Suplemento

La hoja volante

Número 8

Ganar al Nim

El caso es que nunca ha estado claro por qué el NIM se llama así. Lo que sí es cierto es que alguien observó un día que si giraba 180^o el nombre se transformaba en WIN, que significa ganar en inglés. Y no nos engañemos, si has entrado a esta página es porque lo único que te interesa es ganar. Ganarás, tranquilo, ganarás... ¡Codicioso!

Estrategia del Nim.

Vamos a explicar la versión normal del juego, que recordamos que es en la que se gana al llevarse la última ficha; la otra versión (se suele conocer como "misère") es en la que se pierde al llevarse la última ficha, es muy común y haremos una reseña sobre ella al final del artículo.

En esta explicación usaremos conceptos acerca del sistema de numeración binario, vamos a suponer que todos sabemos hacer operaciones en este sistema y lo conocemos bien, pero por si acaso, aquí va una referencia que puede ser útil en este sentido: http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_binario.

Si te resulta demasiado aburrida, puedes consultar uno de los capítulos del libro "Cuentos con cuentas" de Miguel de Guzmán, dedicado al Nim, donde se explica cómo pasar un número a base dos del modo más sencillo que existe.

Es más, ahí viene explicada la estrategia del Nim así que podrías ir allí y dejar de leer esto... (¡viva la autopromoción!).

Bueno, suponiendo que sigas leyendo y que ya sepas pasar números a base 2, seguimos con la estrategia para ganar en un juego normal de Nim.

En esta versión, el número clave es el 0. El procedimiento a realizar es contar el número de elementos en cada fila y expresar estos números en binario. Entonces se realiza una "suma especial" que ahora comentaremos y el objetivo es que esta suma dé 0 después de haber realizado nuestro movimiento. Es decir, dada una configuración de fichas, nos interesa devolver al contrario otra configuración tal que al sumar de una forma especial el número de elementos en cada fila dé cero.

Pasemos ahora a explicar el único detalle que (por el momento) ha quedado pendiente: la "suma especial". En un momento veréis que no tiene nada de especial ni de complicada, lo que ocurre es que este término era apropiado para hacer más fácil la lectura de la estrategia. Nuestra "suma especial" de números binarios va a ser el XOR u OR exclusivo (por si acabas de poner cara de espanto, una operación de este tipo supone que una columna que contiene un número impar de unos suma 1 y si contiene un número par de unos, suma 0), dicho de otro modo hacemos una suma normal módulo dos en cada columna.

Esto exige un ejemplo. En nuestro caso teníamos 3 filas con 2 (LA), 4 (HOJA) y 7 (VOLANTE) fichas respectivamente. En binario 010, 100 y 111. Al sumar estos 3 números de la forma rara tenemos un 0 en la primera columna, otro 0 en la segunda y un 1 en la tercera: 001.

De esta forma, calculamos la suma del tablero que recibimos, y miramos (con práctica se hace más rápido) de qué fila debemos quitar fichas para dejar un tablero que sume 0 (obviamente, este cero implica que todas las columnas sumen de esta forma cero, es decir, donde decimos 0 queremos decir 00...0).

Ni que decir tiene que si la suma que obtenemos es 0 deberemos ceder amablemente el turno a nuestro contrario o rezar para que no se sepa la estrategia y no tenga mucha suerte. O perder... O abandonar la partida poniendo una excusa... O robar una ficha sin que nos vea... Bueno, ¡piensa! ¡piensa!

Pero ¿por qué debemos seguir estos pasos para ganar?

Demostración de la estrategia del Nim.

Hay que ver dos cosas:

a) Siempre se puede conseguir un movimiento tal que el tablero final sume cero desde un tablero que no sume cero.

b) Si se tiene un tablero con suma cero, cualquier movimiento que se haga (conforme a las reglas) devuelve un tablero con suma distinta de cero.

Está claro que si esto se cumple siempre, el jugador que reciba un tablero que sume algo distinto de cero podrá empezar la estrategia y continuarla hasta el final (en algún momento el oponente nos dejará fichas en una sóla fila, quizá una, quizá más, y llevándonoslas todas ganaremos). Sin embargo, como hemos dicho, hay tableros en los que esto no ocurre (por ejemplo, dos filas con una ficha cada una). En estos casos más vale que el contrario no conozca la estrategia (y a veces ni eso nos vale, como en el caso que hemos puesto de ejemplo) porque no tendríamos nada que hacer. Ver excusas dos párrafos antes.

