"El secreto de la felicidad no es hacer siempre lo que se quiere, sino querer siempre lo que se hace"
Leon Tolstoi

La hoja volante

http://www.uam.es/hojavolante

Número 16. Octubre 2008.

La Olimpiada Matemática

La Olimpiada Matemática Internacional (IMO 2008) concluyó con gran éxito el pasado mes de julio en Madrid. Diez días en los que unos 550 estudiantes de más de 100 países se dieron cita para resolver seis problemas (además de para visitar Madrid y sus alrededores, asistir a conciertos y espectáculos, practicar deporte, jugar...).
Finalmente, los 3 primeros clasificados, todos ellos con la máxima puntuación (los 6 problemas perfectos) fueron los chinos Xiaosheng Mu y Dongyi Wei y el estadounidense "de ojos rasgados" Alex Zhai (parece que esto de los ojos tiene que ver con las matemáticas...).

Los españoles conseguimos 3 medallas de bronce (Gabriel Fürstenheim, Diego Bruno Izquierdo y Arnau Messegué) y 3 menciones de honor, premio que se otorga por resolver uno de los 6 problemas completamente (David Alfaya, Moisés Herradón y Juan José Madrigal).
Próxima cita: Alemania 2009.

Para más información sobre la IMO 2008 podéis entrar en la página oficial y descargar los geniales boletines "IMO news" escritos por Miguel De Benito, Javier Fresán, David Garcés y Roberto Rubio durante la olimpiada: http://www.imo-2008.es/newsarchive.html.

Y después ¿qué?

por Blanca Gómez.

¿Dónde y cuándo estudiaste Matemáticas?
Estudié Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid, la rama de Computación. Empecé en 1993 y acabé la carrera en febrero de 2000.

¿Cómo te decidiste a estudiar la carrera? ¿Conocías a alguien, te convenció algún profesor?
Fue algo paradójico porque yo conocí la carrera de Matemáticas por una compañera del instituto, que tenía clarísimo que quería estudiar Matemáticas y trató de convencerme durante todo 1° de BUP para que la eligiera y estudiar juntas. La verdad es que yo no lo tenía nada claro y ni por asomo me imaginaba estudiando esa carrera y siempre le decía que no la iba a estudiar. Cuando finalmente tuve que tomar la decisión de elegir qué carrera estudiar evalué una serie de opciones, entre ellas la carrera de Matemáticas, me informé del temario y finalmente me decidí por ella, a pesar de que mi padre (Ingeniero de Caminos) me decía que no iba a ser lo que yo pensaba. Aunque a mí se me habían dado muy bien las matemáticas de siempre y me gustaban mucho "los números" él me decía que una cosa eran las matemáticas que había estudiado hasta ese momento y otra cosa la carrera, que era como filosofía, filosofía de las matemáticas, y a mí no me gustaban mucho "las letras". Después de saber que tenía plaza para estudiar la carrera me encontré a esa amiga, y cuando le dije que iba a hacer Matemáticas no se lo podía creer, la pena es que ella la iba a estudiar en la Autónoma y yo en la Complutense.

¿Te gustó la carrera? ¿Te pareció buena la forma de enseñar las matemáticas? ¿Te pareció muy dura?
La carrera, sobre todo los primeros años, me pareció muy dura, la verdad es que me acordé mucho de lo que me dijo mi padre de lo de la filosofía, no había números por ningún sitio, todo eran teoremas y demostraciones. La valoración final es que sí me gustó la carrera a pesar de los primeros años. En cuanto a la forma de enseñar las matemáticas hay que decir que algunos profesores ayudaban más que otros a que fuera buena, pero realmente pienso que debería haber sido más práctica, apenas utilizábamos los ordenadores ni la diversidad de "softwares" que existen en el mercado. No digo que todos los años, pero al menos el último año debería adecuarse a las necesidades de la vida laboral.

¿Cuando acabaste la carrera, tenías alguna idea de qué hacer?
En el verano de 1998 empecé a trabajar como becaria en INECO (Ingeniería y Economía del Transporte) ya que el curso me había ido bastante bien y quería tener alguna experiencia laboral. Me enteré a través de un familiar de que buscaban un matemático para llevar temas de tratamiento de bases de datos y explotación de encuestas así que me decidí y me cogieron, pero la verdad es que cuando decidí que quería buscar algún sitio donde trabajar no tenía mucha idea de dónde ponerme a buscar ni de cómo aplicar mis conocimientos en el mundo laboral. Tuve suerte porque apenas tuve que buscar. La idea era trabajar sólo durante el verano, pero al llegar septiembre me ofrecieron continuar en la empresa y acepté. Por tanto, cuando acabé la carrera seguía trabajando en INECO.

