“Si yo pinto mi perro exactamente como es, naturalmente tendré dos perros, pero no una obra de arte”
Johann W. Goethe

La hoja volante

Número 8. Febrero 2006

EDITORIAL

Estamos en el año 2006 después de Cristo. Toda la Galia está ocupada por los romanos... ¿Toda? !No! Una aldea poblada por irreductibles galos resiste todavía y siempre al invasor. Ah, no, que eso era otra cosa... Empecemos de nuevo.
Estamos en el año 2006 y ¿qué ha cambiado? Los mismos regalos de reyes, las mismas clases, los mismos exámenes... Todo sigue igual. Y es que todo es periódico. ¿Todo? ¡No! Una revistilla (Nota: obsérvese el bello recurso literario que constituye la contraposición de periódico con revistilla) de cuatro páginas resiste todavía a la monotonía (Nota: obsérvese el precioso pareado). Y es que en la hoja no paramos de innovar (Nota: obsérvese la falta de modestia) (Nota: obsérvese el reiterado uso de las notas que hace el autor). Y tras demostraros que hay cosas que nunca cambian como nuestro cansino sentido del humor, nos complace anunciaros nuestras numerosas (porque están marcadas con los números 1), 2) y 3)) novedades:
1) Una nueva página web: http://www.uam.es/hojavolante. La web nace tanto con la idea de permitir un acceso más fácil y rápido a la hoja desde cualquier lugar del mundo como con la de poder ampliar en ella el contenido (textos, imágenes...) de cada número.
2) Un nuevo foro: http://verso.mat.uam.es/hojavolante (también hay un enlace al foro en la web para que no tengáis que perder la mañana escribiendo eso). El foro es un lugar para intercambiar noticias, ideas y todo aquello que tenga que ver con las matemáticas. En él estáis invitados a participar - tanto profesores como alumnos de todos los niveles - con vuestras opiniones, comentarios y sugerencias. ¿A qué esperas? ¡Regístrate!
3) Una nueva dirección de correo: hojavolante@uam.es. Es la dirección a la que debéis enviar vuestras preguntas, sugerencias, comentarios, colaboraciones, respuestas a los problemas y acertijos...
Por último, recordad que si queréis conseguir la versión impresa de algún número de la hoja, en la Secretaría del Departamento de Matemáticas de la UAM hay varias copias impresas de algunos números. Podéis probar suerte por si todavía quedan del número que queréis (cuanto más nuevo, más probable que esté). Y eso es todo. ¡Disfrutadla!

Concurso de fotografía matemática

Ya lo sabemos, llegamos tarde. Bueno, o pronto, según se mire... El departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad Antonio de Nebrija organiza cada año, como ya hemos comentado en hojas anteriores, un concurso de fotografía matemática. Se pueden presentar fotografías o fotocomposiciones relacionadas con las matemáticas. Los ganadores de la IX edición en el apartado de fotografía tradicional (esto fue el 18 de julio de 2005, que ya ha llovido) fueron:
Primer premio: Juan Ramón Martín Catoira por "Perspectiva natural" (se puede ver debajo).
Segundo premio: Ana Belén Rodríguez Raposo por "La sabiduría popular resuelve el problema de Kepler (bidimensional)" (en la web se verá debajo).
Así que a aquellos que os guste la fotografía todavía estáis a tiempo de presentaros al X concurso.

Para más información y para ver fotografías de ediciones anteriores (además de las dos ganadoras de este año en tamaño gigante): http://www.nebrija.es/~areama/concurso2005.html

Las bases del X Concurso de Fotografía Matemática se anunciarán a lo largo del curso 2005-2006.

Más información en http://www.nebrija.com

La ley y el orden

¿Matematicas y derecho? Os preguntaréis si existe algún tipo de relación entre estos dos campos del saber. Pues sí, existe ¡y de qué manera!. Michel Balinski, Director de Investigación en Matemáticas del CNRS-Ecole Polytechnique, (Francia), nos propone la siguiente noticia.

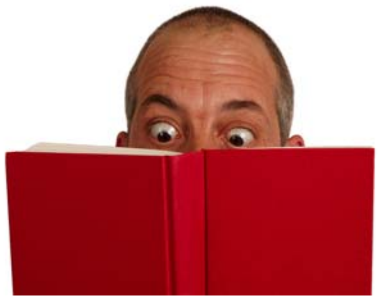
Edwin J. Goodman, de Solitude, Indiana, creyó haber encontrado una serie de avances revolucionarios que hubiesen cambiado las matemáticas y las ciencias en el año 1897.