Veamos por qué son ciertas estas dos proposiciones: a) Tenemos una suma no nula, por tanto, nuestro número binario resultado de la suma debe tener al menos un uno; nos fijamos en el que está más a la izquierda (digamos que es en la columna correspondiente a la potencia de 2^d, es decir, la $d+1$ empezando por la derecha), y levantamos la vista para buscar una fila tal que en esa posición haya un uno (en la expresión en base dos del tamaño de la fila, se entiende). Está claro que debe haber al menos uno por que si no la suma daría cero. Operaremos con esa fila. La pregunta es ¿siempre podemos quitar de esa fila un número de fichas tal que en todas las columnas tengamos suma 0?

La respuesta es claramente que sí. Basta tener un número suficiente de fichas para poder elegir si en cada posición de esa fila (entre la 1 y la d; en la $d+1$ pondremos un 0 y las posiciones mayores las dejaremos como están) queremos poner un 1 o un 0. Con eso podemos alterar la paridad de todas las columnas desde la d hasta la 1 a nuestro antojo. Olvidándonos de las columnas a la izquierda de la $d+1$ (¡bórralas para este paso porque ya sumaban 0!) en esa fila tenemos al menos 2^d fichas porque su expresión en binario tiene un 1 en la posición $d+1$ (si hay más, esto es, si hay más unos a la derecha de ese, quitamos todas esas fichas). Y sabemos que $2^d = 2^d - 1 + 2^d - 2 + \ldots + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 1$. Eso quiere decir que si quitáramos una ficha más tendríamos un 0 en la posición correspondiente a 2^d y un 1 en todas las posiciones siguientes, desde la que corresponde a 2^d-1 hasta la de 2^0 (desde la d hasta la primera). Ahora basta con que miremos en qué posiciones desde la d a la primera necesitamos ceros y en cuáles unos para tener sumas iguales a 0 en cada columna. Por cada columna, $k+1$, en la que necesitemos un cero quitamos 2^k fichas y ya está.

b) Tenemos un tablero con suma cero. Afirmamos que cualquier movimiento que se haga (conforme a las reglas) devuelve un tablero con suma distinta de cero. Esto es cierto, pues recordemos que la suma da cero si todas las columnas suman cero. Ahora un jugador quita algunas fichas (al menos una) de alguna fila, digamos la fila f. Eso hace que en alguna de las posiciones de la fila f pasemos de tener un 1 a tener un 0 o viceversa (¡si ninguna posición se alterara tendríamos el mismo número!). Como las demás filas no varían, en esa columna pasaremos de tener suma 0 a tener suma 1, que es lo que queríamos probar. Esto no sería verdad si se permitiera quitar fichas de varias filas en un turno porque podríamos “compensar” con las otras filas.

Cuando juguemos a la versión “misère” del juego, la estrategia es exactamente la misma hasta el momento en el que lleguemos a un movimiento que en el juego normal no nos dejaría ninguna fila de tamaño 2 o mayor. En ese caso, el movimiento correcto es dejar un número impar de filas de tamaño 1 (en el juego normal el movimiento correcto sería dejar un número par de filas de tamaño 1).

Turín matemático

Como sabes, en este mes de febrero se han disputado los Juegos Olímpicos de invierno en Turín. Lo que a lo mejor no sabes es que el emblema de los juegos es (más o menos) la silueta de la Mole Antonelliana, el símbolo arquitectónico de la ciudad, dibujada con cristales de hielo blancos y azules que representan la nieve y el cielo. La red de cristal también representa la red de las nuevas tecnologías y el espíritu Olímpico de comunidad. Y lo que seguro que no sabes, a no ser que hayas estado en Turín hace poco (o te lo haya chivado alguien) es que estas navidades en la Mole Antonelliana había unos números luminosos gigantescos. ¿Que qué números eran? El 1, el 1, el 2, el 3, el 5, el 8, el 13, el 21, el 34, el 55, el 89, el 144, el 233, el 377, el 610 y el 987. ¡Sí, lo has adivinado, es la sucesión de Fibonacci! (o al menos todos los términos de la sucesión menores que 1000). Y es que numerosos artistas internacionales se encargaron de iluminar la ciudad de Turín del 6 de noviembre de 2005 al 16 de enero de 2006, dentro de *Luci d'Artista*, iniciativa que celebra su séptima edición. Pedro Balodis estuvo allí y nos ha traído algunas fotos.

Il volo dei numeri, de Mario Merz, decoraba la Mole Antonelliana.

Para ver una foto de Alberto Conte en la que sólo aparecen los números de la sucesión: http://wmy2000.math.jussieu.fr/PB220100.JPG.

En la base de la Mole Antonelliana había también dos ejemplos de anamorfosis (una perspectiva que distorsiona la imagen pero de tal manera que si se ve desde un ángulo concreto o se refleja en un espejo curvo la distorsión desaparece; si quieres saber más pregúntale a Google). Este es el primero.

