

Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Primera Edición, 2006/2007

TRABAJO: Aproximación al algoritmo de
priorización de Google

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE BACHILLERATO

AUTORES:

- o Alejandro Antuña Molina
- o Cristina Cebrián Moreno
- o Irene Llamazares Rubio
- o Ángela del Pino Ramírez

TUTORES:

- o Enrique Romero Ruiz del Portal

CENTRO: Los Sauces (Torrelodones, Madrid)



Introducción

El origen del trabajo que aquí se va a exponer se remonta a principios del mes de Septiembre, en una de nuestras clases de Matemáticas.

Es importante señalar que, como -desgraciadamente- muchos de los alumnos que se forman académicamente, tanto en Secundaria como Bachillerato, no éramos plenamente conscientes de las innumerables aplicaciones de esta rama perteneciente a las Ciencias Puras. Para nosotros, ésta era una asignatura que nos gustaba, sin duda, pero tan sólo eso.

Volviendo al tema inicial, quizás fue esa la razón por la que nuestro profesor decidió sacarnos del error trayéndonos el artículo: “**El secreto de Google y el Álgebra lineal**” del profesor del Departamento de la Universidad Autónoma de Madrid **Pablo Fernández**, publicado en el Boletín de la Sociedad Española Matemática, acerca del buscador Google y el papel que las Matemáticas tenían con respecto a él. Aquello captó nuestra atención. ¿Qué similitud podría existir entre dos elementos tan aparentemente distintos? ¿Cómo podía estar la “magia” de Google directamente relacionada con esa materia que nos impartían desde hace ya tanto tiempo?

Pocas semanas después de aquel día, y cuando ya parecía que nuestro interés inicial había desaparecido, oímos hablar de este concurso:

Tema libre, trabajo en equipo,... Sonaba bastante bien, pero no teníamos nada con que presentarnos.

...O espera... Un momento... ¿Google? Aquella palabreja apareció en nuestra mente de la nada, reclamando la atención perdida semanas atrás. Y una bombillita se encendió en nuestro interior. ¿Acaso existía una mejor manera de satisfacer nuestra curiosidad, desenmascarar los secretos de dicho buscador que haciendo un trabajo entre todos?

La idea pronto nos convenció y se lo propusimos a nuestro profesor que, en un principio no se mostró muy por la labor, ya que según nos dijo era un tema de una dificultad que superaba nuestras posibilidades. Ante nuestras preguntas e insistencia nos invitó a que empezáramos y viéramos hasta dónde éramos capaces de llegar. Debemos decir que poco a poco fuimos inculcándole nuestra ilusión y nuestro esfuerzo, y aunque éramos conscientes de que no podíamos llegar a entender todo ni a manejar todos los conceptos matemáticos a los que ahí se hace referencia, sí que podíamos aprender un montón de cosas que tal vez nos fueran de provecho en un futuro próximo y que estaban a nuestro alcance. Cuando empezamos a profundizar en el estudio del tema y a usar libros más avanzados que los de nuestro curso empezamos a entender que, si bien estábamos ante un trabajo faraónico, también estábamos entendiendo parte de los conceptos que allí se manejaban como qué eran los autovalores y los autovectores de una matriz, e incluso llegar un poco más allá. Empezamos a buscar Bibliografía para lo cual visitamos la biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense y empezamos a encontrar cosas sobre Álgebra Lineal. Fue la primera de muchas visitas, ya que además no podíamos sacar libros de la misma lo que nos resultaba un inconveniente muy grande; todo había que hacerlo allí. Puede resultar un comienzo inocente pero no nos valía cualquier libro sino sólo aquellos que fueran inteligibles para nosotros. Debemos reconocer que para nosotros fue mucho más fácil casi siempre empezar haciendo uso de Google para localizar artículos que nos pudieran orientar en todos los problemas que nos vimos metidos a lo largo de nuestro proyecto. Hablando de problemas debemos de decir que encontramos bastantes y no sólo de carácter matemático, sino de carácter funcional. Es evidente que calcular los autovalores y autovectores de matrices 2×2 es sencillo, pero no refleja realmente lo que nosotros queríamos ver, como tampoco nos conformábamos con comprobar el teorema de Perron con matrices de éste tamaño; teníamos que usar matrices 5×5 , 6×6 , etc. Esto nos llevó a usar software matemático que habíamos usado hasta el momento, sólo para cálculos muy elementales en concreto el Derive. La forma de escribir, interpretar y mostrar los resultados nos llevó bastante tiempo, incluso tenemos aún serias dudas acerca de algunos resultados que obtuvimos, y cuando creímos que todo iba a ir bien encontramos que nuestra versión de éste programa se nos quedaba muy corta cuando queríamos trabajar con matrices más grandes así que tuvimos que buscar un software más potente y encontramos el Maple; más de lo mismo; aquí tuvimos que hacer uso de algún conocimiento de amigos universitarios que usaban este programa desde hace años porque si bien era relativamente fácil el introducir los datos, no lo era

tanto la recepción de los mismos que venía en formatos para nosotros etéreos por su forma y longitud.

Finalmente otro gran inconveniente que hemos encontrado sobre todo al final y que se ha ido poniendo de manifiesto cada vez más a lo largo del trabajo, es la ausencia de tiempo, ya que toda la ilusión con la que empezamos se iba diluyendo según nos íbamos introduciendo en los temas más complicados y según se aproximaban los, para nosotros, insufribles y difíciles exámenes y controles de este curso que se queda tan corto debido a la Selectividad.

Además debemos incluir la cantidad de tiempo perdida, intentando encontrar páginas con interconexiones entre ellas suficientes, de manera que nuestras matrices no se vieran absolutamente llenas de ceros. Aún así hay muchos. Esto, incluso nos llevó a pensar en idear un modelo con páginas ficticias, pero al final desechamos la idea.

Debemos de añadir que cada vez que escribimos la frase “proyecto de investigación” nos sentimos un poco avergonzados ya que para nosotros es algo nuevo y se nos hace pretencioso, ya que sabemos que no estamos trabajando sobre nada innovador más que para nosotros, pero en fin...

Manos a la obra: no podíamos empezar a hurgar entre sus entrañas sin antes documentarnos acerca de buscadores anteriores en el tiempo, y descubrir en líneas generales cuáles fueron las claves del éxito de Google. Y a ello nos pusimos.

- Un poco de historia

Desde principios de los 90, el vertiginoso crecimiento de Internet pedía a gritos una clasificación de datos fiable que pudiese poner mayor orden a aquel maremágnum que suponía la Web.

En 1990, la Universidad de McGill, en Montreal, creó el primer Motor de Búsqueda que ayudase a encontrar y extraer archivos, colocándose éstos en dos categorías: Abierto y cerrado. Un usuario podía tener acceso a los archivos 'abiertos' simplemente utilizando el e-mail como contraseña. Después, podía explorar la lista de archivos y descargar cualquiera de ellos utilizando FTP. Uno de estos recopiladores de archivos era Archie, el cual automáticamente, por la noche -cuando el tráfico era menor- visitaba los archivos conocidos y copiaba la lista en una base de datos investigable -Spider-. Cuando un usuario se registraba en un sitio Archie, éste le informaba la ubicación de cualquier archivo y se podían mandar los resultados recuperados vía e-mail.