Fue a hablar con su representante en el Parlamento y éste aceptó proponerlos a la Cámara de Representantes de Indiana. Un proyecto de Ley fue enviado al Comité de Educación que, después de estudiarlo detenidamente, recomendó su aprobación. El 15 de Enero de 1897, el proyecto de ley Nº 246 fue aprobado por la aplastante mayoría de 67 votos a favor y 0 votos en contra. Este "revolucionario" proyecto no sólo fijaba el valor de Pi en 3,2 y decía que la raíz cuadrada de 2 era igual a 10/7, sino que también establecía la cuadratura del círculo y la trisección de un ángulo cualquiera. Tenía como objetivo que estos "avances científicos" pudiesen utilizarse únicamente en el Estado de Indiana y que los demás estados tuviesen que pagar por utilizarlos. Una vez votado por la Cámara, el texto debía ser refrendado por el Senado de Indiana. Afortunadamente, el matemático Clarence A. Waldo, profesor de la Universidad de Purdue, se encontraba en la sala y pudo explicar a todo el mundo el error que estaban cometiendo. La proposición fue rechazada.


María Núñez

Para más información y para poder leer íntegramente el proyecto de ley Nº 246: http://www.agecon.purdue.edu/crd/Localgov/Second%20Level%20pages/Indiana_Pi_Story.htm. **Agradecemos la colaboración de Michel Balinski.**

PARA LEER



Vicente Trigo ha escrito muchos libros de informática, como *Diseño de páginas Web para torpes*, *Windows XP para torpes*, *Introducción a la informática para torpes* (y si os dais por aludidos es vuestro problema...) y también otros con títulos tan sugerentes como *¡Aprobar es fácil!... Y sacar nota, más aún.* Pero él mismo dice que cuando más disfruta es cuando escribe narrativa. Entre otras cuantas, ha escrito una novela juvenil titulada *Mujeres con L*, que, aparte de mucha acción, incluye algún que otro problemilla y que se desarrolla en un ambiente bastante matemático, más concretamente en una Olimpiada Matemática. Además, y esto es lo mejor de todo, el libro ha sido publicado, gratuitamente, en Internet así que se puede descargar y distribuir de manera totalmente legal. El original está en su página (http://www.vicentetrigo.com/) en formato pdf. Una entretenida propuesta para leer.

Juegos

Bueno, pues pasamos del Sim al Nim (y no, Carlos, no tiras porque te toca a ti). Antes de explicar este nuevo y apasionante juego hay que agradecer a todo el mundo que se interesó en el último artículo y descubrió que uno de los dibujos estaba mal (si no te diste cuenta, busca el número anterior y a ver si averiguas por qué es así).

El Nim

Este juego tiene un poco más de un siglo y se puede jugar con monedas, palillos, cerillas o lo que se os ocurra (¡¡¡hasta piedras!!!), nosotros usaremos letras elegidas al azar. Hay varias versiones del juego, pero en la que vamos a explicar se parte de una posición inicial cualquiera, con cualquier número de filas (al menos dos, preferiblemente, ya veréis por qué) y también cualquier número de objetos en cada una. Por ejemplo:

Que no jueguen con monedas, que no jueguen con monedas...

L A (2)
H O J A (4)
V O L A N T E (7)

(¡habéis observado la elección totalmente al azar de las letras, eh!)
El objetivo del juego es conseguir quitar la última ficha (eso en el juego "normal", porque hay otra versión en la que el que gana es el que obliga al oponente a quitar la última), teniendo en cuenta que en cada jugada se puede quitar cualquier número de objetos pero todos de la misma fila. Ojo, es obligatorio quitar algún objeto en cada turno porque si no nadie perdería.
Dependiendo del número de filas y el número de objetos que haya en cada una, es el primer jugador o el segundo el que si no se equivoca durante la partida puede ganar siempre. Para los que queráis comprobar esto manualmente os animo a probar y jugar hasta que os canséis. Una buena página donde practicar (ojo, que aquí pierde el que se lleva la última) es: http://britton.disted.camosun.bc.ca/nim.htm.
Ahora bien, si lo que queréis es saber la estrategia ganadora tendréis que entrar en la web: http://www.uam.es/hojavolante.

