"Un experto es alguien que ha cometido todos los errores que se pueden cometer en un determinado campo."
Niels Bohr

La hoja volante

http://www.uam.es/hojavolante

Número 15. Junio 2008

La Olimpiada Matemática

Entre los días 27 y 29 de marzo de 2008 se celebró en Valencia la cuadragésimo cuarta edición de la Olimpiada Matemática Española (OME). Los más de 100 participantes, estudiantes de 1º y 2º de Bachillerato, se enfrentaron a 6 problemas (repartidos en dos sesiones de 3 horas y media). Se concedieron 36 medallas, 6 de oro, 12 de plata y 18 de bronce. Los seis premiados con la medalla de oro fueron (del primero al sexto): Diego Izquierdo (Madrid), Alejandro Gimeno (Valladolid), Juan José Madrigal (Cataluña), Arnau Messegué (Cataluña), Gabriel Fürstenheim (Madrid) y David Alfaya (Madrid). Para ver la lista completa de premiados, los problemas y las noticias de cada día (redactadas por Javier Fresán y Roberto Rubio) podéis ir a la web oficial del evento: http://www.uv.es/facmat/Olimpiada08/.

Los seis ganadores acudirán a la cuadragésimo novena edición de la Olimpiada Matemática Internacional (IMO), que se celebrará del 10 al 22 de julio de 2008 en Madrid. Es la primera vez que la IMO tiene lugar en nuestro país. Estudiantes de más de 100 países competirán por las medallas y nosotros estaremos allí para contároslo.

Por cierto, si conoces a algún universitario de cualquier carrera que hable algún idioma distinto de español, inglés y francés, tiene la oportunidad de participar como voluntario escribiendo cuanto antes a: voluntarios.imo@uam.es.

Más información sobre la IMO 2008 en: http://www.imo-2008.es/.

Pitágoras y el billar

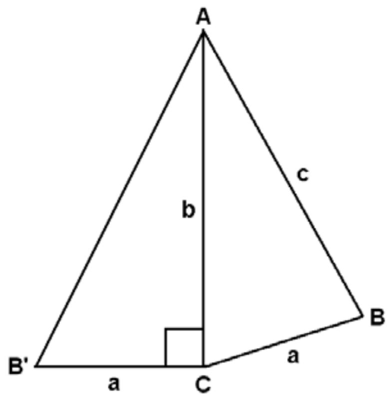
Si preguntamos a una persona de la calle por el nombre de algún teorema, es prácticamente seguro que nombrará el teorema de Pitágoras. Muchos (sobre todo aquellos que leyeron el número anterior de la hoja volante) serán capaces de recitar como loros el enunciado del mismo: "En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". Y algunos incluso podrán demostrarlo; no en vano, existen cientos de pruebas de este hecho.

Otra cosa bien distinta es si hablamos del recíproco del Teorema de Pitágoras, a saber, "Si en un triángulo se tiene que la suma de los cuadrados de dos de los lados es igual al cuadrado del tercero entonces el triángulo es rectángulo".

Los dos enunciados dicen cosas distintas y no deben ser confundidos. No es lo mismo decir que en los triángulos rectángulos se satisface cierta cosa que decir que siempre que se satisface esa cosa el triángulo es rectángulo. Por ejemplo, en todo triángulo rectángulo la suma de sus ángulos interiores es 180º, pero el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo sea de 180º no implica que el triángulo sea rectángulo, pues como bien sabemos (¡si no lo sabes probar a qué esperas para buscarlo!) esto ocurre en cualquier triángulo.

Si bien, como hemos dicho, existen muchas pruebas muy conocidas del teorema de Pitágoras, no son tan conocidas las de su recíproco. De hecho, pese a que como veremos se puede probar con argumentos muy sencillos, podríamos hacer sonrojar a más de un matemático si le pedimos una demostración del recíproco del teorema de Pitágoras. Veamos una posible prueba:

Tenemos un triángulo ABC en el que se satisface la fórmula $a^2 + b^2 = c^2$.



