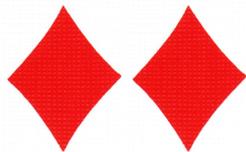


"El lector avanzado que pase por alto partes que le parecen muy elementales podría perderse más que el lector menos avanzado que pase por alto partes que le parecen muy complejas."

George Polya, MATEMÁTICAS Y RAZONAMIENTO PLAUSIBLE VOLUMEN I: INDUCCIÓN Y ANALOGÍA EN MATEMÁTICAS.



# La hoja volante

<http://www.uam.es/hojavolante>

Número 18. Octubre 2009.

## IMC 2009

Durante los días 25 al 30 de julio de 2009, tuvo lugar en Budapest (Hungría) la decimosexta edición de la Competición Internacional de Matemáticas (IMC). Los concursantes tuvieron que enfrentarse a dos sesiones

de 5 horas, en cada una de las cuales intentaron resolver 5 problemas de álgebra, análisis (real y complejo), geometría y combinatoria.

Casi 350 estudiantes de todo el mundo se reunieron en la fascinante capital húngara con motivo de la competición. Tres estudiantes de nuestra Universidad, David Alfaya, Guillermo Rey y Juan de Vicente (acompañados en la foto del líder del equipo, Carlos Vinuesa), acudieron a la cita, obteniendo respectivamente un tercer premio, una mención de honor y un certificado, además de "casi" perdiendo el vuelo de vuelta para darle emoción a la cosa. Cerca de 25 de los concursantes eran de las distintas universidades españolas. En total, la representación española consiguió 3 segundos premios y 4 terceros premios. El ganador de la competición fue el ruso Alexander Efimov y el segundo el polaco Jakub Konieczny.



Más información sobre la competición, incluyendo problemas y soluciones, en: <http://www.imc-math.org.uk>.

## ¿Sabías que...?

La siguiente "anécdota" sobre las potencias de dos es muy conocida. Hablaremos más sobre las potencias de dos en el artículo "La conjetura de Hcabdlog", en este mismo número de la revista.

Cuenta la leyenda que hace muchos siglos en un país del lejano oriente el rey decidió agradecer al inventor del ajedrez, obsequiándole con lo que él quisiera. El inventor pidió suficiente trigo como para poner en la primera casilla un grano, en la segunda 2, en la tercera 4, en la cuarta 8 y así sucesivamente hasta llegar al sexagésimo cuarto escaque del tablero.

El rey pidió a los matemáticos del reino que calcularan cuánto trigo se le debía y que se le pagara. Los matemáticos, tras hacer los cálculos, informaron al rey de que no había tanto trigo en el reino y de que nunca lo habría, ni siquiera con muchos siglos de cosechas...



Y es que  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{64} = 2^{65} - 1$  es un número muy muy grande. Podemos escribirlo sin dificultad: 36.893.488.147.419.103.231. Sin embargo, es tan grande que no sólo todo el reino no bastaría sino que ¡toda la superficie de la tierra (incluyendo los océanos, que ocupan más del 70% de esta) recubierta de granos de trigo tampoco bastaría! ¿A qué esperas? ¡Haz tus cuentas y sorpréndete!

Cuenta "la leyenda de la leyenda" que uno de los matemáticos salvó el honor del rey ofreciendo al inventor pagarle lo que él pedía más todo lo que se obtuviera agregando más y más casillas al tablero sin fin. Cuando el inventor aceptó - pues sin duda de esta manera obtendría más cantidad de trigo - el matemático se dispuso a calcular el número de granos de trigo que le pagarían, T.

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

$$T = 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots)$$

$$T = 1 + 2T$$

$$T = -1$$

Para saber más sobre estos y otros temas, se puede consultar la sección "Ajedrez y matemática" de la revista "Un mosaico de ajedrez" en la dirección <http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ContribucionesN12001/ajedrez/pag13.html>.

### EUROMATH 2010

Bajo el lema "Creatividad e innovación desde edades tempranas. Los inventores del mañana: crean-intercambian-crecen", la Sociedad Matemática de Chipre anuncia el congreso de estudiantes europeos de matemáticas EUROMATH 2010, que se celebrará del



25 al 28 de febrero de 2010 en Bad Goisern-Austria (y "bad" no es "malo" en inglés sino "baño" en alemán, por los baños termales, por si alguien necesita alguna excusa para ir). Se anima a estudiantes de 12 a 18 años a que se inscriban y envíen resúmenes de sus trabajos individuales o en grupo antes del 30 de noviembre.