A partir de entonces, un torrente de nuevos Sistemas y Motores de Búsqueda han ido sustituyéndose unos a otros. Aquí se ven resumidos algunos de los antecesores más importantes de Google:

1994 - WebCrawler: Nació como un proyecto universitario en la Universidad de Washington -EE.UU.-. Fue creado por Brian Pinkerton y se convirtió en el primer Motor de Búsqueda en crear y utilizar el estándar de exclusión de Robots o Spiders. Actualmente pertenece a InfoSpace, una empresa de soluciones inalámbricas de Internet.

1994 - Lycos: Apareció como un proyecto de Investigación de la Universidad de Carnegie Mellon por el Dr. Michael Mauldin. Fue la primera empresa en Internet en basar su publicidad en CPM -costo por miles de visualizaciones-, la cual es actualmente un estándar en la industria de Internet.

1994 - Excite! Fundado por Mark Van Haren, Ryan McIntyre, Ben Lutch, Joe Kraus, Graham Spencer y Martin Reinfried, quienes investigaron para la Biblioteca de la Universidad de Stanford cual sería la mejor forma de buscar y recuperar información para solucionar el problema de dicha biblioteca. También provee una interesante forma de alineación de páginas dinámicas para diferentes sistemas operativos.

1995 - AltaVista: Nació en los Laboratorios de Digital Equipment Corp. -DEC Research- en Palo Alto, California, EE.UU. En primer término, los ingenieros de DEC Research, crearon un software llamado “Spider” o “Crawl” el cual rastreaba Internet, clasificando y mostrando la información recolectada. La innovación más notable de este Motor de Búsqueda, fue la inclusión de búsqueda multi lengua en Internet, siendo el primero en soportar chino, japonés y coreano utilizando los servicios del traductor Babel Fish -Primer traductor en línea en Internet-

Otra de las innovaciones presentadas por este Motor fue la de permitir búsquedas multimedia, para explorar Internet en la búsqueda de fotografías, videos y música.

1995 -Yahoo!: El de Yahoo! es un caso muy especial porque debe ser el portal de búsqueda de Internet, más viejo, conocido y visitado, pero la mayoría de sus usuarios no saben que Yahoo! es principalmente un directorio Web y no un verdadero Motor de Búsqueda. Por lo tanto, su estructura está basada en sitios Web propuestos por usuarios y no por los encontrados por un Robot o Spider. Creado por David Filo y Jerry Yang, Ingenieros Eléctricos de la Universidad de Stanford, comenzaron su catálogo en Abril de 1994, para mantener y rastrear los sitios de su propio interés. El Motor de Búsqueda de Yahoo fue Google -vaya, vaya, esta palabra me suena...- hasta Febrero de 2004 . Actualmente Yahoo usa su propio motor de búsqueda.

1996 - Inktomi: Deriva de un Motor de Búsqueda desarrollado por la Universidad de Berkeley, California, EE.UU. Fue fundado por dos estudiantes llamados Eric Brewer y Paul Gauthier. Inktomi no sólo es conocido por su potente Motor de Búsqueda, sino también por lograr la confección de directorios utilizando las páginas obtenidas por su Spider. La tecnología llamada "Concept Induction™" automáticamente analiza y categoriza millones de documentos. Esta tecnología incorpora algoritmos, que tratan de modelar la concepción humana para comprender la información.

1996 – HotBot: Fue lanzada en Internet en 1996. Su diseño y operación estuvieron a cargo de la revista Wired, siendo vendida a Lycos. Actualmente los resultados de HotBot son provistos por otros Motores de Búsqueda: Inktomi, etc.

Y entonces... el protagonista de esta historia hizo su aparición. Estelar, todo sea dicho. Google nació en 1997 en la Universidad de Stanford como un proyecto de investigación de dos alumnos: Sergey Brin y Larry Page. En 1999, recibió más de 20 millones de dólares de capitales privados, lo cual le permitió estar ubicado dentro de los mejores Buscadores del Netscape Netcenter.

Las cifras del tráfico que genera son espectaculares. Las visitas globales únicas al mes que recibe superan las 73,5 millones. Más del 50% de dichas visitas proceden de fuera de EE.UU. El índice comprende más de 1.000 millones de direcciones URL. Actualmente, Google responde a más de 200 millones de consultas al día.

Page y Brin sólo guardan el secreto de la fórmula matemática que crearon en 1996 y mantiene todo el sistema. Lo demás lo saben sus rivales. El éxito del buscador se apoya en 54.000 servidores, 100.000 procesadores y 261.000 discos duros repartidos por Estados Unidos y Europa. Esto lo convierte en el sistema informático más grande del mundo.

Google no sólo rastrea sitios web. Fue el primero en buscar otros formatos tales como PDF e imágenes. También creó un buscador de noticias imitado por sus competidores. Ha recibido además varios premios de la industria por sus innovaciones tecnológicas, incluido el "Best Search Engine on the Internet" de Yahoo! Internet Life. Recientemente, alcanzó el primer lugar en satisfacción y lealtad de sus usuarios, según un estudio de seguimiento de sitios de búsqueda y portales -Search & Portal Site Tracking Study- realizado por una firma independiente, en el que el 97% de los usuarios encuestados indicaron que recomendarían Google a sus amigos.

Un creciente número de empresas, incluidas Netscape y The Washington Post, depositan actualmente su confianza en Google para la ejecución de búsquedas eficaces en sus sitios Web.

Introducción al Álgebra Lineal necesaria

Una vez formuladas todas las preguntas acerca de qué eran esos conceptos matemáticos, de los que hacía mención y utilizaba repetidas veces el artículo, nos adentramos en el campo del Álgebra Lineal, con el fin de encontrar respuestas y poder explicar, siempre haciendo uso de las matemáticas, como funciona el Page Rank, que ha hecho de Google un éxito.

En un principio, para resolver nuestras dudas acudimos a lo que estaba más a nuestro alcance: Internet y cómo no Google.

Para empezar la famosa Wikipedia. Aquí encontramos una primera aproximación: si $A: V \rightarrow V$ es un operador lineal en un cierto espacio vectorial V , v es un vector diferente de

cero en V , y c es un escalar tales que $Av = cv$, entonces decimos que v es un vector propio del operador A , y su valor propio asociado es c . Es, entonces, evidente que si v es un vector propio con el valor propio c y entonces cualquier múltiplo diferente de cero de v es también un vector propio con el valor propio c .

Parece claro a la vista de la expresión que los autovectores de una transformación lineal (traslación, rotación, etc.) son vectores que o no se ven afectados por la transformación o se ven multiplicados por un número, de manera que la transformación cambiaría el vector por un múltiplo suyo, siendo esa constante de proporcionalidad el autovalor c correspondiente.