Dibujamos un triángulo adyacente AB'C, rectángulo en C y tal que el lado B'C mida lo mismo que el lado BC. Estos dos triángulos han de ser iguales (congruentes) porque:

1. Comparten el lado AC.
2. El lado B'C mide lo mismo que BC.
3. Usando el teorema de Pitágoras (se puede usar el teorema para probar su recíproco, lo que no podríamos hacer es usarlo para probar el teorema de Pitágoras)

$$|AB'|^2 = a^2 + b^2 = c^2,$$

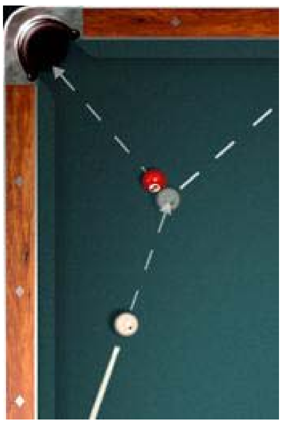
de donde AB' mide lo mismo que AB.

Al ser los tres lados iguales, los triángulos son congruentes, por lo que ABC también es rectángulo. Esto termina la prueba.

Y tras ello, la pregunta obligada ¿qué tiene que ver todo esto con el billar?

Y la respuesta, que comienza con otra pregunta ¿qué es lo más importante en el billar? Jugar posición. Cualquier experto nos lo diría. Los burdos aficionados nos ponemos muy contentos con tan sólo golpear una bola con la bola blanca y meterla en cualquier agujero sin pensar en nada más, pero una pequeñísima reflexión nos convencerá de la importancia de saber, o mejor controlar, dónde irá a parar la bola blanca tras chocar con la otra.

¿Tienes una mesa de billar cerca? Si no, haz un esfuerzo mental. Imaginemos que golpeas a la bola blanca sin que ésta tenga ningún tipo de rotación horizontal (o sea, sin efecto). Imaginemos también que la bola blanca choca con otra bola. Una posibilidad es que lo hayas hecho de modo "tan perfecto" que las dos bolas continúen en la misma línea recta tras el choque. Pero lo más probable es que la bola golpeada y la bola blanca salgan cada una en una dirección. ¿Qué ángulo formarán entonces las direcciones de las bolas?



Si miras el dibujo o si haces algunas pruebas en una mesa de billar, te será fácil convencerte de la regla más importante del mundo del billar:

La regla de los 90 grados. *Si dos bolas (de la misma masa) chocan (suponiéndose el choque totalmente elástico), tras el impacto saldrán despedidas formando un ángulo de 90 grados.*

¿Y por qué? Vayamos a un libro de Física y busquemos la fórmula de la conservación del momento lineal. Si llamamos m a la masa de las bolas, **v** a la velocidad con que la bola blanca llega al choque y $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ a las velocidades con las que sale cada una de las bolas del choque, tenemos la siguiente ecuación <u>vectorial</u>:

$$m\mathbf{v} = m\mathbf{v_1} + m\mathbf{v_2}$$

y tachando las emes, esto nos dice que los vectores **v**, $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ forman un triángulo.

Ahora (¿pero ya has guardado el libro de Física?) aplicamos la fórmula de la conservación de la energía mecánica (si suponemos que no hay rozamiento y que el choque es totalmente elástico la energía cinética se conservará) y tenemos la ecuación <u>escalar</u>:

$$m|\mathbf{v}|^2/2 = m|\mathbf{v_1}|^2/2 + m|\mathbf{v_2}|^2/2.$$

Tachemos los doses y las emes y el recíproco del teorema de Pitágoras nos dirá que el triángulo que forman los vectores **v**, $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ es un triángulo rectángulo con catetos $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$. Esto prueba la regla de los 90 grados.

Para los que no confíen en la Física y tengan que ver para creer, nos fuimos a echar una partidita de billar y a hacer algunas fotos. Fotografiando con velocidades de obturación lentas, podemos ver el recorrido de las bolas. El resultado:

Ya sabes, la próxima vez que juegues al billar no olvides tu transportador de ángulos...

Agradecemos la sugerencia del tema por parte de Manuel Silva.

Recordemos qué decía el acertijillo anterior:

Cien prisioneros estaban colocados en una fila, cada uno podía ver a todos los que tenía delante y el guardián ponía en la cabeza de cada uno un sombrero negro o uno blanco, y después les preguntaba, empezando por el que podía ver a todos los demás, cuál era el color de su sombrero. Los prisioneros que acertaban eran liberados. Los prisioneros podían escuchar lo que decía el resto y si era correcto o no y podían acordar una estrategia de antemano y se pedía la mejor estrategia.