El lenguaje oficial del congreso será el inglés.

Toda la información en <http://www.euromath.org>.

### IV edición de los Premios para estudiantes de Secundaria del Dpto. de Matemáticas de la UAM

El Departamento de Matemáticas de la UAM convoca la cuarta edición de estos premios, con el objetivo de fomentar entre los estudiantes de secundaria el interés por las Matemáticas y los temas relacionados con ellas.

Se premiarán los mejores trabajos realizados por un equipo de estudiantes que cursen estudios a partir del segundo ciclo de la ESO.

Solicitudes hasta el 18 de diciembre de 2009.

Bases y trabajos de ediciones anteriores en:

<http://www.uam.es/matem>.

### IX Semana de la Ciencia en la UAM

Del 10 al 17 de noviembre se celebrará la Semana de la Ciencia en el Departamento de Matemáticas de la UAM. Cada grupo de visitantes asistirá a una conferencia y participará en dos talleres.

#### Conferencias:

- Eugenio Hernández (martes 10): *La magia de las permutaciones.*
- Carlos Vinuesa (miércoles 11): *¡No me lo creo!*
- Mari Luz García (jueves 12): *Elecciones caóticas.*
- Bartolomé Barceló (viernes 13): *El GPS: el final de un gran reto para la Ciencia y la Matemática.*
- José Ramón Berrendero (martes 17): *Todos cuentan: algunas curiosidades estadísticas.*

algunas curiosidades estadísticas.

Talleres:

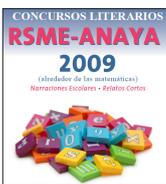
- Códigos secretos
- Matemagia
- Poliedros
- Pompas de jabón

Más información en: <http://www.uam.es/matem>.

### Concursos literarios de narraciones escolares y relatos cortos RSME-ANAYA

La Real Sociedad Matemática Española, en colaboración con la editorial ANAYA y las editoriales Nivola y Proyecto Sur, convoca los concursos literarios de Narraciones Escolares y Relatos Cortos RSME-ANAYA 2008 (V Edición de los concursos literarios DivulgaMAT).

Las bases de los concursos pueden verse en [www.divulgamat.net](http://www.divulgamat.net) (DivulgaMAT, centro virtual de divulgación de las matemáticas de la RSME) y en [www.rsme.es](http://www.rsme.es).



# X E.N.E.M.

por María Ángeles Antón

SMS de Carlos: "Hola Marian, ¿me podrías mandar unas fotos y un resumen del encuentro? Y por favor, no comentes lo de que el que dio el taller de magia lo hizo muy bien y fue encantador, ingenioso y graciosísimo, que a la gente no le gusta leer eso en la hoja. Muchas gracias".



¡Madre mía! ¿Qué podría decir de la organización de este encuentro para resumir una semana tan maravillosa? Una semana en la que conocimos cómo serán los Grados, nos dejamos atrapar por el discreto encanto del azar, las pompas de jabón nos desvelaron el techo



del Estadio Olímpico de Munich, aprendimos modelos matemáticos de ayuda a la decisión en logística humanitaria o descubrimos qué relación hay entre las matemáticas y el cáncer.

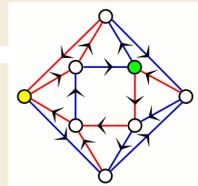
Creo que no hay palabras (ni español) para describir la cantidad de sentimientos, dudas, anécdotas, emociones... que han surgido y que hacen que este X Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemáticas sea irreplicable.



Desde la organización queremos dar las gracias a todas las personas que han creído en nuestro proyecto y nos han ayudado a hacerlo realidad. Gracias a las 80 personas que han venido de toda España para gritar bien fuerte que las matemáticas siguen vivas. Y por supuesto decir a todos aquellos que no han venido que os esperamos el año que viene en Badajoz.