Nos vais a matar, ya lo sabemos: ¡El joven iba vestido de marinero! Esa es la respuesta al acertijo anterior. En nuestro descargo diremos que fomenta el "pensamiento alternativo", que lo extrajimos (al igual que el problema) del libro de Martin Gardner *"Matemática para divertirse"* y que os dimos una pista subliminal con un marinero en la esquina superior izquierda... Aun así, Javier Gallardo (que nos dice que era muy fácil) y Laura Arroyo (que nos dice que es una bobada de respuesta pero por si acaso) han acertado. La respuesta de Antonio Suardíaz, aunque no sea la oficial es para leerla también, muy buena. ¡Enhorabuena a los tres! Vamos con otro.

El acertijillo

¿Qué número sigue y por qué? 1, 2, 4, 5, 8, 1000…

COSAS QUE SÓLO PODRÁS VER EN LA WEB

La explicación del juego del Nim
Unas fotos de Pedro Balodis del Turín "más matemático"
Una colaboración y un problema que nos envía Juan López
El final de la demostración del teorema de Pick
Alguna sorpresa, o no... (es una sorpresa si la hay o no)

http://www.uam.es/hojavolante

El teorema de Pick (segunda parte)

Nota: es importante recordar de qué iba esto, para ello puedes volver a releer el número 7 (en pdf **http://www.uam.es/otros/hojavol/pdfs/hoja07.pdf** o en html **http://www.uam.es/otros/hojavol/hoja7/pick07.html**).

HORAS MÁS TARDE...

- Oye Alejandro, lo mismo va a llevar razón el Pick éste, pero que haya funcionado 738 veces no quiere decir que no vaya a fallar a la 739, así que ¿cómo se demuestra el teorema?

- Pues mira, la idea básica es demostrarlo sólo para los triángulos cuyos vértices son puntos de un retículo pero sin ningún otro punto reticular ni en su interior ni en su frontera. Estos triángulos se llaman "triángulos primitivos".

- Entonces lo que hay que probar es que todo triángulo primitivo tiene área $0 + 3/2 - 1 = 1/2$, porque en este caso $q=0$ y $p=3$.

- Perfecto, pero antes de demostrar que el área de cualquier triángulo primitivo es $1/2$ vamos a adaptar el teorema de triangulaciones que teníamos a retículos.

- Jo, ¿y por qué no lo has hecho antes?

- Porque entonces no habrías entendido para qué servía lo de adaptarlo a retículos y triángulos primitivos…

- Y ahora tampoco lo entiendo.

- Macho, tienes la intuición de un pepinillo. A ver, te están diciendo que quieres probar una cosa para polígonos reticulares, pero que el primer paso es probarla para triángulos primitivos y antes hemos dado un teorema que descomponía un polígono en triángulos. ¿No te interesará un teorema que descomponga polígonos reticulares en triángulos primitivos?

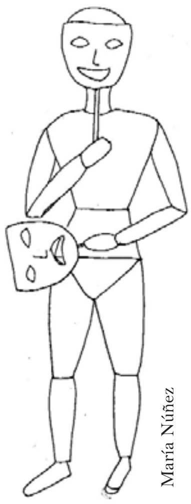
- Puede que sí… ¿Traes el teorema? Yo traigo el dinero.

- En fin…

Teorema 2: Cualquier polígono simple P cuyos vértices sean puntos reticulares puede descomponerse en triángulos primitivos.

Fíjate que por el Teorema 1 basta probar que "todo triángulo cuyos vértices sean puntos reticulares puede descomponerse en triángulos primitivos".

- Ya veo, Alejandro, primero partes el polígono en triángulos por el Teorema 1 y ahora quieres que cada uno de esos triángulos se parta en triángulos primitivos.



- Justamente. Entonces consideramos un triángulo ABC con vértices reticulares y, como siempre, tenemos tres casos:

1) Si el triángulo no tiene ningún otro punto reticular ni en el interior ni en sus lados, entonces ABC es primitivo y hemos terminado.

- ¡Qué difícil!