En el caso de nuestro trabajo intentamos entender el sentido de los autovalores y autovectores de matrices.

Comenzamos desde Google introduciendo palabras como: Page Rank y Perron-Frobenius, accedimos a artículos de gran interés que explicaban a grandes rasgos en que consistía el Page Rank y su relación con las matemáticas así como la importancia de dicho Teorema en el tema que nos ocupa. Entre estos artículos habría que destacar el de Roberto Markarian y Nelson Möller, y el de SmokeSellers. Éste último nos ofrecía toda la información acerca del Page Rank sin hacer apenas uso de las matemáticas, algo útil debido a nuestra inicial falta de conocimientos. Por otro lado aún ofreciéndonos estos artículos claras explicaciones e incluso ilustraciones de grafos, matrices de adyacencia, matrices estocásticas (o de Markov), ... no entendíamos de donde podíamos sacar los autovalores de la matriz y sus autovectores correspondientes, siendo éstos los que determinan las importancias de las páginas y su posterior ordenamiento en la red.

Por ello, acudimos a nueva bibliografía escogiendo libros de Álgebra Lineal y sus aplicaciones como el Strang. Este libro (que debemos decir que ha sido nuestra guía fundamental) hacía una minuciosa explicación sobre todo lo relacionado con matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones y lo que más nos interesaba, autovalores y autovectores. En él partiendo de la fórmula $Ax = \lambda x$ (haciendo x referencia a v y λ a c) se nos indicaba cómo acceder a los autovalores de la siguiente manera: $Ax - \lambda x = 0$; $(A - \lambda I)v = 0$ mostrándonos la ecuación un sistema de ecuaciones homogéneo (aquí si entramos en un terreno conocido) tal que para que tenga soluciones distinta de la nula debe de ser compatible indeterminado, es decir, $|A - \lambda I| = 0$ expresión que nos conduce al polinomio característico $P(\lambda)$ cuyas raíces serán los autovalores λ . Lógicamente dependiendo del grado de $P(\lambda)$ tendremos un número de autovalores n .

Bien, parece que vamos avanzando, al menos ya tenemos una manera para calcular esos autovalores y es a través de la matriz característica y su determinante: $|A - \lambda I| = P(\lambda) = 0$ obteniendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots$

Con esto, quisimos ver a nivel práctico cómo podíamos hacerlo y decidimos tomar ejemplos del Strang más otros de nuestra propia cosecha y nos pusimos a hacerlos:

- **Ejercicio 1:**

(Empezamos con una matriz de orden 2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \text{ Matriz característica: } A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix},$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda = 3 \\ \lambda = 2 \end{matrix}$$

que serían los autovalores o valores propios de la matriz.

Pasaríamos a calcular los autovectores:

$$\text{Para } \lambda = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = \mu \\ x_2 = -2\mu \end{cases} \left\{ \bar{V}_1 = (1, -2) \right.$$

$$\text{Para } \lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 2x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \end{cases} \left\{ \bar{V}_2 = (1, -1) \right.$$

• **Ejercicio 2:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 \rightarrow$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0; \quad \lambda = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \left\{ \text{valores propios} \right.$$

$$\lambda = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2\alpha \end{cases} \left\{ \bar{V}_3 = (1, -2) \right.$$

$$\lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = -\lambda \end{cases} \left\{ \bar{V}_2 = (1, -1) \right.$$

• **Ejercicio 3:**

$$B = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} -6 - \lambda & -1 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 18 + 9\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 + 9\lambda + 20 = 0;$$

$$\lambda = \frac{-9 \pm 1}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = -5 \end{cases}$$

Para $\lambda = -4$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2x_1 - x_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = -2\lambda \end{cases} \left\{ \bar{V}_{-4} = (1, -2) \right.$$

Para $\lambda = -5$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \lambda \\ x_2 = -\lambda \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{V}_{-5} = (1, -1) \end{matrix} \right.$$

Ahora con su matriz transpuesta:

$$\rightarrow B^t = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B^t - \lambda I| = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 18 + 9\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 + 9\lambda + 20 = 0$$

;

Como el $P(\lambda)_B = P(\lambda)_B$ los valores propios serán los mismos $\lambda = -4; \lambda = -5$

$$\lambda = -4 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{V}_{-4} = (1, 1) \end{matrix} \right.$$

$$\lambda = -5 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2\lambda \\ x_2 = \lambda \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \bar{V}_{-5} = (2, 1) \end{matrix} \right.$$

Vectores propios perpendiculares a los de B.

- Ejercicio 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) =$$

$$= (1+\lambda^2-2\lambda)(2-\lambda) - 1 + \lambda - 1 + \lambda = 2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 4\lambda + 2\lambda^2 - 1 + \lambda - 1 + \lambda =$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0; \quad \lambda(-\lambda^2 + 4\lambda - 3) = 0 \rightarrow \lambda_2 = 3$$

$$\lambda_3 = 1$$

Para $\lambda = 0$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{matrix} x - y = 0 \\ -y + z = 0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{matrix} \right\} \bar{V} = (1, 1, 1)$$

Para $\lambda = 1$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{matrix} -y=0 \\ -x+y-z=0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} x=\lambda \\ y=0 \\ z=-\lambda \end{matrix} \right\} \bar{V} = (1,0,-1)$$

Para $\lambda = 3$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{matrix} -2x-y=0 \\ -y-2z=0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} x=\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{matrix} \right\} \bar{V} = (1,-2,1)$$

Una vez trabajado con matrices de ordenes inferiores a 5, pasamos a trabajar con matrices de ese mismo orden. Acudiendo a programas matemáticos que nos facilitara el proceso de hallar los autovalores y autovectores de nuestras matrices, trabajando en un principio con Derive 5. Aquí mostramos uno de los muchos ejercicios que hicimos con el programa, trabajando siempre con matrices simétricas de orden 5:

- Ejercicio 5:

$$\#1: a := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

#2: CHARPOLY(a)