El último prisionero de la cola (el primero que habla) no tiene ninguna información sobre su sombrero así que tiene un 50% de acertar el color de su sombrero lo haga como lo haga. Pero, precisamente por eso, puede usar su respuesta para comunicar información al resto. Si, por ejemplo, dijera el color del sombrero del prisionero que tiene delante, éste adivinaría, pero el siguiente estaría en la misma situación que el primero. Repitiendo esta idea, 50 prisioneros se salvarían seguro y 75 en media, pues es de esperar que de los otros 50 se salvaran la mitad.

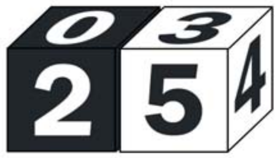
Pero se puede hacer mejor. En lugar de mirar al sombrero del que tiene delante, el primer prisionero cuenta el número total de sombreros blancos que ve. Si es impar dice "blanco" y si es par dice "negro". Ahora, el que tiene delante puede contar el número de sombreros blancos que ve: si tiene la misma paridad que decía el primero su sombrero será "negro" y si cambia será "blanco". El siguiente en la fila sabe también por las respuestas de los dos anteriores la paridad de los sombreros blancos que quedan y puede acertar de la misma manera. Y así sucesivamente, adivinarán todos menos el primer prisionero. Luego se librarán 99 con seguridad y el otro con probabilidad 1/2. Esta es la mejor estrategia.

Es interesante comprobar que si hubiera un número mayor de colores de sombreros, eso no supondría un problema. En el caso de haber n colores, asignaríamos a cada uno un número del 0 al n-1 y el primero de los prisioneros sumaría todos los sombreros que ve, módulo n. Con esta información, el siguiente podría adivinar el color de su sombrero sin más que calcular el número que le hace falta sumar a lo que él ve, módulo n, para obtener lo que decía el primero, y así sucesivamente... En cuanto a la relación que prometimos entre el acertijo y el Axioma de Elección, lee el artículo "El Axioma de Elección" en este mismo número de la revista.

Enhorabuena por sus correctísimas respuestas a Alejandro Gimeno, Javier Pérez y Mónica Vallejo.

El acertijillo

Ponemos cifras en las caras de dos dados para hacer un calendario, de manera que las dos caras frontales de los dados indiquen en qué día del mes estamos, como en la figura.



Con estos dados podemos formar las combinaciones 00, 01, 02, ..., 30 y 31. ¿Cuáles son las tres cifras que no se ven en el dado de la derecha y las 4 que no se ven en el de la izquierda?

Recordamos el problema anterior:

Dos ladrones han robado un collar circular con 100 cuentas, 50 blancas y 50 negras. ¿Pueden cortar el collar por un diámetro de manera que cada mitad tenga 25 cuentas de cada color?

La respuesta es que sí. Para probarlo, numeramos las cuentas del collar de la 1 a la 100 en orden.

Consideramos las cuentas 1 a 50. Habrá n negras. Por lo tanto en las cuentas 51 a 100 habrá 50-n negras. Si n es 25 hemos terminado. Si no, consideramos las cuentas 2 a 51.

Obsérvese que ahora sólo podemos tener una de las tres posibilidades siguientes:

1. n negras.
2. n+1 negras.
3. n-1 negras.

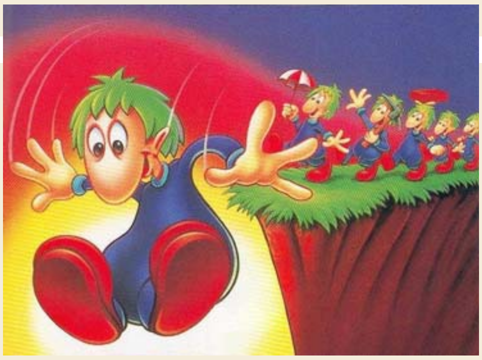
Seguimos moviéndonos a las perlas 3 a 52, 4 a 53...

El número de cuentas negras tiene que pasar de n a 50-n y sólo puede ir saltando de 1 en 1. Por lo tanto en algún momento pasará por 25 y esas serán la secciones que habrá que cortar.