## Respuesta al problema anterior

Estamos vendados y sobre la mesa hay 10 monedas de las cuales 5 están cara arriba. Para hacer dos grupos con el mismo número de monedas cara arriba, basta con que separemos las monedas en dos grupos de 5, de manera que en uno habrá  $x$  cara arriba y en el otro  $5-x$ . Si ahora volteamos todas las del segundo grupo, en los dos grupos habrá 5 cara arriba. Enhorabuena a Luis Felipe Prieto, Mónica Vallejo, Daniel Álvarez y Miguel Montero por sus correctísimas respuestas.



## Respuesta al acertijillo anterior

Estamos en el punto amarillo y con probabilidad  $p$  seguimos un camino azul-rojo-rojo y con probabilidad  $1-p$  seguimos un camino azul-azul-rojo. Así, la probabilidad de llegar en exactamente  $n$  intentos al punto verde por vez primera es:  $p^{n-1}(1-p)$  (y puede que en este momento suene en tu cabeza la expresión "distribución geométrica", pero si no suena no pasa nada...).

La esperanza es la suma de cada valor por su probabilidad:  $1(1-p) + 2p(1-p) + 3p^2(1-p) + 4p^3(1-p) + \dots = (1-p)(1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \dots) = (1-p) d/dp(p + p^2 + p^3 + p^4 + \dots) = (1-p) d/dp(p/(1-p)) = (1-p)/(1-p)^2 = 1/(1-p)$ , donde  $d/dp$  significa la derivada respecto de  $p$  y hemos usado la fórmula de la suma de una serie geométrica. Luego necesitamos una media de  $1/(1-p)$  intentos para llegar al punto verde y la  $p$  que hace que lleguemos en una media de 3 intentos es tal que  $1/(1-p)=3$ , luego  $p=2/3$ . Enhorabuena a Luis Felipe prieto por su solución.



## El problema

Evaristo Pi ha escrito un número en un papel y al multiplicarlo por la puntuación obtenida al lanzar un dado consigue un número distinto que coincide con el primero cuando se escriben sus dígitos en sentido contrario. ¿Qué puntuación ha salido en el dado?

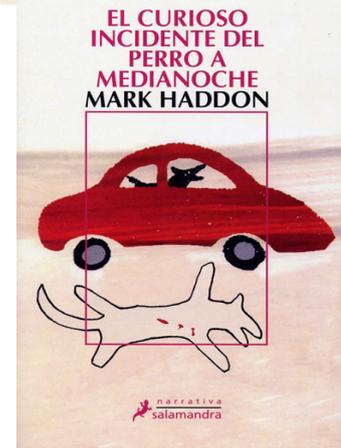


Agradecemos la sugerencia del problema a Fernando Chamizo. Respuestas a: [hojavalante@uam.es](mailto:hojavalante@uam.es).

## El acertijillo

Anoche descolgué el reloj de pared de mi habitación y al volver a colgarlo lo hice al revés, de manera que cuando me he despertado a las 12:30 de la noche, he mirado la hora y he pensado que eran las 6:00. Sí ¡vaya gracia! Luego me he dado cuenta de que, en realidad, si le doy la vuelta a un reloj cuando marca las 12:30 no me salen las 6:00 sino que me sale una hora "sin sentido" por-

que la aguja de las horas está entre el 6 y el 7 mientras que la de los minutos está justo arriba. ¿Cuándo darán la hora correcta las agujas del reloj si lo sigo mirando al revés? ¿Cuáles son las horas "con sentido" que marca el reloj al revés? Y, por último, imagina que en lugar de dar la vuelta al reloj, lo mirara en un espejo. ¿Cuándo dará este nuevo reloj la hora correcta y qué horas "con sentido" puede marcar este reloj? Respuestas a: [hojavalante@uam.es](mailto:hojavalante@uam.es).



Agradecemos a Constantino de la Fuente que nos recomendará este libro, una auténtica delicia.

## El curioso incidente del perro a medianoche de Mark Haddon

Me encanta "El curioso incidente del perro a medianoche". No es un libro como los demás. Otros libros son aburridos al principio y los tienes que seguir leyendo porque crees que más adelante te engancharás. Este libro es al revés, te engancha él a ti. No te engancha por los hechos que ocurren sino por la particular forma en que Christopher los ve.