#3: SOLVE(CHARPOLY(a))

$$\#4: -w^4(w^3 - 7w^2 + w + 32w - 6)$$

$$\#5: \text{SOLVE}(-w^4(w^3 - 7w^2 + w + 32w - 6), w)$$

$$\begin{aligned} \#6: w = & -\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{139 - 8 \cdot \sqrt{601} \cdot \cos\left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{3 \cdot \sqrt{10479489}}{11080}\right)}{3} + \frac{\pi}{3}\right)}}{12} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{139 - 8 \cdot \sqrt{601} \cdot \sin\left(\frac{\text{ACOT}\left(-\frac{3 \cdot \sqrt{10479489}}{11080}\right)}{3}\right)}}{12} + \\ & \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{8 \cdot \sqrt{601} \cdot \cos\left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{3 \cdot \sqrt{10479489}}{11080}\right)}{3}\right) + 139}}{12} + \frac{7}{4} \quad v = -\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{139 - 8 \cdot \sqrt{601} \cdot \cos\left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{3 \cdot \sqrt{10479489}}{11080}\right)}{3} + \frac{\pi}{3}\right)}}{12} + \\ & \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{139 - 8 \cdot \sqrt{601} \cdot \sin\left(\frac{\text{ACOT}\left(-\frac{3 \cdot \sqrt{10479489}}{11080}\right)}{3}\right)}}{12} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{8 \cdot \sqrt{601} \cdot \cos\left(\frac{\text{ATAN}\left(\frac{3 \cdot \sqrt{10479489}}{11080}\right)}{3}\right) + 139}}{12} + \frac{7}{4} \quad v = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(139 - 8 \cdot \sqrt{601} \cdot \cos\left(\frac{\operatorname{ATAN}\left(\frac{3 \cdot \sqrt{10479489}}{11000}\right)}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right)}}{12} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(139 - 8 \cdot \sqrt{601} \cdot \sin\left(\frac{\operatorname{ACOT}\left(-\frac{3 \cdot \sqrt{10479489}}{11000}\right)}{3}\right)\right)}}{12} - \\
& \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(8 \cdot \sqrt{601} \cdot \cos\left(\frac{\operatorname{ATAN}\left(\frac{3 \cdot \sqrt{10479489}}{11000}\right)}{3} + 139\right)\right)}}{12} + \frac{7}{4} \cdot v = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(139 - 8 \cdot \sqrt{601} \cdot \cos\left(\frac{\operatorname{ATAN}\left(\frac{3 \cdot \sqrt{10479489}}{11000}\right)}{3} + \frac{\pi}{3}\right)\right)}}{12} + \\
& \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(139 - 8 \cdot \sqrt{601} \cdot \sin\left(\frac{\operatorname{ACOT}\left(-\frac{3 \cdot \sqrt{10479489}}{11000}\right)}{3}\right)\right)}}{12} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(8 \cdot \sqrt{601} \cdot \cos\left(\frac{\operatorname{ATAN}\left(\frac{3 \cdot \sqrt{10479489}}{11000}\right)}{3} + 139\right)\right)}}{12} + \frac{7}{4} \cdot v = 0
\end{aligned}$$

7: ROW_REDUCE(a - 0·IDENTITY_MATRIX(5))

8: SOLVE(ROW_REDUCE(a - 0·IDENTITY_MATRIX(5)))

9:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ante los resultados extraños obtenidos decidimos usar sólo el autovalor cero.

Teorema de Perron:

Sea **A** una matriz cuadrada con entradas positivas tal que **A**>0. Entonces:

- Existe un autovalor (simple) $\lambda > 0$ tal que $A v = \lambda v$, donde el autovector correspondiente es $v > 0$.
- Este autovalor es mayor, en módulo, que todos los demás autovalores de la matriz.
- Cualquier otro autovector positivo de **A** es un múltiplo de **v**.

Como ya advertimos no propusimos atacar la demostración del teorema sino que nos íbamos a conformar con comprobar que se cumple con algunos ejemplos y la ayuda del software científico del que disponíamos

Comprobaciones:

- **Con Derive:**

#1:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

#2: EIGENVALUES
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

#3:
$$\left[1, -2, \frac{\sqrt{53}}{2} + \frac{9}{2}, \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{53}}{2} \right]$$

#4: EXACT_EIGENVECTOR
$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, 1 \right)$$

#5:

[[0, 02, -02, 0]]

$$\#6: \text{EXACT_EIGENVECTOR} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, -2 \right)$$

$$\#7: \left[\left[03, -\frac{2 \cdot 03}{3}, -\frac{4 \cdot 03}{3}, 03 \right] \right]$$

$$\#8: \text{EXACT_EIGENVECTOR} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \frac{\sqrt{53}}{2} + \frac{9}{2} \right)$$

$$\#9: \left[\left[04, 04 \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{53}}{17} + \frac{5}{17} \right), 04 \cdot \left(\frac{\sqrt{53}}{34} + \frac{45}{34} \right), 04 \cdot \left(\frac{7 \cdot \sqrt{53}}{34} + \frac{9}{34} \right) \right] \right]$$

$$\#10: \text{EXACT_EIGENVECTOR} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{53}}{2} \right)$$

$$\#11: \left[\left[05, 05 \cdot \left(\frac{5}{17} - \frac{2 \cdot \sqrt{53}}{17} \right), 05 \cdot \left(\frac{45}{34} - \frac{\sqrt{53}}{34} \right), 05 \cdot \left(\frac{9}{34} - \frac{7 \cdot \sqrt{53}}{34} \right) \right] \right]$$

-Con Maple 8:

Ejemplo1:

> **A:=matrix([[1,1,1],[1,1,1],[1,1,1]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> **eigenvalues(A);**

0, 0, 3

> **eigenvecs(A);**

[3, 1, {[1, 1, 1]}], [0, 2, {[-1, 1, 0], [-1, 0, 1]}]

Como vemos, el autovalor de mayor módulo (3) se corresponde con el mayor autovector de la matriz (1,1,1), cumpliéndose por tanto el teorema de Perron.

Ejemplo2:

> **A:=matrix([[1,2,1],[3,2,1],[1,1,1]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> **eigenvalues(A);**-1, $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$, $\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$ > **eigenvecs(A);**

$$\left[\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}, 1, \left\{ \frac{11}{16} + \frac{3\sqrt{17}}{16}, \frac{13}{16} + \frac{5\sqrt{17}}{16}, 1 \right\} \right],$$

$$\left[\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}, 1, \left\{ \frac{11}{16} - \frac{3\sqrt{17}}{16}, \frac{13}{16} - \frac{5\sqrt{17}}{16}, 1 \right\} \right], [-1, 1, \{[-1, 1, 0]\}]$$

Como en el ejemplo anterior, en este caso el autovalor de mayor módulo es $5/2 + \sqrt{17}/2$, que se corresponde con el mayor autovector de la matriz.

Por tanto, queda demostrado que el teorema de Perron para matrices positivas se cumple.

Todo lo visto anteriormente es muy útil, ahora bien, necesitamos conocer cómo funciona el sistema que utiliza Google en particular. Todo motor de búsqueda precisa de tres elementos básicos: un robot de indexación (*web crawler*), una base de datos e interfaz de consulta de datos. El robot de indexación recorre la Red recogiendo los datos que posteriormente se incorporarán a la base de datos. Los usuarios interactúan con la interfaz y a través de ella acceden a la base de datos.

El problema que queda por resolver es el de la ordenación: ¿en qué orden situar los resultados obtenidos por el *spider*? La solución son las matemáticas..

Decidimos que la mejor forma de explicar el funcionamiento del algoritmo de ordenación de Google, el *Page Rank*, era elaborar un pequeño modelo.