Muchas gracias a Jorge Tejero, Sara Ferrero y Miguel Montero (¿ves como se podía hacer más breve?) por sus excelentes soluciones. Como veis, era un problema que sólo podían solucionar las personas cuyo primer apellido acabase en "ero", así que los demás no os preocupéis si no disteis con la solución...

El problema

¿Recordáis el simpático juego de los *Lemmings*? Colocamos 100 *lemmings* sobre una cuerda floja que mide un metro, en las posiciones que queramos y mirando hacia el lado que queramos de los dos. Ahora



todos los *lemmings* comienzan a andar a la vez. Cada vez que dos de ellos se encuentran, chocan entre sí y regresan por donde han venido. Cuando un *lemming* llega a cualquiera de los dos extremos de la cuerda floja cae... Si los lemmings caminan con velocidad constante de 1 metro por minuto ¿cuál es el máximo tiempo durante el que podremos tener algún *lemming* andando sobre la cuerda floja?

Respuestas a: hojavolante@uam.es.

Todo está en cualquier número

- Me hallaba el otro día navegando por Internet cuando un titular escalofriante hizo que una gota de sudor resbalase por mi frente: "Un ingenioso *hacker* ha revelado todos los PIN de las tarjetas de crédito de todo el mundo". No sin cierto temblor, el dedo índice de mi mano derecha presionó el botón izquierdo de mi ratón accediendo a la diabólica página, obra, sin duda, de una mente perversa. Anonadado encontré allí, entre otros muchos, el número de mi tarjeta de crédito: 0000, 0001, 0002... 9998, 9999.

- ¡Vaya porquería de historia!

- ¡Pero ten en cuenta que está basada en hechos reales! Además, te lo cuento porque esta pequeña anécdota me recordó una curiosa propiedad que había leído tiempo atrás. Todo comienza con esta inocente preguntilla: De los números reales que hay entre 0 y 1 ¿cuánto mide el subconjunto de los que no tienen la cifra 7 en su desarrollo decimal?

- ¿Y cómo vamos a medirlos?

- Muy fácil, vamos a ir restando al 1 lo que miden aquellos números que sí tienen al 7 en su desarrollo decimal. En primer lugar quitamos aquellos que empiezan por 0,7... ¿cuánto miden esos?

- Pues 1/10 porque son todos los que hay mayores o iguales que 0,7 y menores que 0,8.

- Muy bien, vamos con cada uno de los 9 intervalos restantes. En cada uno de ellos hay un intervalo de longitud 1/100 que tiene como segunda cifra decimal al 7.

- ¡Claro, ya lo veo! Los que empiezan por 0,07..., los que empiezan por 0,17... y así sucesivamente.

- ¡Eso es! Luego otros 9/100 que quitamos. Y ahora habrá 81 intervalos restantes y en cada uno de ellos un intervalito de longitud 1/1000 con el 7 como tercera cifra decimal...

- Entonces ¿cuánto quitamos al final?

- Pues: $1/10 + 9/10^2 + 9^2/10^3 + 9^3/10^4$...

- Vamos "apañaos"... ¡ahora nos toca sumar infinitas cosas!

- Tranquilo, siempre hay un truco sucio para un trabajo sucio. Esto es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón 9/10.

- Y donde el primero es 1/10.

- ¡Eso es! Para sumarlos, vamos a llamar S a nuestra suma infinita, $S = 1/10 + 9/10^2 + 9^2/10^3 + 9^3/10^4$... Entonces $9S/10 = 9/10^2 + 9^2/10^3 + 9^3/10^4 + 9^4/10^5$... y restando esto de la primera cosa tendremos $(1 - 9/10)\, S = 1/10$ porque todos los demás términos se cancelan.

- Así que $S = (1/10)/(1/10) = 1$.

- ¡Exacto! ¡Luego los que no tienen al 7 miden exactamente 0!

- ¿Eso quiere decir que no hay ninguno?

- No, no quiere decir eso, de hecho hay infinitos. Piensa en cualquier número que no tenga al 7 entre sus cifras decimales, como 0,333333...

- Claro, o 0,121212... ¿Entonces?

- Entonces miden 0. Eso quiere decir que, pese a que haya infinitos que no contienen al 7, los que sí lo contienen son infinitamente más, hasta el punto de que si eliges al azar un número entre 0 y 1, con probabilidad 1 tendrá al 7 en su desarrollo decimal.