Y este otro el segundo. Por cierto, ¿os suena de algo? ¡Claro, es el emblema del año mundial de la Física!

En la Via Po podemos ver Palomar, de Giulio Paolini.

Y para terminar el precioso Planetario de Carmelo Giammello, en la Via Roma.

Esperamos que os haya gustado este paseo matemático por Turín.

Agradecemos la colaboración de Pedro Balodis.

El final de Pick

Lo prometido es deuda. Terminamos la demostración del teorema de Pick en la web.

- ¿Ya?

- ¿Qué?

- ¿Qué si ya estamos en la web o esto lo están leyendo también los de la versión impresa?

- No, ya estamos en la web.

- ¿Seguro?

- Que sí, hombre. ¡Cómo se nota que aquí no hay problemas de espacio, que llevamos 6 frases y no hemos dicho nada!

- Y que lo digas.

- Ya te cuento.

- Bueno ¡vale ya, Alejandro! Sigue ¿por dónde íbamos?

- Ya teníamos probado el teorema de Pick para triángulos primitivos y ahora queríamos probarlo para cualquier polígono reticular. Consideramos, por lo tanto, un polígono simple P con p puntos reticulares en su frontera y q en su interior.

- Déjame adivinar, como es un polígono reticular, por el teorema 2, ¡podemos descomponerlo en triángulos primitivos!

- ¡Muy bien! Ahora vamos a demostrar que el número de triángulos primitivos en cualquier partición de P es el mismo.

- ¡Pero si eso ya lo hemos hecho!

- ¡No! ¡Lo hemos hecho sólo para rectángulos, no para cualquier polígono!

- Ah...

- Pero la demostración es análoga.

- Ah...

- A ti te da igual que te echen una bronca o te den la razón, tú siempre contestas lo mismo...

- Ah... Vale, vale, ya lo dejo.

- Bien, suponemos que nuestro polígono P tiene v vértices, luego tenemos p - v puntos reticulares en los lados (sin contar los vértices). Ahora, los ángulos de los triángulos primitivos de una partición contribuyen en los puntos reticulares del polígono con:

1) en los q puntos reticulares interiores: $360^o \cdot \mathrm{q}$

2) en los $\mathrm{p} - \mathrm{v}$ puntos reticulares de la frontera que no son los vértices: $180^o \cdot (\mathrm{p} - \mathrm{v})$

3) en los v vértices: $180^o \cdot (v - 2)$

- Los dos primeros casos los entiendo, son igual que antes, pero ¿por qué el tercero?

- Porque la suma de los ángulos interiores de un v-ágono es $180^o \cdot (v - 2)$.

- ¿Y por qué?

- Bueno, ¿te acuerdas de que en la hoja anterior demostramos que (copy-paste) cualquier polígono simple puede descomponerse en triángulos mediante diagonales que no se cortan y que son interiores al polígono?

- Sí.

- Pues afinando un poco más, podemos probar que cualquier polígono simple de v vértices puede descomponerse en $v - 2$ triángulos mediante diagonales que no se cortan y que son interiores al polígono.

- Ah, y como la suma de los ángulos de un triángulo es 180^o...

- Y como los ángulos de los triángulos de la triangulación cubren exactamente los del polígono. . .

- Pues ya estaría.

- Eso es.

- Pero no está. Porque no lo hemos hecho con cuidado.

- Pero es muy fácil. Procedemos de nuevo por inducción sobre v, vamos a hacer la misma prueba del otro día. Si $v = 3$ entonces se descompone en 1 triángulo, esto es v-2, perfecto. Sea ahora $v > 3$ y supongamos el teorema cierto para cualquier polígono de menos de v vértices. En este polígono, repitiendo textualmente los 3 casos de la hoja anterior, encontramos una diagonal interior que lo parte en 2 polígonos. ¿Y cuántos vértices tiene cada uno de estos polígonos?

- Pues uno de ellos digamos m vértices y el otro... el otro...

- Pues el otro $v - m + 2$ porque los dos polígonos comparten 2 vértices, más concretamente los dos vértices que une la diagonal interior. - ¡Claro! - Cada uno de esos polígonos, al tener menos de v vértices, se triangula por la hipótesis de inducción en $m - 2$ y $v - m$ triángulos respectivamente. En total tenemos: $m - 2 + v - m$ - ¡$v - 2$ triángulos! ¡Toma ya! - Bueno, pues esto ya está. Si hay n triángulos primitivos en la partición de nuestro polígono P, la suma de los ángulos será

$$180^o \cdot n = 360^o \cdot q + 180^o \cdot (p - v) + 180^o \cdot (v - 2)$$

de donde

$$n = 2 \cdot q + p - v + v - 2 = 2 \cdot q + p - 2$$

y dividiendo por 2 tenemos

$$n/2 = q + p/2 - 1$$

- Y como el área de cada uno de los n triángulos primitivos es 1/2 sabemos que el área de P es n/2 y llegamos a

$$\textbf{Área de P} = \mathbf{q} + \mathbf{p/2} - \mathbf{1}.$$

- ¡Muy bien! Pues ya está demostrado el teorema de Pick, no ha sido tan largo.