¿De qué has trabajado estos años? ¿OHL ha sido tu primer trabajo? ¿Has estudiado algo aparte de Matemáticas?
Como becaria en INECO me empecé a interesar por un "software" de simulación de redes de transportes que utilizaba un compañero, el creador del software es un matemático y todos los algoritmos que contiene se basan en las matemáticas, por lo

que empecé a trabajar con él y asistí a varios cursos para perfeccionar su uso, en junio de 2000 en Sitges y en octubre de 2001 en Montréal (Canadá). En 2002 fui yo la que impartió varios cursos de utilización del "software" y del modelo desarrollado para varios clientes en Pamplona y en Barranquilla (Colombia). En 2003 me invitaron a hacer una ponencia en el "XVII Curso Internacional de Carreteras" impartido en la ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, donde presenté un caso práctico de la demanda del transporte. Durante el curso 2002-2003 estudié el Magister en Ingeniería Matemática que imparte la Universidad Complutense de Madrid, que me pareció muy interesante. Si hubiera existido en el año de acabar la carrera me habría sido aún más útil ya que en él sí que mostraban las diversas áreas en las que aplicar los conocimientos adquiridos en la carrera. Estuve en INECO hasta febrero de 2006. En marzo empecé en ETT (Equipo de Técnicos en Transporte y Territorio) como jefe de proyectos hasta mayo de 2004. En junio de 2004 empecé en OHL Concesiones como Responsable de Estudios de Tráfico hasta la actualidad.

¿Qué haces exactamente en OHL? ¿Es decir, cómo se pueden aplicar las matemáticas al tráfico? ¿Qué ramas de las matemáticas usas más?

Mi trabajo consiste en determinar los ingresos que generará una infraestructura durante el periodo de concesión, es decir, determinar la demanda que usará dicha infraestructura (autopista, autovía, tren ligero, tranvía, etc.). Y en casi todo el proceso se utilizan las matemáticas. Las principales ramas que se utilizan son:

Estadística y Probabilidad: En primer lugar, hay que saber a cuánta gente hay que encuestar para estimar con precisión cuánta gente quiere viajar y a dónde (las encuestas origen/destino y de preferencias declaradas). Estas encuestas sirven para estimar cuántos vehículos van a utilizar la autopista, qué itinerario van a realizar, estimar cómo el precio del peaje afecta al número de vehículos que utilizan la autopista... Después, mediante un método llamado "análisis cluster", se identifican los diferentes tipos de vehículos que van a utilizar la autopista, para qué van a utilizarla (viajes, trabajo..) y a qué horas (a ésto se le llama segmentar la demanda). Por último, los datos obtenidos nos permiten estimar el crecimiento futuro del tráfico con respecto a variables como el crecimiento del PIB o el aumento de la población en los núcleos adyacentes a la autopista.

Computación: Esta rama se utiliza sobre todo para crear algoritmos que determinen el recorrido mínimo entre diferentes ciudades, para modelizar cómo se distribuye el tráfico entre las diferentes carreteras en caso de atasco, etc.

¿Cómo es tu trabajo? ¿Trabajas con un grupo de ingenieros? ¿Cómo te parece tu formación respecto a la de los ingenieros?

Trabajo con un grupo de ingenieros y de financieros a los que facilito la información que necesitan, las series de demanda/ingresos estimados y el detalle para dimensionar firmes, plazas de peaje, enlaces, etc. Ahora mismo dependen directamente de mí 2 personas pero superviso el trabajo de unas 10 empresas subcontratadas, tanto en España como en Brasil, México, Chile, Perú, Puerto Rico y EEUU, para un total de unos 30 proyectos diferentes. Muchas de las personas a las que superviso el trabajo son Ingenieros de Caminos. Mi formación con respecto a la de los ingenieros la considero complementaria, ni mejor ni peor, simplemente es diferente.

¿Volverías a estudiar Matemáticas?

Es una pregunta difícil de contestar ya que no tengo otras referencias, me gustaban también mucho la Arquitectura y la Fisioterapia, por lo que no sé si volvería a estudiarla o probaría con otra. Por el momento estoy satisfecha con mi formación y he llegado a donde estoy por ella.