- ¿Y qué tiene de especial el 7?

- Nada. Lo mismo se puede hacer con cualquier otra cifra. Además, como la unión de 10 conjuntos de medida nula tiene medida nula podemos afirmar que: escogido un número al azar entre 0 y 1, con probabilidad 1 encontraremos todos los dígitos entre sus cifras decimales.

- Está claro.

- Pero no sólo eso. Y si buscamos la cadena 73 ¿la encontraremos siempre? ¿cuánto mide el conjunto de aquellos números que no la contienen en su desarrollo decimal?

- Sí la contienen los que empiezan por 0,73..., que forman un intervalo que mide 1/100. Y en los 99 intervalos restantes hay un intervalito de longitud 1/10000 cuyos números tienen al 7 y al 3 como 3ª y 4ª cifra decimal.

- Muy bien, y eso que te estás dejando los que lleven al 7 y al 3 como 2ª y 3ª cifra decimal. Pero da igual. Como sólo los que estás quitando ya van a sumar uno, te dejo hacerlo, eso juega a nuestro favor.

- Así que quito: $1/100 + 99/100^2 + 99^2/100^3 + 99^3/100^4$...

- Y haciendo el truco de antes eso también suma 1, te lo digo yo.

- Luego, el conjunto de los que no contienen la cadena 73 en su desarrollo decimal mide 0.

- Claro, y como de nuevo el 73 no tiene nada de especial y además la unión de 100 conjuntos de medida nula tiene medida nula, podemos afirmar que: escogido un número al azar entre 0 y 1, con probabilidad 1 encontraremos cada una de las 100 combinaciones de dígitos *mn* en posiciones sucesivas de su desarrollo decimal.

- Ya. Y esto se puede repetir para 3 cifras, 4 o las que queramos y podrás afirmar que en el desarrollo decimal de cualquier número real está con probabilidad 1 el PIN de mi tarjeta de crédito.

- Y tu DNI, y el número de tu móvil...

- ¿El nuevo o el viejo?

- Tienes el nuevo, el viejo, el nuevo seguido del viejo, el viejo seguido de tu PIN de la tarjeta de crédito y luego del nuevo...

- ¡Qué cosas! Así que casi cualquier número real tiene escondidos todos los números importantes...

- Y todos los libros importantes...

- ¿Cómo?, ahí sí que te has pasado... ¿Cómo va a llevar letras un número?

- Bueno, codifica las letras con números. Digamos que 00=a, 01=b, 02=c, ..., 26=z, 27=A, 28=B, ..., 53=Z, 54= , 55=., 56=,, 57=:, 58=¿... y así sucesivamente. Puedes codificar todos los símbolos habituales con las 100 combinaciones de cifras desde 00 a 99. Y si quisieras poner más pues harías lo mismo con tres cifras y ya está.

- ¿Y si quisiera más todavía?

- ¡Pues con cuatro y calla ya! El caso es que ahora el desarrollo decimal de un número podemos traducirlo en un texto. Mira: 0,311354211354112106001854030454110054390013020700... ¿sabes qué pone?

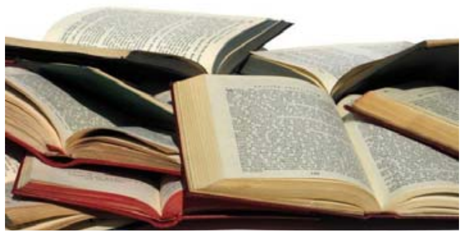
- Podría decirlo, pero entonces los lectores no se molestarían en traducirlo...

- Vale, llevas razón, que lo traduzcan. Pero lo que está claro es que todo texto podemos traducirlo a una cadena de números y, por lo que hemos probado antes, esa cadena estará con probabilidad 1 en el desarrollo decimal de un número elegido al azar.

- ¿Quieres decir que si cojo un número al azar es casi seguro que en un punto de su desarrollo decimal está escrito *El Quijote*?

- Tal como lo hemos dicho, *El Quijote* sin tildes... Pero eso se soluciona muy fácil, puedes poner un símbolo en nuestra lista que sea la tilde e interpretar que siempre que salga va a acentuar a la siguiente letra.