- Oye, y una pregunta ¿tú cómo te acuerdas del enunciado del teorema? porque después de probarlo yo tengo que consultar el enunciado para no liarme.

- Bueno, una regla mnemotécnica es que pienses que los puntos de la frontera suman la mitad que los del interior. Digamos que si te imaginas los puntos un poco gordos entonces un trozo de punto queda fuera del polígono y otro dentro para los puntos de la frontera, mientras que todo el punto queda dentro para los del interior. ¡Y luego no te olvides de restar uno! Aunque para recordar eso basta con dibujar el triángulo primitivo más fácil que se te ocurra y entonces, como sabes que tiene área 1/2 tendrás que restar 1 para que todo cuadre.

- Anda mira, pues casi ya no se me va a olvidar.

CONTINUARÁ...

Aunque no pensábamos incluir lo siguiente hasta la próxima hoja, y para dar por zanjado el tema, terminamos aquí la demostración de la propiedad 1, lo que nos obligará a escribir algo nuevo para la siguiente hoja. Hay que ser...

Anochece. El viento ulula, los perros ladran, las farolas comienzan a encenderse. Un hombre taciturno camina, al parecer sin rumbo fijo, todo lo recto que el alcohol le permite por las calles de la ciudad. De pronto se detiene ante un portal. Extrae de su bolsillo un manojo de llaves. Tras tirarlas al suelo en tres ocasiones, consigue abrirlo. Sube unas mugrientas escaleras de madera que le dirigen directo a la puerta de su casa. El tipo entra en el piso y tras dar un portazo se tira en el sofá visiblemente abatido. La televisión está encendida, quizá se la dejó o quizá su casera haya vuelto a hacerle una visita. Toma una cerilla, la raspa enérgicamente contra la caja y enciende un cigarrillo. Apenas escucha ya la televisión, que pese a ello permanece encendida "Patricia, de verdad que te veo todos los días, guapa, enhorabuena por el programa...". Poco le importa. ¡Al carajo la tele! Comienza a pensar en lo que ya no podrá hacerse realidad. La gloria individual, una revista seria, los premios internacionales para su publicación ¡todo al carajo! Ya nada podrá ser así, ha perdido los papeles en los que se basaba todo su proyecto. El ruido del teléfono le despierta de su estado de ensoñación. Ring. Ring. Ring...

- ¿Sí? – contesta.

- ¡Hola! ¿Está Matías?

- Sí, soy yo.

- Soy Carlos ¿Qué tal andas?

- Pues mal. Fíjate que ahora que tenía todo listo para escribir mi nueva revista alguien me ha robado mis apuntes. Y del principio y el final me acuerdo, pero de lo del teorema de Pick...

- Pero cómo puede haber gente así... ¡Cómo está el mundo, tío!

- Bueno ¿y para qué llamabas?

- Pues para eso precisamente. Es que el que te los robó perdió casi todas las hojas, creo que todas menos la última, donde salían la demostración de la primera propiedad y unos apéndices... Y los encontré por ahí, por la calle.

- ¡Qué raro! ¿Para qué querría la última hoja?

- No sé, lo mismo para arrancar un trozo y hacer un avión con el resto, hay gente muy rara.

- ¿Cómo?

- Nada, nada...

- ¿Y cómo sabes que eran mis apuntes?

- Ehm.. Hombre, Matías, conozco tu letra.

- ¿Y cómo sabes que en la hoja que falta estaban la demostración de la propiedad 1 y unos apéndices?

- Ehm... Hombre, Matías, porque me he leído las hojas y falta esa demostración, y además hay referencias a los apéndices.

- Ya, ya.

- El caso es que para comprobar si falta… ¿No te acordarás de lo que ponía en la última hoja?

- Claro que me acuerdo.

- ¿Y no podrías venir a contármela?

- ¿Qué? ¿Que vaya a contártela?

- Bueno, venga, nos has pillado... Más que nada es porque ya que hemos tenido la suerte de encontrar esos apuntes tan maravillosamente escritos nos gustaría tener el honor de ponerlos completos en nuestra hoja. Y además estamos dispuestos a readmitirte... ¿Qué me dices? Es una oferta que no puedes rechazar...

Y entonces, el tipo piensa que aquello es una señal. La casualidad ha hecho que los papeles terminen en manos de esos tarugos por algún motivo, un motivo tan profundo que ni él alcanza a comprender, pero que sólo puede querer decir que el camino hacia su sueño pasa por ahí. Pobre infeliz.