Nuestro primer paso fue la búsqueda de una serie de páginas interrelacionadas que pudiesen integrar nuestro modelo: esta sería la actuación del robot de indexación, pero nosotros tuvimos que hacerlo de forma manual. La relación entre estas páginas web la representamos por medio de un grafo, con el que elaboraremos una matriz: la matriz de conectividad del grafo. En esta matriz, que será nuestra base de datos, los vínculos están representados por 1 y la ausencia de vínculos por 0.

Hasta aquí el trabajo fue más o menos fácil, pero al abordar el tema del algoritmo para la asignación de las importancias nos encontramos con algunas dificultades. La primera de ellas sólo valora la cantidad de vínculos entrantes y salientes de cada página, mientras que el segundo criterio se aproxima más al empleado por Google.

El objetivo del *Page Rank* es cuantificar la probabilidad de llegar a una página de forma aleatoria, por ello el factor probabilístico alcanza una importancia mayor cuanto mayor número de páginas incluya la base de datos, ya que es una distribución normal aleatoria. La fórmula del algoritmo es la siguiente:

$$PR(A) = \frac{1-d}{N} + d \left(\frac{PR(T_1)}{C(T_1)} + \dots + \frac{PR(T_n)}{C(T_n)} \right)$$

donde N es el número total de páginas de la base de datos, n es el número de páginas con vínculos a la página A en la que nos situamos, $PR(A)$ es el *Page Rank* de la página A , $PR(T_i)$ corresponde al *Page Rank* de la página T_i que tiene vínculo/s a la página A , $C(T_i)$ el número total de vínculos salientes de T_i y d es el factor probabilístico de amortiguación cuyo valor se sitúa entre 0 y 1 (en el caso de Google su valor es de 0.85) y su función es indexar la distribución probabilística normalizando los resultados de modo que la suma de todos ellos sea 1.

Las características del *Page Rank* que debe cumplir nuestro modelo para ser matemáticamente eficiente, son las siguientes:

- El *Page Rank* está definido para cada página web y está condicionado por todas las demás páginas que constituyen la Red y tienen vínculos con ella.
- La influencia sobre el *Page Rank* de la página A de los sitios que enlazan con ella no es uniforme: depende del número de enlaces de esa página.
- Un nuevo vínculo a una página aumenta el valor del *Page Rank*.
- La clasificación de cada página depende de toda la Red.

Además la matriz de adyacencia del grafo, A , debe cumplir una serie de características para aplicar la distribución probabilística, esencialmente la condición de que sea una matriz de Markov, es decir, las columnas de A deben sumar 1. Denominaremos la matriz estocástica A' y la consideraremos una matriz de transición del sistema. La condición de matriz de transición del sistema implica que el resultado de multiplicar esta matriz por un vector de proporcionalidad determinado (vector columna unitario, cuyas entradas sean 1 ó 0), es la probabilidad de pasar a cada una de las páginas de la Red partiendo de la página indicada por la entrada no nula del vector unitario, P_k , tras un instante de tiempo (una iteración). Los registros de las iteraciones son la probabilidad de estar en P_k tras n instantes de tiempo.

Por lo tanto el *Page Rank* es un estado estacionario de la Cadena de Markov.

Aplicando una aproximación al criterio del Page Rank tomaremos en cuenta el número de enlaces entre páginas y la importancia de las páginas de las que proceden dichos enlaces. Además incluiremos un factor probabilístico K , de modo que si llamamos x a la importancia:

$$\begin{aligned}x_i &= K(x_j + x_k) \\x_k &= K(x_i + x_j + x_l) \\&\vdots \\x_n &= K(x_i + x_j + x_k + x_l + x_{n-1})\end{aligned}$$

Escribiendo este sistema de ecuaciones en forma matricial obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y despejando, obtenemos $Av = \frac{1}{K}v$, donde si sustituimos λ por $\frac{1}{K}$ y obtenemos la esperada

fórmula que nos relaciona con autovalores y autovectores: $Av = \lambda v$.

Se cumple que el vector de importancias v es único si la matriz es de Markov y la suma de todas las entradas del vector v son 1, por lo que v es unitario.

La convergencia a un vector único de los procesos iterativos se basa en los Teoremas de Perron-Frobenius y el Teorema del Punto Fijo de Banach, por lo que debemos asegurarnos que las matrices cumplen las condiciones de dichos teoremas.

De acuerdo con el Teorema de Perron-Frobenius, podemos afirmar que existe un autovalor dominante simple y positivo, asociado a un autovector también positivo, cuyo módulo es máximo y del que son múltiplos todos los demás autovectores positivos de la matriz.

Las matrices de Markov, con las que estamos trabajando, cumplen el Teorema de Perron de una forma particular: el autovalor predicho será el autovalor 1 con multiplicidad algebraica 1, al cual estará asociado el autovector esperado.

El modo de calcular a nivel real este autovector es mediante el método de las iteraciones, cuyo fundamento está en el Teorema del Punto Fijo de Banach, que nos asegura que al repetir la aplicación anteriormente citada creamos una sucesión que converge hacia el autovector del que habíamos predicho la existencia.

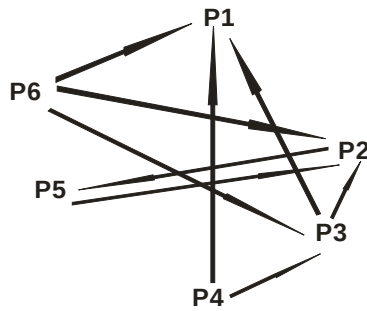
Empleando estos fundamentos matemáticos los vamos a aplicar a dos modelos:

MODELO EULER:

Este primer modelo lo hicimos a partir del campo de búsqueda “Euler” y a partir de seis páginas web interrelacionadas creamos el grafo y la matriz de adyacencia asociada al grafo. Las páginas escogidas son:

- P_1 : GEOCITIES.
- P_2 : EULERARCHIVE.
- P_3 : GROUPS.DCS.
- P_4 : SCIENCEWORLD.WOLFRAM.
- P_5 : EULERSOCIETY.
- P_6 : WIKIPEDIA.

El grafo de las relaciones y la matriz de conectividad serán:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asignamos las importancias según el criterio anteriormente expuesto:

$$\begin{aligned} x_1 &= K(x_3 + x_4 + x_5) & x_4 &= K(0) \\ x_2 &= K(x_3 + x_5 + x_6) & x_5 &= K(x_2) \\ x_3 &= K(x_4 + x_6) & x_6 &= K(0) \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones en forma matricial que coincide con $Av = \lambda v$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

A:=matrix([[0,0,1/3,1/3,0,1/3],[0,0,1/3,0,1/3,1/3],[0,0,0,1/2,0,1/2],[0,0,0,0,0,0],[0,1,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0]]);

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> **eigenvalues(A);**

$$0, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

> **eigenvecs(A);**

$$\begin{bmatrix} 0, 4, \{[1, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, -1, -1, 1]\}, \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \left\{0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0, 1, 0\right\}\right], \\ \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \left\{0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0, 1, 0\right\}\right] \end{bmatrix}$$

¿No se cumple el Teorema de Perron-Frobenius? Tardamos un poco, pero creemos que encontramos la explicación: tal vez al trabajar con un número de hojas tan pequeño tenemos demasiados ceros que hacen que la matriz sea reducible y por lo tanto no obtengamos los resultados que esperamos. Intentamos, pues, salvar esta dificultad sustituyendo los ceros por cantidades muy pequeñas de manera que la matriz no pudiera ser reducible.