Christopher es el protagonista. De hecho, el libro lo ha escrito Christopher. Christopher no es como los otros protagonistas de novelas. Es un personaje muy cercano. Christopher es sencillo, extremadamente sencillo, pero a la vez es profundo, muy profundo. A veces te preguntas cómo puede ser tan tonto y otras cómo puede ser tan brillante. Christopher te hace reír y te emociona, a veces incluso en la misma línea.

A Christopher le encantan las matemáticas. Pero esta no es una novela sobre matemáticas. A veces Christopher habla sobre matemáticas y a veces habla sobre cosas de la vida, pero siempre lo hace de esa forma tan interesante en que sólo él sabe hacerlo.

Y por eso Christopher no es como los demás. Y por eso me encanta "El curioso incidente del perro a medianoche". Y por eso esta no es una crítica como todas las demás.

Y esta es la crítica que habría escrito Christopher si leyera "El curioso incidente del perro a medianoche" de Mark Haddon.

# La conjetura de Hcabdlog

## una manera de redescubrir las potencias de 2 y los primos...

- En 1742 el Matemático Christian Goldbach se fijó en que los números pares se podían expresar como la suma de dos números primos. Es fácil verlo con números pequeños: 18 es  $7 + 11$ , 24 es  $5 + 19$ , 50 es  $13 + 37$  y así todos... Dime un número par.

- ¡El 100!, ¡el 1000!

- 100 es  $83 + 17$  y 1000 es  $521 + 479$ . Y con números mucho más grandes también, por ejemplo, un número al azar [mira la matrícula de un coche] 7112. 7112 es...  $5119 + 1993$ , primos los 2. La cuestión es que no se puede ir comprobando si todos los números pares son la suma de dos números primos porque los números son infinitos. Habría que encontrar una ley que los abarcara a todos. Y encontrarla se ha convertido en el problema más difícil de la historia de las matemáticas.

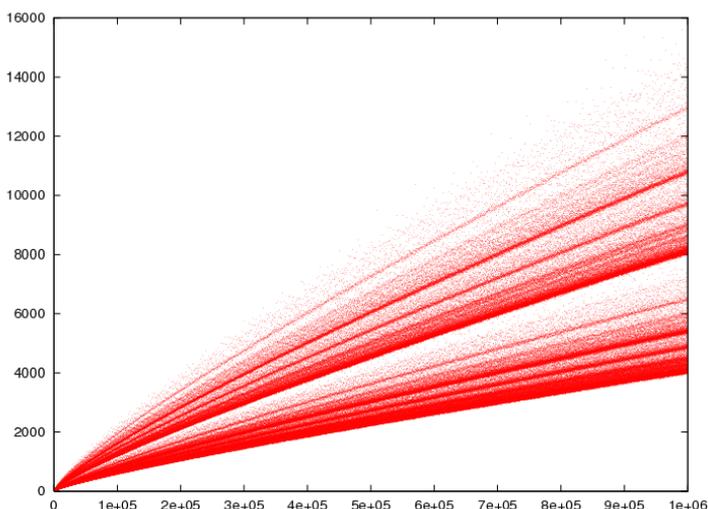
- Con estas palabras de Alejo Sauras, el hijo del Fiti en "Los Serrano", comienza la ocurrencia película de Luis Piedrahíta y Rodrigo Sopeña "La habitación de Fermat".

- Escena en la que por cierto se está ligando a dos o tres chavalas contándoles estas cosas. ¡Por una vez las matemáticas sirven para algo! Dicho sea de paso, luego se veía que el coche del que había mirado la matrícula era el suyo propio...

- El caso es que aunque la conjetura se ha comprobado para todos los números pares de hasta 18 cifras, nadie ha conseguido demostrar esta inocente observación que Goldbach hizo al maestro Leonard Euler en una carta.

- ¡Una cosa! Estoy viendo que en el primer ejemplo que poníamos, 18, tenemos dos formas distintas de escribirlo como suma de dos primos: 18 es  $7 + 11$  y también es  $5 + 13$ .

- Por supuesto. La conjetura de Goldbach no dice que la forma de expresar cada par como suma de dos primos sea única. De hecho, si te fijas, la mayoría de los números pares se pueden escribir de muchas maneras como suma de dos primos, y cuanto más grandes sean los números parece que pueden escribirse de más maneras. Mira, alguien ha hecho y nosotros hemos copiado, la representación del número de maneras de expresar cada número par hasta un millón como suma de dos primos.