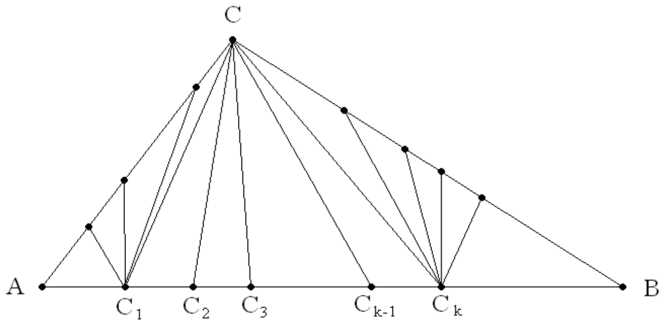
- ¿Quieres callarte?

2) Si el triángulo ABC tiene otros puntos reticulares en sus lados pero ninguno en su interior, consideramos primero los del lado AB…

- ¿Y si en el lado AB no hay ninguno?

- Entonces les cambias el nombre a los vértices para que sí haya ¡Si hay puntos en los lados, en algún lado habrá puntos! ¡Pues a ése le llamas AB! Como iba diciendo, consideramos los puntos reticulares del lado AB y los llamamos C_1, C_2, …, C_k (donde C_1 es el más próximo a A y C_k el más cercano a B). A continuación unimos cada uno de ellos con el vértice opuesto C.

Como no hay puntos reticulares en el interior del triángulo, tenemos que los triángulos C_1C_2C, C_2C_3C, …, $C_{k-1}C_kC$ son primitivos. Así que sólo nos quedan los triángulos AC_1C y C_kBC que como mucho tienen puntos reticulares en sus lados AC y BC respectivamente. Pero uniendo los de AC con C_1 y los de BC con C_k obtenemos una descomposición de ABC en triángulos primitivos. Para los que no sepan leer, y para ti, Carlos, que no te has enterado de nada, ponemos aquí un dibujito, que lo explica todo de modo diáfano:



- ¡Huy, "diáfano", qué culto! No te des esas "ínsulas" de grandeza que yo también tengo mi vocabulario.

- Ínfulas, se dice ínfulas. En fin, sigamos:

3) Si el triángulo ABC tiene puntos reticulares en su interior entonces lo que hacemos es descomponerlo en triángulos que no los tengan y aplicamos el apartado 1) o el 2) según corresponda.

- Si el triángulo no tiene puntos reticulares en los lados aplicamos el 1) y si sí los tiene aplicamos el 2).

- Las pillas al vuelo tú, eh… ¡Qué portento, madre mía! Bueno, como diría un libro de texto: Procedemos por inducción sobre el número de puntos reticulares en el interior del triángulo.

Si el triángulo ABC tiene un punto reticular en su interior, V, unimos V con A, B y C, obteniendo tres triángulos libres de puntos reticulares en su interior.

Si suponemos que tenemos probado que cualquier triángulo con menos de n puntos en su interior puede descomponerse en triángulos primitivos y nos dan uno con n puntos reticulares en su interior, tomamos uno cualquiera de ellos, V, y lo unimos a A, B y C. Cada uno de los tres triángulos formados tiene menos de n puntos reticulares en su interior y por la hipótesis de inducción puede descomponerse en triángulos libres de puntos reticulares en su interior.

- ¡Así que ya hemos probado el Teorema 2! ¿Y con eso ya podemos demostrar el de Pick?

- Bueno, pero faltan algunos pequeños detalles preliminares.

- Jo, esto es un rollo... ¿es que no vamos a empezar nunca con la demostración del teorema de Pick? Mira que mi amigo César está el hombre que no duerme desde noviembre esperando la demostración, hazlo por él.

- Esto es como una receta de cocina, necesitas ciertos ingredientes. Puedes empezar directamente a cocinar e ir buscando los ingredientes a medida que los necesites o comprar todos los ingredientes primero y comenzar después la receta. En este caso hemos optado por la segunda opción, eso simplificará (al menos aparentemente) la prueba.

- Vale, venga, pues compra el perejil y ya está. Si luego te falta algo mientras cocinamos ya bajo yo a por ello que si no más que la comida vamos a preparar la cena.

- Venga pues sólo añado una última cosita que no sé si recordarás de geometría: el área de un triángulo de vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) es igual al valor absoluto de

$$1/2 \det((x_2 - x_1, y_2 - y_1), (x_3 - x_1, y_3 - y_1)).$$

- Sí, porque el determinante de dos vectores es el área del paralelogramo… Venga, empieza con la prueba del teorema de Pick.