¿Le recomendarías a alguien estudiar la carrera?

Sí, pero dependiendo de sus expectativas una vez finalizada la carrera. Ahora mismo, nada más acabar la carrera le recomendaría un tipo de "master" como el que yo hice, ya que te abre los ojos a todas las áreas posibles en las que trabajar. Aunque realmente no debería ser una formación complementaria sino que debería estar incluida en la propia carrera.

Muchas gracias, Blanca.

El anterior acertijillo era muy sencillo (mira tú qué pareado me ha quedado). Sí, el del calendario de los dos dados. Era muy fácil darse cuenta de que el 0, el 1 y el 2 tenían que estar en los dos dados. Así, las caras del dado blanco tenían los números 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Las del negro: 0, 1, 2, 6, 7, 8. ¿Y el 9? Nadie dijo que no se pudiera dar la vuelta al 6. Enhorabuena por sus soluciones a Fernando González, Dulcinea Raboso, Sara Ferrero, Irene Fernández y Alberto Castaño. Este mes, un nuevo desafío.

El acertijillo

Los Santos son una pareja puntual y rutinaria. El señor Santos se levanta siempre a la misma hora y después de la ducha se toma el mismo desayuno, que la señora Santos le deja caliente sobre la mesa, con el tiempo justo para salir por la puerta y coger al autobús. Por las tardes, la señora Santos sale de casa y exactamente a las 7 de la tarde aparece en la puerta de la estación y recoge al señor Santos para llevarlo a casa en su coche. El coche de los señores Santos, claro está, siempre avanza a velocidad constante y afortunadamente en el camino entre su casa y la estación no hay semáforos y nunca hay atascos.

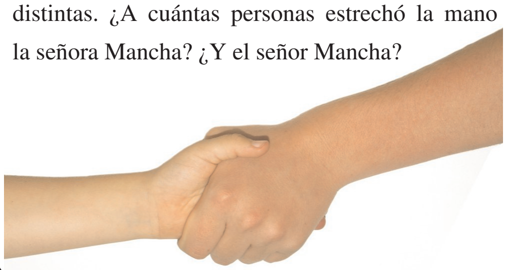
Sin embargo, estos años de puntualidad tocan a su fin. Hoy el señor Santos ha roto su rutina de forma radical. Ha salido antes del trabajo, se ha comprado un jersey de color verde, se ha fumado un puro y ha cogido el tren una hora antes que de costumbre. Como ha llegado a la puerta de la estación exactamente a las 6 de la tarde, ha decidido, en lugar de llamar a su esposa, comenzar a caminar hacia su casa, con la esperanza de encontrársela en el camino. Y así ha sido. Cuando su mujer lo ha encontrado el señor Santos se ha subido al coche, han dado media vuelta de inmediato y han llegado a casa exactamente 15 minutos antes que de costumbre.

¿Durante cuánto tiempo ha estado caminando el señor Santos?

Cuando leas la solución al problema de los *lemmings* te vas a enfadar: es ingeniosamente simple. Como todos son iguales, podemos considerar que no chocan sino que ¡se atraviesan! Después de observar eso, es claro que el tiempo máximo que aguantará algún *lemming* sobre la cuerda es 1 minuto. Enhorabuena por sus soluciones a Miguel Montero, Rubén Cruz, Sara Ferrero, Carla Brull, Raúl Osuna y Dulcinea Raboso.

El problema

El señor y la señora Mancha celebraron una fiesta en su casa, a la que asistieron otras cuatro parejas. Cuando llegaron a la fiesta, algunos de los invitados (incluyendo a los señores Mancha) estrecharon la mano con otros, pero naturalmente nadie le dio la mano a su pareja. Durante la cena, el señor Mancha preguntó a cada una de las otras 9 personas con cuántas había estrechado su mano. Sorprendentemente, recibió 9 respuestas distintas. ¿A cuántas personas estrechó la mano la señora Mancha? ¿Y el señor Mancha?

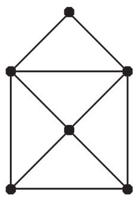


Los puentes de Koenigsberg

- Oye, ¿recuerdas lo de la casita?

- ¿El qué de la casita?

- Esta casita. De pequeños jugábamos a ver si podíamos dibujarla sin levantar el lápiz del papel y sin pintar ninguna línea dos veces.