A:=matrix([[0.001, 0.001, 1/2, 1/2, 0.001, 1/3], [0.001, 0.001, 1/2, 0.001, 1/3], [0.001, 0.001, 0.001, 1/2, 0.001, 1/3], [0.001, 0.001, 0.001, 0.001, 0.001, 0.001], [0.001, 1, 0.001, 0.001, 0.001, 0.001], [0.001, 0.001, 0.001, 0.001, 0.001, 0.001]]);

$$A := \begin{bmatrix} 0.001 & 0.001 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0.001 & \frac{1}{3} \\ 0.001 & 0.001 & \frac{1}{2} & 0.001 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & \frac{1}{2} & 0.001 & \frac{1}{3} \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 1 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 \end{bmatrix}$$

> **charpoly(A, lambda);**

$$1.000000042 \lambda^6 - 0.006000630 \lambda^5 + 0.000409642405 \lambda - 1.002988514 \lambda^4 \\ + 0.00175324 \lambda^2 + 0.002322982 \lambda^3$$

> **sort(%);**

$$1.000000042 \lambda^6 - 0.006000630 \lambda^5 - 1.002988514 \lambda^4 + 0.002322982 \lambda^3 \\ + 0.00175324 \lambda^2 + 0.000409642405 \lambda$$

> **eigenvalues(A);**

$$1.002263813, -0.9990000000, 0.08326515624, -0.04026448466 + 0.05783292610 I, \\ -0.04026448466 - 0.05783292610 I, 0.$$

Siendo, evidentemente el primer autovalor el que estamos buscando y su autovector correspondiente el que nos da las ordenaciones adecuadas de nuestras páginas, tal y como queríamos demostrar:

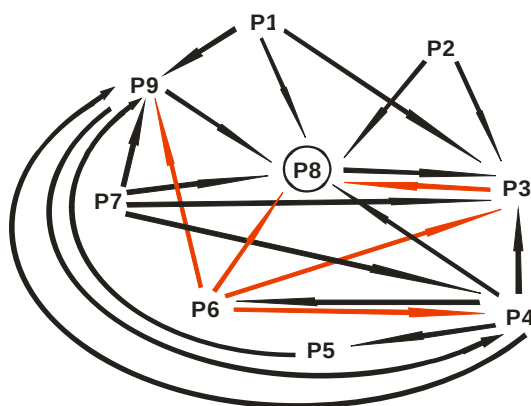
> **eigenvecs(A);**

```
[1.002263811, 1, {[-0.004955601295, -0.9008789588, -0.003308423562,
-0.001808419624, -0.8997537212, -0.001808419624 ]}], [-0.9990000009, 1, {[
-0.57190 10-8, 0.4434135516, -0.5596 10-9, 0.2160000000 10-10, -0.4434135504,
0.2160000000 10-10 ]}], [-0.04026448453 + 0.05783292617 I, 1, {[
```

Donde hemos recortado por cuestión de espacio sólo la parte correspondiente al autovalor que nos interesa y su autovector correspondiente (en primer lugar)

MODELO DE MEDALLAS FIELD

Aquí vamos a obviar el nombre de las páginas que como auténticos ratones de biblioteca hemos conseguido para intentar ganar espacio. El grafo correspondiente sería



```
A:=matrix([[0,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0],[1/3,1/2,0,1/5,0,1/4,1/4,1,0],[0,0,0,0,0,1/4,1/4,0,1/2],[0,0,0,1/5,0,0,0,0,0],[0,0,0,1/5,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,0],[1/3,1/2,1,1/5,0,1/4,1/4,0,1/2],[1/3,0,0,1/5,1,1/4,1/4,0,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> **charpoly(A, lambda);**

$$\lambda^9 - \frac{23}{20}\lambda^7 - \frac{1}{8}\lambda^6 + \frac{3}{20}\lambda^5 + \frac{1}{8}\lambda^4$$

que sería el polinomio característico. Aquí al calcular los autovalores y autovectores nos aparecen unos resultados alucinantes, incomprensibles y descorazonadores, así que volvemos a hacer lo mismo:

```
A:=matrix([ [0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001], [0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001], [1/3,1/2,0.0001,1/5,0.0001,1/4,1/4,1,0.0001], [0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,1/4,1/4,0.0001,1/2], [0.0001,0.0001,0.0001,1/5,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001], [0.0001,0.0001,0.0001,1/5,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001], [0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001], [1/3,1/2,1,1/5,0.0001,1/4,1/4,0.0001,1/2], [1/3,0.0001,0.0001,1/5,1,1/4,1/4,0.0001,0.0001]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0.0001 & \frac{1}{5} & 0.0001 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0.0001 & \frac{1}{2} \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & \frac{1}{5} & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & \frac{1}{5} & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} & 0.0001 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0.0001 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0.0001 & 0.0001 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0.0001 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

```
> charpoly(A, lambda);
```

$$0.9999988977 \lambda^9 - 0.0008655747 \lambda^8 - 0.005217231827 \lambda^7 - 1.151024449 \lambda^6 + 0.0213594 \lambda^5 - 0.121777314 \lambda^4 - 0.0334604 \lambda^3 + 0.13848168 \lambda^2 + 0.15134516 \lambda$$

```
> sort(%);
```

$$0.9999988977 \lambda^9 - 0.0008655747 \lambda^8 - 1.151024449 \lambda^7 - 0.121777314 \lambda^6 + 0.13848168 \lambda^5 + 0.15134516 \lambda^4 - 0.0334604 \lambda^3 + 0.0213594 \lambda^2 - 0.005217231827 \lambda$$

```
> eigenvalues(A);
```

$$1.000799679, -0.9999000000, 0.5987323385, -0.2993660305 + 0.3449275661 I, -0.2993660305 - 0.3449275661 I, 0.4330135790 \cdot 10^{-7}, -0.2741147799 \cdot 10^{-16}, -0.1436217678 \cdot 10^{-16}, 0.1679985510 \cdot 10^{-20}$$

Donde el autovalor que debemos considerar es nuevamente el primero: real y de mayor valor absoluto. Su autovector correspondiente podemos observar que cumple también las condiciones debidas. En este caso para facilitar la labor de encontrarlos les indicaremos que está calculado en cuarta posición.

```
> eigenvects(A);
```

$$\begin{aligned} &[-0.00040126728, -0.00307360612] \}, [0.5068243408 \cdot 10^{-11}, 1, \{[-0.03529433024, \\ &-0.5396258028, 0.2815483378, -0.2293959 \cdot 10^{-8}, -0.04921147525, 0.7805584899, \\ &-0.5365896928, 0.2205744384, -0.1219599954] \}], [1.000799685, 1, \{[\\ &-0.0001322917892, -0.0001322917947, -0.6609023889, -0.000531111629, \\ &-0.0002383763147, -0.0002383763177, -0.0001322917947, -0.661055590, \\ &-0.000613143123] \}], [0.4326242647 \cdot 10^{-7}, 1, \{[-0.007063678887, \\ &-0.007079856182, 0.00589366213, 0.182 \cdot 10^{-8}, 0.003298409850, 0.003301436381, \\ &-0.007079854901, 0.00683798347, 0.00188883177] \}], [0.4250514001 \cdot 10^{-14}, 1, \{[\end{aligned}$$

Donde hemos dejado sólo la parte de los autovectores donde se incluye nuestro autovector (el correspondiente al autovalor 1.000799685).