- Sería bueno recordar el enunciado ¿no crees?

- ¡Qué pesado! ¿No les hemos dicho que se relean la hoja anterior? Pues ahí lo tienen…

- ¿Y cuánta gente crees que nos va a hacer caso? ¿Esa chica que está leyendo ahora mismo esta frase en una mesa del pasillo? ¿Crees que lleva la hoja 7 encima? ¿Crees que tiene un portátil para mirarla en Internet?

- Anda, repítelo.

- Je, je, je. Me he salido con la mía…

Teorema de Pick: Sea P un polígono simple cuyos vértices son puntos de un retículo. Supongamos que hay q puntos reticulares en el interior de P y p puntos reticulares en su frontera. Entonces,

Área de P = q + p/2 - 1.

Y ahora observa cómo se combinan todos los ingredientes para probarlo. Comenzamos probando que el teorema se verifica para triángulos con vértices reticulares pero sin más puntos reticulares en su frontera ni en su interior, esto es, que el área de un triángulo primitivo es 1/2.

Partimos de un triángulo primitivo, T. Primero veamos que su área es mayor o igual que 1/2. Como los vértices del triángulo tienen coordenadas enteras, el determinante de la fórmula que acabamos de dar para el área de un triángulo será un número entero (son sumas y restas de productos de enteros), luego el área será 1/2 de un natural y por tanto mayor o igual que 1/2.

Para ver que es exactamente 1/2 enjaularemos el triángulo dentro de un rectángulo de lados paralelos a los ejes, de manera que los lados horizontales pasen a la altura del vértice más alto y el más bajo de T y los lados verticales por el vértice más a la derecha y el vértice más a la izquierda de T. Tenemos así un rectángulo R con i puntos reticulares en su interior y f en su frontera, de los que 4 son vértices.

- ¡Qué nombres más originales, Alejandro! Triángulo T, rectángulo R…

- Ahora viene el Teorema 2…

- Que a su vez venía del Teorema 1…

- Eso es, y que nos dice que R puede descomponerse en triángulos primitivos. Es más, nos dice que R puede descomponerse en triángulos primitivos siendo T uno de ellos (basta descomponer en triángulos primitivos cada uno de los polígonos que se forman dentro del rectángulo al poner T dentro de él).

- ¡Ah, claro, ya lo veo!

- Ahora, digamos que nuestra partición tiene n triángulos primitivos. Vamos a probar que cualquier partición de R en triángulos primitivos tiene exactamente n triángulos.

- Eso lo teníamos que haber comprado antes, mira que te lo he dicho, ¡estaba al lado de los tomates!

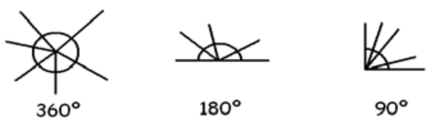
- Tranquilo, que no es muy difícil, lo hacemos en un momento. R tiene tres tipos de puntos reticulares y, dada una partición en triángulos primitivos, todos ellos son vértices comunes de varios triángulos:

1) si el punto es uno de los i puntos del interior de R, los ángulos de los triángulos primitivos que allí coinciden suman 360º.

2) si el punto es uno de los f - 4 que están en la frontera pero que no son vértices entonces los ángulos de los triángulos primitivos que se juntan en él suman 180º.

3) si el punto es uno de los 4 vértices de R entonces la suma de los ángulos de los triángulos que confluyen en el mismo es 90º.

- Sí, es por lo que yo he dibujado aquí, ¿a que sí?



- A veces me sorprendes…

- Lo he arrancado de los apuntes de Matías. Estaba en el apéndice. Pues no soy yo nadie…

- ¡Serás animal! ¿Y qué has hecho con el resto de la hoja?

- ¿Te suena de algo "La hoja volante"? Es que me aburres tanto que tengo que tirar avioncitos por la ventana.

- ¿Y qué vamos a hacer cuando lleguemos a esa parte?

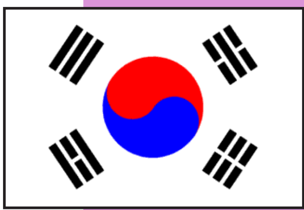
- Ya veremos, si no tienes sal siempre le puedes pedir a la vecina.

Departamento de Matemáticas.
Escrito por Alejandro Bellogín, Matías Núñez y Carlos Vinuesa.