- Ya veo, la tendencia de la función es creciente, pero puede que un número se represente de muchas maneras y justo el siguiente de pocas, por eso la función parece más una nube de puntos que una línea...

- Eso es, y aunque todos pensamos que no, podría haber un número para el que la función valiera 0 y entonces la conjetura de Goldbach sería falsa. Pero casi que no lo busques a mano porque de haberlo va a ser grandecito...

- En cualquier caso el título de este diálogo es suficientemente raro como para hacerme pensar que vamos a hablar de otra cosa.

- Sí, vamos a intentar probar otra conjetura.

- Antes tendremos que hacerla.

- Ahí va. Conjeturo que todo número primo se puede escribir como suma de dos números consecutivos de manera única.

- Pues empezamos bien, el 2 no es suma de números consecutivos.  $1 + 2$  es 3 que se pasa de 2.

- Vale. Reconjeturo: todo número primo impar se puede escribir como suma de dos números consecutivos de manera única.

- Muy bien, entonces 3 es el primer primo impar y es  $1 + 2$ , 5 es  $2 + 3$ , 7 es  $3 + 4$ , 11 es  $5 + 6$ , 13 es  $6 + 7$ ... ¡parece que va a ser cierto!

- Pero tendremos que probarlo... Hay varias formas de hacerlo. Una es mirar qué números se pueden obtener como suma de dos números consecutivos.

- Veamos,  $1 + 2 = 3$ ,  $2 + 3 = 5$ ,  $3 + 4 = 7$ ,  $4 + 5 = 9$ ,  $5 + 6 = 11$ ... Un momento ¡obtengo todos los impares!

- Claro. Y además, si te fijas, está claro que las sumas que vas obteniendo se llevarán siempre 2, pues, para obtener la siguiente, a la suma anterior le quitas el número pequeño y sumas el que es dos unidades mayor.

- Pues ya está, si todo impar se obtiene como suma de dos números consecutivos entonces todo primo impar se obtiene como suma de dos números consecutivos.

- Es más, si no permitimos que nuestras sumas incluyan el número 0, como vamos a hacer, entonces todos los impares menos el 1 se pueden escribir como suma de dos números consecutivos, para ser exactos. Pero yo he dicho de manera única...

- Ya, pero eso es una tontería porque si un número se escribe como suma de dos consecutivos, cualquier otro par de números consecutivos va a sumar o bien más o bien menos pero nunca igual.

- ¡Perfecto!

- Pues qué conjetura más mala, la hemos probado sin despeinarnos.

- En realidad era sólo para calentar. Ahora viene la conjetura buena. La llamaré "conjetura de Hcabdlog".

- ¿Y por qué ese nombre tan raro?

- Bueno, en la conjetura de Goldbach ponemos números como suma de dos primos y aquí ponemos primos como suma de dos números. Digamos que es algo como... al revés que GOLD-BACH... HCABDLOG.

- Curioso... la única letra muda, las 4 primeras letras del abecedario desordenadas y un logaritmo... Nunca dejarán de sorprenderme los nombres de los matemáticos al revés...

- En realidad es la forma en que pronuncia mi primo pequeño el nombre de Carlos... En cualquier caso ¡ahí va!

**CONJETURA DE HCABDLOG: Un número es un primo impar si y sólo si se puede escribir como suma de 2 números consecutivos pero no se puede escribir como suma de 3, ni de 4, ni de 5... ni de más números consecutivos.**

- No fastidies...

- Pues sí señor. De hecho esta conjetura no es una conjetura sino un teorema, porque podemos probarlo y vamos a probarlo. Es más, vamos a demostrar cuáles son los números que se pueden poner como suma de números consecutivos y de cuántas formas pueden ponerse.

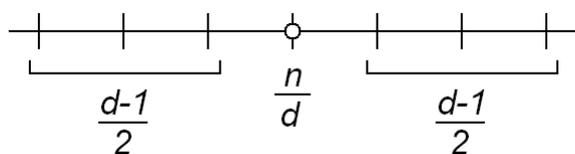
- Primero podríamos familiarizarnos un poco con el problema. 1 no puedo obtenerlo y 2 tampoco.  $3 = 1 + 2$ . ¡4 tampoco puedo obtenerlo!  $5 = 2 + 3$ ,  $6 = 1 + 2 + 3$ ,  $7 = 3 + 4$ . ¡8 no puedo!  $9 = 4 + 5$ ,  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ ,  $11 = 5 + 6$ ,  $12 = 3 + 4 + 5$ ,  $13 = 6 + 7$ ,  $14 = 2 + 3 + 4 + 5$ ,  $15 = 7 + 8$  ¡y 16 tampoco puedo!