Así sí encontramos el autovalor que esperábamos con su autovector con todas las entradas reales y del mismo signo, que ordena nuestras páginas de la manera que esperábamos.

TEOREMA DE LA APLICACIÓN CONTRACTIVA DE BANACH

En el artículo de Pablo Fernández encontramos al abordar la cuestión computacional alusiones a un método numérico para determinar el autovector que predice el Teorema de Perron: el método de las potencias. Aquí realmente nos sentimos un poco perdidos pues no sabíamos en qué dirección mirar para buscar una explicación a esa convergencia hacia el autovector que predice el teorema. Intentamos buscar pero no sabíamos cómo. En este caso nuestro profesor nos comentó nuevamente que se nos iba muy lejos pero también nuevamente eso nos motivó más a buscarlo. Finalmente nos dirigió a éste teorema. Primero lo hicimos a través de Internet, encontrando por medio de Google dos artículos que pensamos podrían sernos útiles, principalmente uno acerca del Teorema del punto fijo de Banach por Acosta, Aparicio, Moreno y Villena. Nos vimos metidos en un mundo desconocido en todos los sentidos, incluso en el aspecto del lenguaje.

Haciendo uso del artículo comenzamos por entender qué era una aplicación contractiva:

f es contractiva si es continua y $\exists 0 < K < 1 / \forall x, y \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$ cuestión que de momento nos parece comprensible. Pues bien si una aplicación es contractiva entonces existe un punto x_0 fijo de $f / f(x_0) = x_0$ siendo además $\forall x; x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$, siendo

$f^n(x)$ la función aplicada sucesivas veces, es decir, la aplicación compuesta n veces.

Aquí tras entender esto nos encontramos con la cruda realidad, entramos en el mundo de las demostraciones:

Primeo tendríamos que demostrar que para todo x arbitrario la sucesión $\{f^n(x)\}$ converge, es decir, tiene límite. Debemos de admitir que aunque sí tenemos la demostración delante se nos escapa por completo y creemos que excede los objetivos que nos marcamos en este trabajo, ya que no hemos sido capaces de asimilarla para introducirla en este trabajo.

Sí tuvimos, creemos, más suerte a la hora de la demostración de que si hay un punto fijo es único, porque, si hubiera dos puntos fijos x_0, y_0 , entonces $d(f(x_0), f(y_0)) = d(x_0, y_0)$ por ser puntos fijos y además debería cumplirse $d(f(x_0), f(y_0)) \leq K(d(x_0, y_0))$, cuestión que no es posible, puesto que $0 < K < 1$.

Por último quedaría por demostrar que si $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$, x_0 es fijo; vamos a verlo:

$f(x_0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right)$ que al ser continua cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = x_0$, luego $f(x_0) = x_0$ y es el único punto fijo.

En un principio pensamos en qué relación podía tener esto con nuestro problema y aquí sí que necesitamos un pequeño “empujón”. Efectivamente, nos ayudaron a ver que con la operación

que llevamos a cabo con esos vectores es una aplicación contractiva, ya que $v \rightarrow f(v) = \frac{Av}{\|Av\|}$,

es decir, nuestra aplicación consiste en multiplicar por $\frac{A}{\|Av\|}$ de manera que debe de haber un

punto fijo tal que $f(x_0) = x_0 \Rightarrow \frac{Ax_0}{\|Ax_0\|} = x_0 \Rightarrow Ax_0 = \|Ax_0\|x_0$ lo que significaría que nuestro autovalor es $\lambda = \|Ax_0\|$.

Aplicándolo al modelo Euler:

Definimos el vector sobre el que aplicaremos las iteraciones. En éste caso van a ser 20

```
> v0:=matrix(6,1,[1,0,0,0,0,0]);
```

$$v0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> seq(evalm(A^n*v0),n=1..20);
```

$$\begin{bmatrix} 0.936095539310^{-5} \\ 0.001905437331 \\ 0.624949910110^{-5} \\ 0.341604305610^{-5} \\ 0.001495896463 \\ 0.341604305610^{-5} \end{bmatrix}$$

Por cuestiones de espacio hemos obviado los resultados de los 19 productos previos y además en vez de normalizar cada paso, hemos normalizado el resultado final:

```
> Normalize(<.9360955393e-5,.1905437331e-2,.6249499101e-5,.3416043056e-5,.1495896463e-2,.3416043056e-5>,Euclidean);
```

$$\begin{bmatrix} 0.00386415783463539856 \\ 0.786555461688910662 \\ 0.00257976348565172858 \\ 0.00141012631554308368 \\ 0.617498940506363670 \\ 0.00141012631554308368 \end{bmatrix}$$

Donde apreciamos la tendencia al autovector que nos había salido como predicción del Teorema de Perron

Aplicándolo al modelo de Medallas Field

```
A:=matrix([ [0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001], [0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001], [1/3,1/2,0.0001,1/5,0.0001,1/4,1/4,1,0.0001], [0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,1/4,1/4,0.0001,1/2], [0.0001,0.0001,0.0001,1/5,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001], [0.0001,0.0001,0.0001,1/5,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001], [0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001,0.0001], [1/3,1/2,1,1/5,0.0001,1/4,1/4,0.0001,1/2], [1/3,0.0001,0.0001,1/5,1,1/4,1/4,0.0001,0.0001]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0.0001 & \frac{1}{5} & 0.0001 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0.0001 & \frac{1}{2} \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & \frac{1}{5} & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & \frac{1}{5} & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} & 0.0001 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0.0001 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0.0001 & 0.0001 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0.0001 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