- Ah, ¡quieres decir el sobre abierto! Sí, claro que lo recuerdo.

- ¿Y recuerdas cómo se hacía?

- A ver... Así no... Así... ¡no! Así... ¡así! ¡Sí, sí que lo recuerdo!

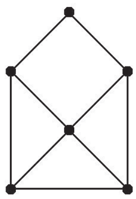
- Ya, pero ha sido suerte. ¿Y si te pusiera algo con muchas más líneas?

- Bueno, pues... Me llevaría más rato...

- ¿Y si no pudiera hacerse? ¿Cómo lo sabrías?

- ¿A qué te refieres con "si no pudiera hacerse"?

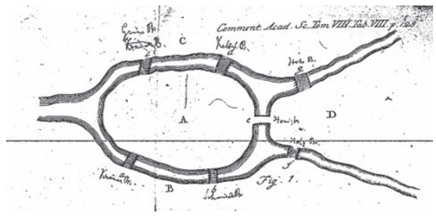
- Intenta hacer lo mismo con esta otra casita...



- Vale... A ver...

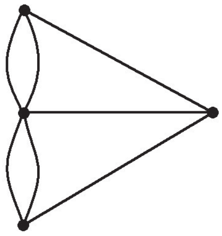
- Y mientras tú lo intentas yo voy a contar una historia. El conocidísimo Leonhard Euler fue uno de los matemáticos de mayor talento de la historia. Vivió en el siglo XVIII y enriqueció casi todas las ramas de las matemáticas. Pero no tenemos tiempo para hablar de su inmensa obra ni de sus impresionantes proezas, así que nos centraremos en lo que nos hace falta ahora mismo.

En julio de 1953 llegó a oídos de Euler el siguiente problema, planteado por los habitantes de la ciudad de Koenigsberg (actualmente Kaliningrado), en Prusia. En ella había una isla, llamada Kneiphof, rodeada por los dos brazos del río Pregel y 7 puentes dispuestos como se indica en la figura. La cuestión era determinar si una persona podía realizar un paseo de forma que cruzara cada uno de los puentes una sola vez.



- Un momento, eso se parece mucho a lo de la casita esta... Que si "se puede" que si "una sola vez"...

- Exactamente. Si cambiamos cada trozo de tierra por un puntito (vértice) y cada puente por una línea (arista) tenemos lo que se conoce como un grafo (más en concreto un multigrafo, porque algunos pares de vértices están unidos por más de una arista), que es totalmente equivalente a lo que teníamos para nuestros propósitos.



- Ya, y da igual lo que mida cada línea, sólo necesitamos "el esquema" como en el plano del metro.

- Efectivamente, como ya apuntó Euler, estamos ante un problema de topología, y ya que lo dices podrías releer la hoja volante número 10, donde hablamos precisamente de la topología en el artículo titulado "La conjetura de Poincaré".

- Bueno y entonces ¿qué es lo que hizo el Euler este?

- Pues resolvió el problema completamente, para cualquier número de regiones (puntos) y puentes (aristas). Demostró que en el caso de Koenigsberg el paseo era imposible y dijo en qué condiciones era posible realizar el paseo y en cuáles no. Y claro, también resolvió todos los pasatiempos sobre dibujar casitas, sobres y todo lo que quieras sin levantar el lápiz del papel.

- ¡Madre mía! Eso será complicadísimo...

- No, de hecho es muy sencillo. Mira, vamos a probar en un momento que el paseo de los puentes de Koenigsberg es imposible. Hablaremos de vértices y aristas en lugar de regiones y puentes porque ya hemos visto que es lo mismo, y sólo pondremos la condición a todos nuestros grafos de que sean conexos, es decir, que desde cualquier punto se pueda ir a cualquier otro siguiendo algunas aristas. Vayamos a cualquier vértice al que lleguen un número impar de aristas (en adelante, llamaremos a estos vértices "impares" y a los otros "pares"). Si el camino no comienza en él, como cada vez que entramos y salimos gastamos dos aristas, tendrá que terminar en él.

- Claro, eso es, si el camino no comienza en el vértice impar, tiene que terminar en él.

- Muy bien. Pues dime tú cómo vas a hacerlo con 4 vértices impares... Un camino ¡no puede empezar o acabar en los 4 vértices!

- ¡Qué tontería!

- Así que ya sabes que si hay más de dos vértices impares el camino es imposible.