- Claro y entonces en casi cualquier número están todos los libros de la biblioteca seguidos.



- Eso es, y los archivos secretos del FBI separados cada uno del siguiente por la palabra *gallifante*. Por supuesto, esto es tan inútil como lo que decíamos al principio de los PIN de las tarjetas, pues dado un número no sabemos dónde empezará esa cadena (ni siquiera podemos estar completamente seguros de que esté, aunque sí casi seguros). Pero al menos nos ha servido como excusa para entender mejor los números...

Referencia: "La saga de los números" de Antonio Córdoba Barba.

El Axioma de Elección

El Axioma de Elección nos dice que si tenemos un conjunto no vacío, X, entonces para cada subconjunto no vacío S de X es posible elegir algún elemento s de S. Esto es, existe una función f que asigna a cada conjunto no vacío S de X un representante f(S) en S. Si nunca has leído esto antes puede que estés pensando que vaya tontería, que cómo "no va a ser verdad": pues claro que si tengo un conjunto no vacío puedo coger un elemento de él y así con todos. Eso sí, pero a lo mejor tienes que hacer un número muy grande de elecciones simultáneas, puede que infinitas, y entonces ya no está tan claro que puedas hacerlo. Si tienes una forma canónica (una especie de fórmula o regla) para hacer las elecciones entonces estás salvado, pero si no... necesitas la ayuda del Axioma de Elección. Bertrand Russell lo ilustró con una frase muy divertida:

Seleccionar un calcetín de cada uno de infinitos pares de calcetines requiere el Axioma de Elección, pero para zapatos el axioma no se necesita.

Claro, los zapatos se pueden elegir canónicamente, escogiendo, por ejemplo, siempre el derecho y los calcetines no. En realidad, para escoger los calcetines no se requiere el Axioma de Elección, sino una variante algo más débil, pero el ejemplo ilustra la idea.

Pues bien, pese a lo "inocente" que puede parecer aceptar este axioma y a que muchos matemáticos lo usan en sus demostraciones, hay motivos "para no confiar en él". El argumento más común para no aceptarlo es la nada intuitiva "paradoja de Banach-Tarski": usando el Axioma de Elección uno puede probar que es posible fabricar a partir de una esfera rellena (sin agujeros) un rompecabezas tridimensional de un total de ocho piezas, las cuales, combinadas de otra manera, formarían dos esferas rellenas (sin agujeros) del mismo radio que la primera. Pero hay un argumento quizá "más sencillo" (al menos "más discreto") para probar la "rareza" del Axioma de Elección, que tiene que ver con una versión infinita del acertijillo del número anterior, que diría algo así:

Un número infinito numerable de prisioneros está colocado "haciendo cola" sobre los números naturales, mirando cada uno de ellos hacia los infinitos prisioneros que tiene delante (esto es, en la dirección positiva). A cada uno de ellos se le coloca un sombrero (o bien blanco o bien negro) y luego se va preguntando a cada prisionero por el color de su sombrero, comenzando por el que está sobre el primer natural. Además, para complicar un poco las cosas, cada prisionero no puede oír lo que dicen los anteriores, ni si es correcto o no. Si los prisioneros pueden acordar una estrategia de antemano ¿Cuál es la mejor estrategia y cuántos se salvarán con seguridad?

Intuitivamente, no es posible crear una estrategia porque no se puede obtener información de nadie que conozca el color de tu sombrero, así que al parecer todo el mundo trata de acertar a ciegas. Sin embargo, como veremos en un momento, ¡todos los prisioneros salvo un número finito pueden quedar libres con seguridad! En primer lugar, mejor que pensar en los colores de los sombreros, llamamos 0 al blanco y 1 al negro. Así, cualquier ordenación de sombreros se convierte en una sucesión infinita de 0's y 1's. Llamamos a dos sucesiones "equivalentes" si son iguales tras un número finito de elementos, es decir desde un punto en adelante. Esto define una relación de equivalencia (si no sabes lo que es esto es un buen momento para que lo busques) y tenemos definidas, por tanto, clases de equivalencia para nuestras sucesiones.