- Vale, sí, si me readmitís en la hoja yo os explico todo con pelos y señales.

- Venga, vale, pero tendrás que hacer horas extras.

- Vale, perfecto tío, lo que sea. Muchas gracias. En 10 minutos estoy allí.

- Venga, hasta ahora... ¿Qué te dije, Alejandro? Comiendo de mi mano.

- ¿Sin broncas ni nada? ¡Qué raro!

- Ya ves.

Recordemos:
Tenemos las sucesiones de Farey. En la sucesión F_n están todas las fracciones propias (menores o iguales que 1) con denominador menor o igual que n ordenadas de menor a mayor.
Propiedad 1: Si coges cualquier par de fracciones consecutivas a/b y c/d, siempre tienes que bc - ad = 1.
Propiedad 2: Si coges cualesquiera tres fracciones consecutivas, a/b, c/d, y e/f, siempre se tiene que c/d = (a+e)/(b+f).

9 MINUTOS Y 54 SEGUNDOS MÁS TARDE...

- Bueno Carlos, así que ya sabéis demostrar Pick, y además, como vimos la otra vez, la propiedad 2 se deduce de la 1, luego sólo falta que probar la propiedad 1, ¿no?

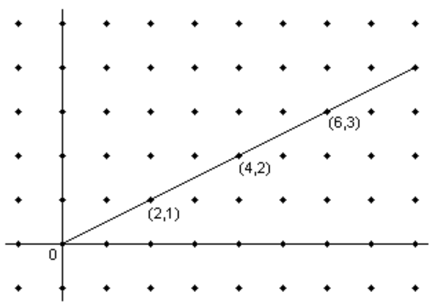
- Eso es, Matías.

- Lo primero que vamos a hacer es dividir los puntos reticulares del plano (salvo el origen) en dos clases.

- A pintarlos de dos colores, a echarlos en dos sacos...

- ¡Sí, a eso!

- Imaginemos que nos situamos en el origen y que los puntos reticulares son como árboles "muy finitos" plantados ordenadamente en un plano infinito. Hay ciertos puntos que podemos ver desde el origen, por ejemplo el (2, 1), pues ningún otro punto ("árbol") nos lo tapa. A estos puntos les llamaremos visibles. En cambio el punto (4, 2) o el (6, 3) no podemos verlos porque nos los tapa el (2, 1). A los puntos que estén cubiertos por otros los llamaremos ocultos.



- Claro, en realidad siempre tenemos que el punto (ka, kb), con k > 1, está oculto por el punto (a, b).

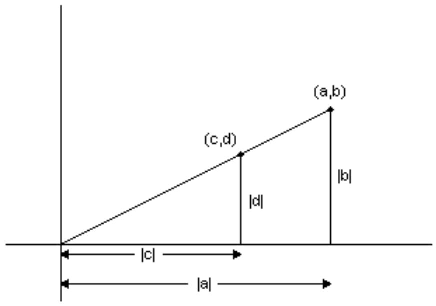
- Eso es, luego las coordenadas de un punto visible son números primos entre sí.

- ¡Ajá! Lo que no quiere decir que cualquier punto con coordenadas primas entre sí sea visible.

- Bueno, lógicamente no podemos deducir una cosa de la otra, pero en este caso la afirmación que has hecho también es cierta: si un punto tiene coordenadas coprimas entonces es visible. Y es fácil de ver. Si el punto está en alguno de los ejes, como el máximo común divisor de 0 y n es siempre n, los que tienen coordenadas coprimas son (1, 0), (0, 1), (-1, 0) y (0, -1) que son visibles.

- ¿Y si ninguna de las coordenadas es nula?

- Entonces supongamos que tenemos un punto (a, b) con a y b distintos de 0 y primos entre sí. Si (a, b) estuviese oculto por (c, d)...



... entonces por la semejanza de los triángulos c/d = a/b. Como c y a son distintos y (c, d) está más cerca del origen que (a, b) tenemos que |c| < |a|. Por el mismo motivo, |d| < |b|. Entonces tenemos una fracción (c/d) que es igual a a/b y con números menores. Eso quiere decir que a/b se puede simplificar y, por tanto, a y b no pueden ser coprimos. Esta contradicción demuestra que (a, b) no podía estar oculto.

- Es decir que un punto (a, b) es visible si y sólo si a y b son coprimos, vamos, que es lo mismo decir "visible" que decir "con coordenadas coprimas".

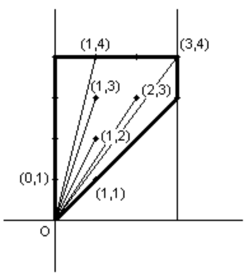
- Efectivamente.