- ¿Y si hay exactamente dos?

- Entonces tienes que empezar en uno y terminar en otro.

- ¿Pero se puede hacer siempre?

- Sí, se puede. Y si todos los vértices son pares no sólo se puede sino que se puede hacer un camino cerrado, que empieza y acaba en el mismo vértice.

- ¿Como un circuito de fórmula 1?

- Pues sí señor. Y ya no hay más casos.

- ¿Cómo que no? ¿Y si hay sólo un vértice impar?

- ¿Estás seguro de que eso puede pasar? Toda arista tiene dos extremos, así que el número de extremos de aristas que llegan a todos los vértices es un número par. Eso quiere decir...

- Que el número de vértices impares es par.

- En cuanto a la demostraciónn de que si todos los vértices son pares, tienes un camino cerrado que pasa por todas las aristas, basta con que te imagines todos los posibles caminos que se pueden formar comenzando en algún vértice y siguiendo algunas aristas. Y ahora quédate con el más largo.

- ¿Con el que más aristas tenga?

- Sí, eso es, la longitud es el número de aristas, como nos da igual la medida ponemos que todas miden 1.

- Pero puede haber varios "más largos", si tienen el mismo número de aristas.

- Sí, claro, en ese caso elige uno de ellos. ¿Estás pensando ya en uno de esos caminos? Entonces es cerrado. Si no lo fuera, comenzaría en un vértice en el que sólo se han usado un número impar de aristas, pero, al haber un número par de ellas, podemos añadir al menos una arista a nuestro camino y hacerlo más largo.

- Cosa que es imposible porque ya era el más largo.

- Además el camino pasa por todos los vértices, pues si hubiera uno por el que no pasa puedo empezar en él y mlcanzarnpor conexión o, de manera que se podría hacer tambiéoenemos pasara por todas las aristas entonces cogemos una arista por la que no pase, la añadimos y ya tenemos un camino más largo.

- ¿Y ya está todo?

- Bueno, sólo queda ver que si tenemos exactamente dos vértices impares, podemos hacer un camino que pase por todas las aristas comenzando en uno y terminando en el otro.

- Se me ocurre una cosa. Añadamos una arista que no estaba en el grafo desde un vértice impar al otro. ¡Ahora todos los vértices son pares!

- Claro, ahora tienes un camino cerrado y...

- Y ahora vuelvo a quitar la arista que había añadido y ¡tengo un camino que empieza en un vértice y termina en el otro!

- ¡Perfecto! Y ahora es muy fácil entender por qué podías pintar la primera casita y por qué tenías que empezar y terminar en esos vértices y por qué no podías pintar la segunda...

- ... que nunca se podrá pintar, igual que nunca se podrá hacer el paseo de los puentes de Koenigsberg.

- Bueno, lo cierto es que algunos puentes ya no se conservan y... pon Kaliningrado en "Google Maps" y ¡¡¡mira!!!

Imposible, pero no tan difícil

por Fernando Chamizo

Innumerables veces nos han dicho que la integral $\int e^{-x^2}\,dx$ no se puede calcular con funciones elementales y lo más probable es que todas ellas se olvidaran de explicarnos por qué. La demostración no es tan complicada como cabría esperar y además es sorprendentemente general. Desafortunadamente este margen de la hoja volante es demasiado estrecho para contenerla… sin embargo confiamos en que sea espacioso para dar una idea.

Aclaremos primero cuáles son las funciones elementales. Un vistazo a nuestra calculadora nos lleva a considerar raíces, exponenciales, logaritmos, senos, cosenos, arcosenos y arcocosenos. Si usamos números complejos las funciones trigonométricas se pueden escribir con exponenciales ya que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, mientras que sus inversas requieren logaritmos. Denotemos con $\mathbb{C}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ los cocientes de polinomios complejos en $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Así $\mathbb{C}(x)$ son las funciones racionales en $\mathbb{C}$, si y_1 es una exponencial o un logaritmo de un elemento de $\mathbb{C}(x)$ o la solución de una ecuación algebraica (por ejemplo una raíz), entonces $\mathbb{C}(x, y_1)$ es un cuerpo cuyos elementos diríamos que son funciones elementales, e iterando podemos crear cuerpos $K = \mathbb{C}(x, y_1, \dots, y_n)$ y definir matemáticamente función elemental como la que está en alguno de estos K. El resultado fundamental, debido a Liouville y anticipado parcialmente por Laplace, es que dada $f \in K$ si $\int f$ es una función elemental (quizá no en K) entonces necesariamente $\int f = f_0 + \sum \lambda_j \log f_j$ con $f_0, f_1, \dots \in K$ y $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Aplicándolo al caso $K = \mathbb{C}(x, f(x))$, $f(x) = e^{P(x)}$ con P un polinomio, al derivar y eliminar denominadores se deduce con algún trabajo (pero no demasiado) que la única posibilidad es $\lambda_j = 0$ y $f_0(x) = Q(x)f(x)$ donde Q es un polinomio tal que $1 = Q' + QP'$, lo que lleva a una contradicción si $QP' \notin \mathbb{C}$. En definitiva, se concluye que $\int e^{P(x)}\,dx$ no se puede calcular si el grado de P es mayor que uno.