Ahora, los prisioneros usan el Axioma de Elección para elegir una sucesión representante de cada clase de equivalencia, y memorizan cada una de ellas. Cuando les ponen los sombreros, cada uno puede ver toda la sucesión salvo un número finito de términos, luego puede reconocer en qué clase de equivalencia está y decir el color que le tocara de acuerdo con la sucesión representante de esa clase. ¡Y ya está! Como la sucesión que tenemos es equivalente a la que están recitando los prisioneros, llegará un punto a partir del cual, casi milagrosamente, todos estén acertando el color de su sombrero sin escuchar lo que dicen los demás. El argumento también se puede generalizar a un número de colores arbitrariamente grande, lo cual resulta, si cabe, todavía más sorprendente.

Todo sea dicho, el hecho de que tanto Banach-Tarski como este resultado sean anti-intuitivos no quita (ni tampoco da, claro) valor al Axioma de Elección. Después de todo, el hecho de que haya muchos modelos matemáticos que se ajustan al mundo físico no quiere decir que todos tengan que hacerlo. Además, si bien los resultados son poco intuitivos, también son muy raras las condiciones y no cuadran mucho con nuestro mundo físico. En Banach-Tarski el truco está en que se construyen piezas espeluznantes cuyo volumen no se puede definir. Si has aprobado la Teoría de la Integral y de la Medida, enhorabuena y sabrás de qué hablamos. En nuestro caso valga hacerse la siguiente pregunta ¿no te extrañaría encontrarte a infinitas personas con memoria infinita?

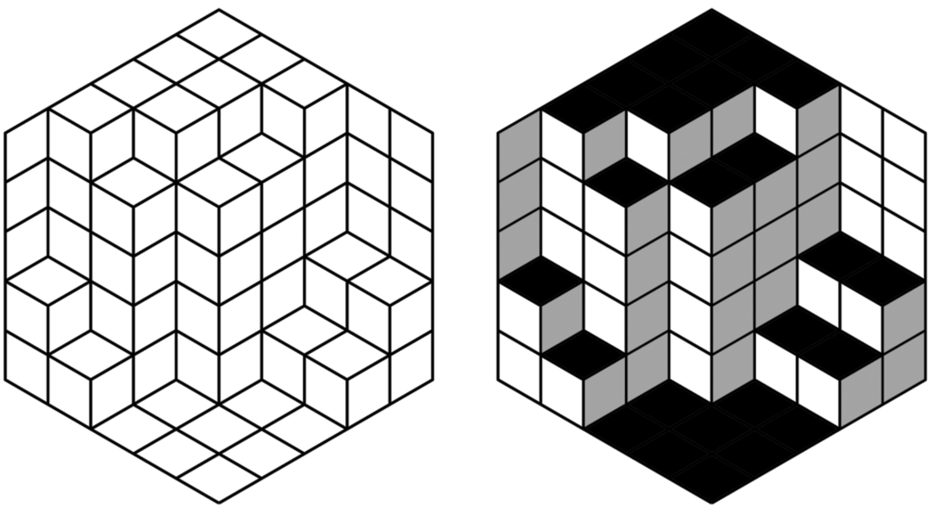
Referencia: The everything seminar: "The Axiom of Choice is Wrong". http://cornellmath.wordpress.com/2007/09/13/the-axiom-of-choice-is-wrong/. **Agradecemos la sugerencia del tema por parte de Manuel Silva.**

Visualización

El *calisson* es un dulce tradicional francés, similar al mazapán, que tiene forma de rombo. Supondremos que estos rombos están formados por dos triángulos equiláteros unidos por una arista. Ahora, supongamos que una caja hexagonal de lado n se rellena (se tesela) con *calissones* de lado 1. Los rombos pueden aparecer en tres direcciones distintas. El teorema de los *"calissones"* (o, mejor, de las *pastillas Juanola*) dice:

Para cualquier teselación, el número de *calissones* en cada una de las orientaciones es 1/3 del total del número de *calissones*.

Referencia: Guy David y Carlos Tomei, *American Mathematical Monthly*, vol. 96, no. 5 (Mayo 1989), 429-430. **Agradecemos la colaboración en las ilustraciones de Jaime Vinuesa.**



Cofinanciado por:

Departamento de Matemáticas. Escrito por Matías Núñez y Carlos Vinuesa.
Agradecemos la colaboración de Angélica Benito, Fernando Chamizo, Manuel Silva y Jaime Vinuesa.