- Muy bonito, pero ¿qué tienen que ver los puntos visibles y ocultos con las series de Farey?

- Pues tienen todo que ver. Asocia a la fracción a/b de las series de Farey el punto reticular (a, b) y lo verás. A partir de ahora a/b y (a, b) pasan a ser la misma cosa para nosotros.

- Ya veo por dónde vas. Como las fracciones de Farey estaban simplificadas, es decir, tenían numerador y denominador coprimos, los puntos que les asociemos serán puntos visibles.

- No sólo eso, sino que los puntos de una determinada sucesión de Farey están situados en una región del plano muy concreta. Para hacerlo más sencillo consideremos un ejemplo, F_4: 0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1.



Como el denominador es siempre menor o igual que 4, los puntos están por debajo de la recta y = 4. Como el numerador es siempre menor o igual que 3 (recordemos que todas las fracciones menos 1/1 son menores que 1), los puntos están a la izquierda de la recta x = 3. Como todos los numeradores son mayores o iguales que 0, los puntos están a la derecha del eje y, x = 0. Como todas las fracciones (salvo 1/1) son menores que 1, los puntos están por encima de la recta x = y.

Tenemos así una región limitada por x = 0, x = 3, y = 4, x = y en la cual (incluyendo la frontera) están todas las fracciones de F_4.

Por el mismo argumento exactamente, tenemos regiones limitadas por x = 0, x = n -1, y = n, x = y en las cuales están (incluyendo la frontera) todos los puntos de F_n.

De hecho podemos decir más, los puntos visibles de esta región son los puntos de F_n. En el eje y sólo es visible el (0, 1), en la recta x = y sólo el (1, 1), y ambos los tenemos siempre en la sucesión de Farey. Ahora, cualquier otro punto visible de la región tiene y mayor que x (fracción menor que 1), coordenadas coprimas (por ser visible) y denominador menor o igual que n (está debajo de la recta y = n). Luego está por definición en la sucesión F_n.

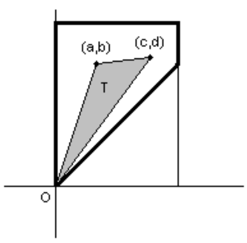
- Oye, que esto era un diálogo.

- Calla, que esto casi está. Mira, te acuerdas de que las fracciones de la sucesión de Farey F_n estaban escritas por orden creciente.

- Sí.

- Entonces si tú coges dos fracciones consecutivas, a/b < c/d, y representas sus coordenadas en el plano tendrás que la pendiente de la segunda es menor que la de la primera, ¿no?

- A ver que lo dibuje... Sí, sí, creo que sí... Así, ¿no?



- Eso es. Como las fracciones son consecutivas, las rectas que las unen con el origen son consecutivas en el "abanico" de F_n. Luego en el interior del triángulo T, de vértices O, (a, b) y (c, d), no hay ningún punto visible. Al ser los dos puntos visibles, obviamente no hay ningún punto visible en los lados del triángulo.

- Moraleja: no hay ningún punto visible ni en la frontera ni en el interior de T, exceptuando sus 3 vértices, claro está.

- Pero como T tiene un vértice en el origen, si no hay ningún punto visible tampoco hay ningún punto reticular. Si hubiera un punto oculto en T, estaría oculto por otro punto visible que estaría también en T.

- ¡Así que T es primitivo!

- ¡Y entonces por el teorema de Pick su área es 1/2!

- ¿Y sólo usamos para eso el teorema de Pick?

- Sí.

- Y entonces para qué lo hemos demostrado para cualquier polígono, si nos valía con probarlo para triángulos.

- Bueno... Esto... tenía interés en sí mismo.

- Tenía interés en sí mismo, tenía interés en sí mismo... Si te daba así...

- Claro, y ahora falta terminar. Podemos calcular el área de T por otros medios, ¿verdad?

- ¡Ah, sí! Teníamos una fórmula que decía que el área de un triángulo de vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) es igual al valor absoluto de 1/2 det((x_2 - x_1, y_2 - y_1), (x_3 - x_1, y_3 - y_1))

- Lo que en nuestro caso dice que el área de T es el valor absoluto de 1/2 det ((a, b), (c, d)) = 1/2 (ad - bc). ¿Y cuál es el valor absoluto de este número?

- Pues como teníamos que $a/b < c/d$ entonces $ad < bc$ y el valor absoluto de ad - bc es bc - ad.

- Perfecto. Resumiendo, el área de T es 1/2 (bc - ad) pero también era 1/2.

- Luego bc - ad es 1 que es la primera propiedad. ¡Toma ya!

FIN

Y el que haya leído todo hasta aquí se merece un regalo, se lo merece, pero no seremos nosotros quienes se lo hagamos...