> **v0:=matrix(9,1,[1,0,0,0,0,0,0,0,0]);**

$$v0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

>

seq(evalm(A^n*v0),n=1..20);

$$\begin{bmatrix} 0.0001012519552 \\ 0.0001012519552 \\ 0.5868157622 \\ 0.0004349835010 \\ 0.0001924791165 \\ 0.0001924791165 \\ 0.0001012519552 \\ 0.4248899196 \\ 0.0004998301116 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.0001013329213 \\ 0.0001013329213 \\ 0.4251934749 \\ 0.0004246013888 \\ 0.0001882861230 \\ 0.0001882861230 \\ 0.0001013329213 \\ 0.5873529934 \\ 0.0004878899127 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.0001014139533 \\ 0.0001014139533 \\ 0.5876373467 \\ 0.0004176859195 \\ 0.0001862917708 \\ 0.0001862917708 \\ 0.0001014139533 \\ 0.4257379447 \\ 0.0004807023709 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.0001014950509 \\ 0.0001014950509 \\ 0.4260367483 \\ 0.0004136958267 \\ 0.0001849904662 \\ 0.0001849904662 \\ 0.0001014950509 \\ 0.5881602683 \\ 0.0004769557778 \end{bmatrix}$$

Donde nuevamente hemos recortado 16 de los resultados de otras tantas iteraciones

> **Normalize(<.1014950509e-3,.1014950509e-3,.4260367483,.4136958267e-3,.1849904662e-3,.1849904662e-3,.1014950509e-3,.5881602683,.4769557778e-3>,Euclidean);**

$$\begin{bmatrix} 0.000139752056244535600 \\ 0.000139752056244535600 \\ 0.586624777096995010 \\ 0.000569632134064066528 \\ 0.000254719789860071540 \\ 0.000254719789860071540 \\ 0.000139752056244535600 \\ 0.809858275525656812 \\ 0.000656736955094840344 \end{bmatrix}$$

Que nuevamente vemos que cumple la tendencia y la ordenación que esperábamos .

Conclusiones

En primer lugar, lo que hemos conseguido con este trabajo ha sido el aprender nuevos conceptos hasta ese momento desconocidos, que en un futuro próximo pueden sernos de gran utilidad ,ayudándonos en nuestro desarrollo académico.

Al acudir a bibliografía matemática accedimos a un lenguaje nuevo que sobrepasaba nuestros conocimientos escolares, basados fundamentalmente en términos empíricos, y a veces en lengua inglesa, lo cual ralentizaba nuestro trabajo.

Por otro lado, hemos aprendido a trabajar con programas como el Maple más rápido y potente pero de mayor dificultad a la hora de su manejo ya que la forma de presentar los resultados, en muchas ocasiones, nos parecía ininteligible. Eso nos obligó a buscar maneras de simplificar esos resultados, cuestión que no aparece en todos los manuales y que por tanto nos hizo perder mucho tiempo. Aún así fue necesario aprender a usarlo ya que con el Derive, más familiar en nuestro ámbito, no podíamos realizar, porque nuestra versión no era lo suficientemente rápida y potente. De cualquier forma pensamos que seguramente nos vendrá muy bien en un futuro próximo.

En resumen, toda nuestra labor en este proyecto acudiendo de continuo a artículos y libros matemáticos nos ha hecho darnos cuenta de la importancia de las matemáticas en el mundo y de las posibilidades que ofrece.

Bueno, y llegamos al final...

Creemos, sin embargo, que resulta más notorio remarcar el impacto que este trabajo ha ejercido sobre nosotros en nuestra visión personal acerca de las Matemáticas. Hemos descubierto que una carrera -en nuestro caso y de momento sólo una asignatura- tan temida, y en muchas ocasiones por ignorancia, repudiada, sirve de base a muchísimos de los sistemas que hoy nos rodean y que sin ellos, al menos nuestra generación no sería capaz de imaginarse una calidad de vida como la que hoy disfrutamos. Este trabajo, más que enseñarnos, nos ha abierto los ojos y nos ha ayudado a comprender qué es lo que verdaderamente se esconde detrás de las cosas más inimaginables, como por ejemplo el funcionamiento del buscador que hemos expuesto, lo mejor posible, en las páginas anteriores. Ha abierto definitivamente nuestro “apetito” hacia el saber, por expresarlo de la forma más fiel posible.

Pero eso no es todo. Si nos acercamos hacia un ámbito más privado, tenemos que admitir que nos lo hemos pasado bien. Sí, puede parecer que estemos un poco locos, pero con tantas tardes de trabajo como las que teníamos por delante debían ser afrontadas con una pizca de calma, un puñadito de interés, una cucharada sopera de ilusión y, sobre todo, un kilo de sacrificio -mezclando la proporcionalidad y la gastronomía en una simbiosis-. Y al final, sacrificio pese a lo que haya podido parecer cuando hemos relatado los inconvenientes que hemos encontrado, es lo que menos sentimos, porque nos gustaba lo que hacíamos, porque nos sentíamos vivamente interesados por ello y porque cada día que pasaba nos hacíamos más amigos unos de los otros. Eso es lo más importante.

...Y... bueno... venga, vale, admitimos -pero sólo un poquito y a regañadientes- que también hemos aprendido a apreciar mejor el trabajo de los profesores que se preocupan por ayudarnos en nuestro día a día, en especial el de nuestro profesor de Matemáticas, quien ha tenido que aguantar muchas de nuestras quejas a lo largo del curso -que si nos veíamos muy agobiados, que si no nos iba a dar tiempo, etc, etc- y quien ha tenido que dar más de una vez algún que otro “tirón de orejas” para que espabiláramos. Desde aquí aprovechamos para agradecer el que nos guiara en la realización de este trabajo, que seguramente sin él no habríamos sabido ni como acabar, ni seguramente como empezar.

Gracias.

Bibliografía:

- Álgebra Lineal: Método, Fundamentos, Algoritmos (R. Criado Herrero, A. Byosa Brun, M. A. Hernández Medina). Editorial: E. T. S. I. T.
- Álgebra Lineal con métodos elementales (L. Merino, E. Santos).
- Nonlinear Functional Analysis (Klaus Deimling). Editorial: Springer Verlag
- Ecuaciones diferenciales ordinarias/ Teoría de estabilidad y control (Miguel de Guzmán). Editorial: Alhambra

- 2000 Problemas de álgebra lineal (I. V. Proskuriakov). Editorial: Reverté, S. A.
- Álgebra básica (Michel Queyssonne). Editorial: Vicens - Vives
- Introducción al álgebra (A. I. Kostrikin). Editorial: Mc Graw Hill
- Álgebra matricial (José Manuel Gamboa, M^a Belén Rodríguez). Editorial: Anaya
- Álgebra lineal y sus aplicaciones (Strang). Editorial: Addison-Wesley Iberoamericana

Artículos

- El secreto de Google y el Álgebra lineal (P. Fernández; UAM)
- Artículo de Smoke Sellers
- Artículo de la Asociación Matemática Venezolana (Roberto Markarian & Nelson Möller).
- A Geometric Proof of de Perron-Frobenius Theorem. Revista Matemática de la Universidad Complutense Vol 5, número 1 1992. (Alberto Borobia and Ujué R. Trías)
- Teorema del valor medio y del punto fijo de Banach (Acosta, Aparicio, Moreno y Villena).