Agradecemos su colaboración a Michel Balinski, Vicente Trigo, Josep M. Albaigès, María Núñez, al Departamento de Ingeniería Industrial de la Universidad Antonio de Nebrija y a los amigos de http://www.sxc.hu/.

UNA CURIOSIDAD PARA EL QUE SE ESTÉ ABURRIENDO:

Quizás nadie se ha fijado hasta ahora cuán simétrica es la bandera de Corea del Sur, ¿o deberíamos decir cuán anti-simétrica? Para empezar tiene el símbolo del yin-yang en el centro, que representa las fuerzas opuestas en el universo, aderezado por dos colores primarios. Además posee cuatro simbolitos que parecen puestos al azar o para que quede bonito en las cuatro esquinas. Sobre estos simbolitos hay que notar varias cosas. Los símbolos que



están en una diagonal son opuestos en cuanto a la colocación de la las líneas: si uno tiene una línea continua el otro la tiene cortada y viceversa. Hay una relación explícita entre estos símbolos y los números naturales: el código binario (la línea partida es el 1 y la continua el 0) ¿qué será 0, 5, 2, 7? La respuesta es que cada símbolo tiene un significado concreto (el cual aparece en el "I Ching"): 0 = cielo, 5 = agua, 2 = fuego y 7 = tierra. Por supuesto, los de las diagonales son elementos enfrentados (Cielo-Tierra, Fuego-Agua).

- Bueno, vamos a terminar lo de Pick que por lo menos lo tenemos completo. Como íbamos diciendo, por tanto, los ángulos de los triángulos primitivos de la partición sumarán

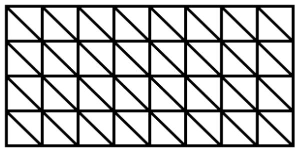
$$360^\circ \cdot i + 180^\circ \cdot (f - 4) + 90^\circ \cdot 4$$

y como la suma de los ángulos de un triángulo es 180º el número de triángulos será

$$2 \cdot i + f - 2$$

que, por supuesto, no depende de la forma en que hayamos hecho la partición. Así que ya sabemos que cualquier partición de R en triángulos primitivos tiene exactamente $n = 2 \cdot i + f - 2$ triángulos. El área de R es claramente n/2, basta con hacer una partición facilita…

- Como ésta (y esta vez se me ha ocurrido a mí):



- Eso es, así se ve muy bien que el área de R es la mitad del número de triángulos primitivos y como este número no depende de la partición ¡ya está! Volvemos ahora a nuestra partición original de R. Llamamos $T_1, T_2, \ldots, T_n$ a los triángulos de la misma y sabemos que uno de ellos es T. Sabemos también que el área de cada T_i es mayor o igual que un medio y que la suma de las áreas de los n triángulos es n/2. Si sumamos n números mayores o iguales que 1/2 y nos sale n/2 entonces obligatoriamente todos tienen que ser 1/2 porque si uno fuera estrictamente mayor, la suma sería estrictamente mayor que n/2. Eso quiere decir que el área de T es exactamente 1/2, que es lo que queríamos.

- Resumiendo, tanto rollo y sólo hemos probado el teorema para triángulos primitivos.

- Pero casi está todo hecho. Es más, lo único que vamos a hacer es refinar y generalizar un par de cosas que ya hemos hecho antes. Pero eso será en la web: http://www.uam.es/hojavolante.

- ¿Quieres decir que vas a escribir el final en la web sólo para obligar a la gente a entrar en la página?

- Sí.

- ¡Brillante!

CONTINÚA EN LA WEB...

El señor Aceituno estaba comprando números de metal para poner en la puerta de su casa. Enhorabuena a Javier Gallardo, Antonio Suardíaz e Iñaki Ayensa que dieron con la respuesta. Gracias a Josep M. Albaigès, tenemos un precioso problema.

El problema

Hemos perdido nuestro cronómetro y sólo disponemos de un par de mechas absolutamente distintas e irregulares en lo que se refiere a composición, longitud y velocidad de combustión; es decir, que arden de una manera absolutamente irregular. También disponemos de una caja de cerillas para prender fuego a nuestras mechas. Se sabe a ciencia cierta que cada una de las dos mechas arde exactamente en una hora. En estas circunstancias, nos piden que cronometremos 45 minutos. ¿Cómo podríamos hacerlo?