Llegados a este punto cabe preguntarse varias cosas. ¿Ha merecido la pena tanto esfuerzo? ¿Realmente era necesario hacer todo esto para demostrar esas extrañas propiedades? Y sobre todo ¿valen para algo esas propiedades? Y mi respuesta es que no importan mucho las respuestas, que el hecho de que haya otros caminos no debe ser excusa para que no tomemos uno de ellos y que lo más importante es precisamente eso, el camino y no el destino al que nos lleva. Pues si bien se disfruta de la sensación del objetivo cumplido, del trabajo concluido, más se disfruta quizá de las destrezas y “herramientas” adquiridas por el camino y de esa especie de nostalgia que surge cuando recordamos los momentos en que estuvimos atascados y cómo salimos de ellos. Esas cosas serán las que nos animen y ayuden a comenzar y recorrer futuros caminos.

Bibliografía:
El ingenio en las matemáticas
Ross Honsberger

El proyecto PARTNeR

Compañeros, digo *partners*, os presentamos el proyecto PARTNeR (lo de compañeros era un chiste bilingüe, por si no lo habíais cogido). Después de leer esta frase, y dependiendo de tu nivel de impertinencia, pueden surgirte varias preguntas (además de la de por qué contamos chistes tan malos):

¿Qué significa PARTNeR?
Proyecto Académico con el Radiotelescopio de NASA en Robledo.

¿En qué consiste el proyecto?
PARTNeR es un proyecto educativo, cuyo objetivo es proporcionar a los estudiantes españoles una experiencia práctica en el campo de las ciencias del espacio y para estimular su interés por el mundo científico y tecnológico. Vale, es copiado, nos habéis pillado. El caso es que a los chavales les dejan usar una antena de 34 metros (la antena DSS-61 que podéis ver en la foto de abajo) que está en Robledo de Chavela (Madrid) para realizar prácticas de Radioastronomía (su utilización remota se realizará a través de Internet).

¿Cómo os habéis enterado vosotros en la hoja?
Pues resulta que nuestro experto en astrofísica particular, Celso Frade, nos avisó de que en su colegio van a tener la oportunidad de participar en este proyecto. Para tener mucha más información sobre el mismo, fotos y detalles concretos sobre la actividad que se llevará a cabo, además de un artículo relativo al Proyecto PARTNeR de la revista "AULA DE EL MUNDO", podéis entrar en la web de colegio Zazuar: http://www.colegiozazuar.com/proyectopartner.htm

¿Y cuándo van a mover el telescopio, por si quiero verlo?
Pues si todo va bien, la observación con los alumnos del colegio Zazuar se realizará el miércoles 5 de abril de 2006 de 15:00 a 17:30, por lo que si os conectáis sobre las 16:00 a http://laeff.inta.es/partner/webcam.php, deberíais ver cómo se desplaza el radiotelescopio.

Mucha suerte, chicos. Y muchas gracias por la información.

Agradecemos la colaboración de Celso Frade.

Una nota sobre análisis diofántico

escrito por Juan López González, estudiante de la Universidad Autónoma de Madrid,
correo electrónico: e44625@estudiante.uam.es

Primero anoten la conocida fórmula

$$1+3+5+7+9+...+(2n-3)+(2n-1)=n^2 \qquad (I)$$

que establece que es posible expresar n^2 como suma de los n consecutivos números impares que aparecen en la expresión como sumandos principales. La fórmula queda validada si la probamos por inducción matemática. La fórmula también se puede escribir así

$$\frac{1+3+5+7+9+...+(2n-3)+(2n-1)}{n}=n \qquad (II)$$

que establece n como un promedio aritmético de los n consecutivos números impares del numerador.
Ahora consideren el mayor factor libre de cuadrados presente en un número entero positivo

$$radical(n)=\prod_{\substack{p|n \\ p \ un \ primo}} p$$

y la definición

$$radical(1)=1$$

No todos los números impares consecutivos m que aparecen en la parte izquierda de la igualdad (I) cumplen que $radical(m)=m$, me referiré a esta propiedad en breve, como la *propiedad del radical* y los impares que la cumplan los llamaré *impares de pleno radical*. Algunos de estos números tienen algún divisor primo repetido en su factorización, por ejemplo el número 9. Ahora consideren de entre toda la secuencia de impares, aquellas subsecuencias formadas exclusivamente por números que cumplan la *propiedad del radical*, esto es acometo a tachar de la lista de números positivos impares ordenados aquellos impares que no cumplen la propiedad. Las listas entre marcas son las subsecuencias a las que me he referido antes. Esto es, los números de las subsecuencias son *impares y consecutivos de pleno radical* . A partir de las subsecuencias de *impares de pleno radical* formo en los casos que puedo un número cuadrado perfecto. Algunos de los cuadrados que pueden formar así son

$$1+3=2^2,$$
$$1+3+5=3^2,$$
$$1+3+5+7=4^2,$$
$$33+35+37+39=12^2,$$
$$127+129=16^2,$$
$$193+195+197+199=28^2 \text{ y}$$
$$211+213+215+217+219+221=36^2.$$

