro y octaedro) sólo el cubo puede rellenar el espacio formando un mosaico regular.
2. La combinación de octaedros y tetraedros puede utilizarse para constituir un mosaico espacial semirregular, si los ensamblamos en forma de octaedro estrellado, y un mosaico espacial autosimilar, si los ensamblamos en forma de octaedro semiestrellado.
3. Transformando el cubo pueden conseguirse dos teselas semirregulares: el poliedro de Kelvin y el rombododecaedro. El procedimiento de transformación para conseguir el poliedro de Kelvin es truncar el cubo, seccionando sus aristas de forma que se consigan hexágonos regulares. El procedimiento de transformación para conseguir el rombododecaedro es *añadir* a cada cara del cubo la pirámide recta cuya base es una cara del cubo y cuyo vértice el punto de intersección de las diagonales del cubo.
4. Las teselas encontradas, tomando como base el tetraedro, el octaedro, el cubo y las dos transformaciones de éste son: el cubo, el octaedro estrellado, el octaedro semiestrellado, el poliedro de Kelvin y el rombododecaedro.
5. Todas las teselas encontradas pueden dividirse en secciones que son pirámides regulares, cuyo bases son las caras de las teselas y cuyo vértice se encuentra en el centro de la tesela. Estas pirámides las consideramos como teselas de mínimas de máxima regularidad. No hemos conseguido encontrar otras piezas más pequeñas que, sin ser triviales (por ejemplo, secciones de un cubo en forma de ortoedros) puedan rellenar el espacio.
6. El octaedro semiestrellado, al ser dividido por pirámides con centro en sus caras y vértice en su centro, produce dos tipos de teselas: pirámides rectas de base triangular equilátera (por la sección de los tetraedros) y heptaedros (por la sección del octaedro).
7. Si un cuerpo rellena a otro éste lo contiene un número entero de veces
8. El recíproco no es cierto, a saber, si un cuerpo es contenido un número entero de veces en otro no necesariamente lo rellena (nos apoyamos para esta afirmación en el caso tetraedro-octaedro).
9. Si un polígono se rellena a sí mismo, entonces rellena el plano formando mosaico. Si un cuerpo se rellena a sí mismo, entonces rellena el espacio formando mosaico. Las afirmaciones recíprocas no son ciertas. Esto lo podemos ver, en el caso del plano, observando que el hexaedro rellena el plano pero no se rellena a sí mismo. En el caso del tres dimensiones, podemos también observar que el poliedro de Kelvin rellena el espacio pero no se rellena a sí mismo.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

La bibliografía está compuesta por una serie de documentos encontrados tanto en libros de texto, artículos especializados, libros de matemáticas e internet:

### Documentos

- (1) Serrentino, Roberto y Borsetti, Ricardo. *Las teselas de Penrose como generadoras de agrupamientos de formas arquitectónicas modulares*. Facultad de Arquitectura y Urbanismo. Universidad Nacional de Tucumán.
- (2) Serrentino, Roberto, Borsetti, Ricardo y Gómez López, César Roberto. *Los teselados periódicos de M.C. Escher*. Sigradi 98.
- (3) Moreno Martín, Juan Carlos. *Triángulos y tetraedros fractales*. Suma 44 (Noviembre 2003)
- (4) Corbalán, Fernando. *La proporción áurea*. RBA Coleccionables S.A. (2010)
- (5) Berenguer, Luis y otros. *Materiales para construir las matemáticas en la E.S.O.* proyecto Sur Ediciones. 2001
- (6) Lección 9, apartado 7 : Frisos y Mosaicos. *Matemáticas 3º ESO*. Serie Trama, proyecto Anafora (Oxford Educación)

### Webs

- (7) <http://sauce.pntic.mec.es/ebac0003/>
- (8) <http://www.terra.es/personal5/922212902/lleñar4.htm>
- (9) <http://cumincades.scix.net/data/works/att/11ed.content.pdf>
- (10) <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo59.pdf>

## 7. ANEXO

### TÉCNICAS UTILIZADAS.

Para el desarrollo del trabajo nos hemos apoyado en fórmulas de geometría que aprendimos en 3º de E.S.O y en otras, especialmente trigonometría, que hemos estamos aprendiendo este curso. Con estas fórmulas hemos podido ver que estábamos en lo cierto (a veces no) en algunas cosas que pensábamos. Hemos tenido que usar construcciones de poliedros para verificar visualmente lo que habíamos deducido con las fórmulas. A veces la demostración de ciertas cosas hemos tenido que hacerla *sólo* visualmente.

### HERRAMIENTAS UTILIZADAS

Las herramientas que hemos usado son principalmente el programa *Derive*, para realizar los cálculos y el programa *Cabri*, para hacer algunos dibujos y comprobar ángulos, etc.

También hemos usado la técnica del recorte y pegado de desarrollo de poliedros, la construcción de poliedros (tetraedros y octaedros) usando papiroflexia, porque nos resultaba más fácil que recortando y pegando desarrollo de poliedros y el juego Geomag, que ha sido fundamental para *visualizar* los octaedros semiestrellado y estrellado.

Por último, cabe decir que, para las ilustraciones hemos usado dibujos hechos por nosotros, o fotografía de los poliedros que construíamos