- Fíjate bien, no puedes obtener ni el 1, ni el 2, ni el 4, ni el 8, ni el 16... ¿Cuál dirías que será el próximo que no puedes obtener?

- Apuesto a que será el 32.

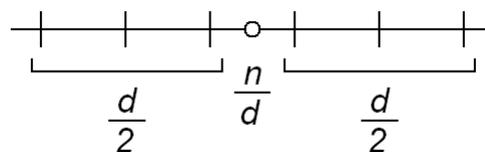
- ¡Eso es! Parece que los números que no se pueden poner como suma de consecutivos son exactamente ¡las potencias de 2!

- ¡Qué curioso!
- Si intentaras ahora aproximarte al problema de forma “más organizada”, verías que al igual que las sumas de 2 números consecutivos te dan 3, 5, 7, 9, 11, 13..., las de 3 te dan 6, 9, 12, 15, 18, 21..., las de 4 te dan 10, 14, 18, 22, 26, 30..., las de 5 te dan 15, 20, 25, 30, 35, 40..., las de 6 te dan 21, 27, 33, 39, 45, 51..., las de 7 te dan 28, 35, 42, 49, 56, 63...
- ¡Vale ya, hombre! Así que siempre las sumas se llevan tantas unidades como el número de sumandos.
- Claro, eso es igual de fácil que antes, la suma siguiente se obtiene de la anterior quitando el primer número y añadiendo uno que es tantas unidades mayor como el número de sumandos. Pero no sólo eso, si te fijas, las sumas de un número impar de términos son números de su tabla de multiplicar...
- ...cosa que no ocurre para sumas de un número par de términos.
- Eso lo puedes demostrar muy fácilmente utilizando la conocida fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética, que Gauss ya se sabía a los 10 años... Pero no vamos a hacerlo, el lector interesado puede mirarlo por su cuenta.
- De sobra sabes que nadie lo va a mirar...
- Lo mismo una persona sí que lo mira... Si sólo es poner la fórmula para el caso particular de sumar  $d$  números consecutivos y mirar lo que pasa si  $d$  es par y si  $d$  es impar...
- Pues por más sugerencia que des, como no les motives no lo hacen...
- Vale, pues sorteamos un Ferrari entre los que lo hagan... (NOTA: ESTA PROMOCIÓN PUEDE SER FALSA).
- ¿Y qué ganarían probando eso?
- Mira, si te fijas, las potencias de dos son exactamente los números que no tienen divisores impares.
- Salvo el 1.
- Que no tienen divisores impares salvo el 1. Y si una prueba que las sumas de un número impar de números consecutivos son siempre un múltiplo de ese impar, dado cualquier número con un divisor impar que sea un poco grande (para los pequeños podríamos tener problemas), se podrá escribir como suma de números consecutivos ¡tantos como ese divisor impar!
- Parece un trabalenguas pero lo he entendido, no es una demostración de que los números que no son potencia de dos puedan ponerse como suma de consecutivos, pero “casi”.
- Eso es, sirve sólo para números grandes... Sin embargo, nuestra prueba irá por otro lado y probará muchas más cosas a la vez. La idea básica es la siguiente. Para que no parezca un trabalenguas, pondremos nombres a las cosas. Tenemos el número  $n$  y queremos ver si podemos escribirlo como suma de  $d$  naturales consecutivos. Imaginemos primero que  $d$  es impar.
- Vale, por ejemplo, si el número es 60 y queremos ver si se escribe como suma de 3 números consecutivos...
- ...entonces ¿cómo tendrían que ser esos números de grandes?
- Pues más o menos alrededor de 20, porque  $20 \cdot 3 = 60$ .
- ¡Claro! De hecho, serán 19, 20 y 21.
- Ya veo, si al dividir  $n$  entre el número impar,  $d$ , nos sale exacto, entonces podremos coger ese número y los que hay a sus dos lados “simétricamente” hasta tener  $d$ . Y esos  $d$  números sumarán  $d$  veces  $n/d$ , o sea,  $n$ , que es lo que queremos. Lo dibujo:

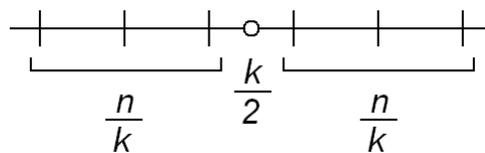


- ¡Muy bien! Sólo te ha faltado un pequeño detalle y es que podría

- ser que alguno de los números de la izquierda fuera negativo. Para que ninguno lo sea, tenemos que imponer la condición de que  $(n/d) - 1$  sea mayor o igual que  $(d-1)/2$ , o lo que es lo mismo, que  $d(d+1)/2$  sea menor o igual que  $n$ .
- Ah, claro, es verdad. Entonces, para cada divisor impar,  $d$ , de  $n$ , que cumpla que  $d(d+1)/2$  es menor o igual que  $n$ , tenemos una representación de  $n$  como suma de  $d$  números consecutivos.
- Eso en cuanto a suma de un número impar de números consecutivos. Y está claro que con un número impar de sumandos no hay más. O bien se cumple lo de tu dibujito o bien no se puede...
- ¿Y para los pares? Para los pares ya no funciona lo mismo, no puedo coger mis sumandos simétricamente alrededor de un natural...
- No, claro. Pero piensa en lo que necesitas en este caso. Quieres que al dividir  $n$  entre el número de sumandos,  $d$ , que ahora es par, te dé un número situado justo en el medio de dos naturales...
- O sea, un “coma 5”.
- Eso es, luego  $d$  será un divisor de  $2n$  pero no de  $n$ .
- Ya veo, ya, algo así:



- Claro, y si  $d$  divide a  $2n$  y no a  $n$ , tendremos que  $2n/d = k$ , que será un divisor impar de  $n$ .
- Es decir, que el número de sumandos será  $d = 2n/k$ , y el dibujo:



- Y entonces, dado un divisor impar,  $k$ , de  $n$ , tenemos una suma de  $2n/k$  naturales consecutivos que es igual a  $n$ . La única condición que tenemos que imponer, de nuevo para que no haya números negativos, es que  $k/2 + 1/2$  sea mayor que  $n/k$ , es decir que  $k(k+1)/2$  sea mayor que  $n$ .
- Luego para cada divisor impar,  $k$ , de  $n$ , que cumpla que  $k(k+1)/2$  es mayor que  $n$ , tenemos una representación de  $n$  como suma de  $2n/k$  números consecutivos.
- Ajá. Luego juntando lo que hemos obtenido para el caso de un número impar de sumandos y para el de un número par, tenemos que: **un número se escribe como suma de consecutivos de exactamente tantas maneras como divisores impares tenga.**
- ¡Pues ya está todo hecho! Ahora es una tontería probar que los únicos números que no se pueden escribir como suma de consecutivos son las potencias de dos, pues son los únicos números sin divisores impares (el 1 no vale porque no queremos sumar un número consecutivo).
- Y también que los únicos números que se pueden escribir como suma de dos consecutivos pero no de 3, ni de 4, ni de 5... ni de más son los primos impares, pues son los que tienen un único divisor impar.

Agradecemos a Constantino de la Fuente que llamara nuestra atención sobre “el problema de la suma de números consecutivos” en su charla “Literatura en clase de matemáticas”. En la página web de su instituto <http://www.lopezdemendoza.es> (Menú Departamentos-Matemáticas-Otros) podemos encontrar guiones de trabajo para varias novelas relacionadas con las matemáticas, muy adecuados para estudiantes de instituto.



Financiado por la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología - Ministerio de Ciencia e Innovación y por el Proyecto de desarrollo y difusión del nuevo plan de estudios de Matemáticas (convocatoria del “Programa de implantación y desarrollo de las nuevas titulaciones de grado y posgrado” de la OCE, UAM).

Departamento de Matemáticas. Escrito por Carlos Vinuesa. Agradecemos su colaboración a María Ángeles Antón, a Fernando Chamizo y a Wikipedia por la gráfica de las sumas de dos primos.