Es fácil probar que no se pueden formar sumas de este tipo con un número arbitrario de sumandos, pueden usar congruencias módulo 9 para probarlo (esto es, en la factorización de un impar, de entre nueve impares consecutivos aparece una potencia de 9). He hecho pocos cálculos pero me pregunto sobre si la siguiente proposición es verdadera o si se puede encontrar un contraejemplo que la refute:

Para los casos en que se puede formar un cuadrado perfecto C a partir de *c* números *impares consecutivos de pleno radical* de una misma subsecuencia afirmo que

$$radical(C) = radical(\frac{C}{c}) \qquad (III)$$

Yo considero que es cierta pero no sé probarla.
Si en vez de este enunciado yo dijera que para los promedios de (II) se cumple que

$$radical\left(\frac{1+3+5+7+9+...+(2n-3)+(2n-1)}{n} \right) = radical(n) \qquad (IV)$$

la respuesta es afirmativa y muy obvia. O sea disponemos de una infinidad de ejemplos de listas de impares consecutivos, algunos de ellos con factores repetidos en su factorización y con suma un cuadrado perfecto cumpliendo de manera obvia (IV) pero es mucho más difícil, por lo menos para mí determinar para secuencias de menos de 9 sumandos la propiedad (III). La similaridad es clara en que en (IV) se cumple de manera obvia

$$radical(n) = radical(n^2) \text{ .}$$

3 de enero de 2006

El autor toma entera responsabilidad del contenido y apariencia del presente escrito.

PROBLEMA

Consideren el mayor factor libre de cuadrados presente en un número entero positivo, con esto me refiero exactamente a $radical(n) = \prod_{\substack{p|n \\ p\ \ un\ \ primo}} p$ y la definición $radical(1) = 1$.

Ahora acometo a tachar de la lista de números positivos impares consecutivos ordenados aquellos impares que no cumplen *radical(impar)=impar* . Consideren las listas entre marcas como subsecuencias de las que se pueden extraer sumas de impares consecutivos iguales a un cuadrado perfecto.

a) Encuentren subsecuencias de dos, tres, cuatro y seis sumandos de impares consecutivos cumpliendo cada uno de ellos que *radical(impar)=impar* y cuyas respectivas sumas son cuadrados perfectos.
b) ¿Se pueden encontrar subsecuencias como las descritas cuya suma es un cuadrado perfecto involucrando un número arbitrario de impares consecutivos tales que *radical(impar)=impar* para cada uno de ellos?
c) Dar una prueba a la siguiente afirmación:
Consideren *C* un cuadrado perfecto formado a partir de la suma de *c* números impares consecutivos de una misma subsecuencia, esto es, con la propiedad de que para cada uno de estos impares consecutivos *radical(impar)=impar* con *c* un número menor que 9 entonces

$$radical(\frac{C}{c}) = radical(C)$$

d) * ¿Hay una infinidad de cuadrados perfectos *C* así formados?

propuesto para la Hoja Volante por Juan López González
estudiante de la Universidad Autónoma de Madrid
e44625@estudiante.uam.es

Respuesta a una pregunta de Juan López González

En el número 8 de la hoja volante, Juan López González nos propone probar que siempre se cumple la siguiente afirmación:

Para cualquier sucesión de c números naturales impares libres de cuadrados (lo que él denomina impares de pleno radical) consecutivos se cumple que si su suma es un cuadrado C, entonces

$$radical(\frac{C}{c}) = radical(C). \tag{1}$$

Veamos que es cierta: Comenzamos notando que para que no se cumpla (1), c debe ser de la forma $c = us^2$ con $s > 1$ y coprimo con u. Además, para que los números de la sucesión sean libres de cuadrados es necesario que $c < 9$. Por tanto, el único valor para el que podría no cumplirse la identidad es $c = 4$. Pero en este caso (1) se deduce de que la suma de cuatro números impares consecutivos es siempre múltiplo de 8.

Lo que ocurre es que (1) es cierta porque las condición de que los miembros de la sucesión sean libres de cuadrados es demasiado restrictiva. Sin esta condición la igualdad no siempre se cumpliría, como en el ejemplo

$$17 + 19 + \ldots + 33 = 225.$$

¿Cuáles son las sucesiones sin la condición de libres de cuadrados para las que (1) no se cumple?

Adrián Ubis