¿Y cómo se demuestra el resultado fundamental? Si alguien nos dijera que para cierta $f \in \mathbb{C}(x)$ se tiene $\int f \in \mathbb{C}(x, e^x)$, sin mostrarle el modo de hacer la integral le convenceríamos de que la dependencia en e^x es superflua sin más que derivar, ya que una exponencial no puede desaparecer por derivación. Cambiando e^x por una raíz ocurriría algo similar y también por un logaritmo excepto en el caso de tener una función lineal de un logaritmo, ya que al derivar $a \log g + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, el logaritmo desaparece. El resultado fundamental es una extensión de este hecho de $\mathbb{C}(x)$ a K y garantiza que al integrar no pueden aparecer cosas que no estuvieran ya en el integrando, porque al derivar habría una contradicción, salvo combinaciones lineales de logaritmos, pues una vez derivadas esconden su aspecto logarítmico.

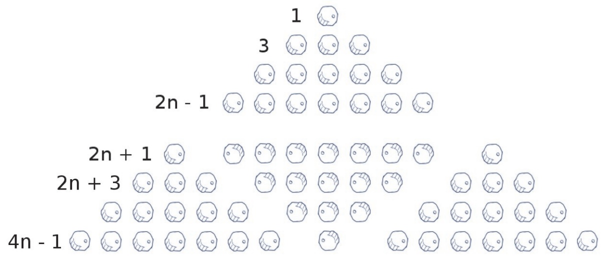
Para la prueba completa véase:
`http://www.uv.es/%7Eivorra/Libros/Primitivas.pdf`

Visualización

¿Te has fijado alguna vez en lo que ocurre con los cocientes de sumas de impares consecutivos?

1/3 = (1 + 3) / (5 + 7) = (1 + 3 + 5) / (7 + 9 + 11) = ...

¡Qué curioso! Parece que seguirá así siempre... ¿Sabrías probarlo? No contestes todavía, recuerda que una imagen vale más que mil palabras.



Referencia: S. Drake, *Galileo Studies*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1970, 218-219.

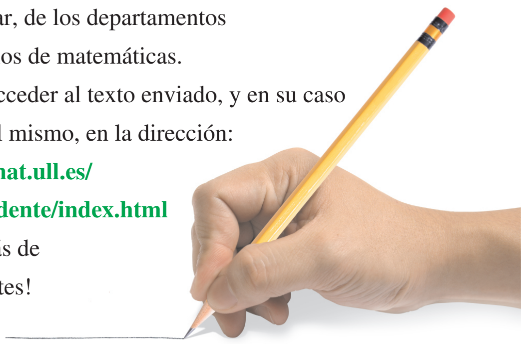
Carta al presidente

Un grupo inicial de 46 matemáticos españoles tomó la iniciativa de dirigir un manuscrito al Señor Presidente del Gobierno, Don José Luis Rodríguez Zapatero, mostrando la preocupación existente ante el creciente estado de envejecimiento de las plantillas que conforman los cuerpos docentes universitarios, y en particular, de los departamentos universitarios de matemáticas.

Se puede acceder al texto enviado, y en su caso adherirse al mismo, en la dirección:

www.anamat.ull.es/cartapresidente/index.html

¡Ya son más de 200 firmantes!



Departamento de Matemáticas UAM

Escrito por Matías Núñez y Carlos Vinuesa.

Agradecemos la colaboración de Blanca Gómez y Fernando Chamizo.

Cofinanciado por:

i-math ingenio mathematica consolider ingenio2010

FECYT FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA