Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Primera Edición, 2006/2007

TRABAJO: The Cube

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

- María Anaya Gómez
- Celia Martínez Pérez
- Sergio del Olmo García
- Álvaro Romero Miralles.

TUTORES:

- José Luis Muñoz Casado
- Belén Rodríguez Rodríguez.

CENTRO: IES Salvador Dalí (Madrid)

Índice

Introducción

La investigación que aquí presentamos comenzó cuando vimos con nuestros tutores la película CUBE, (Vincenzo Natali, 1997). En esta película el director presenta unas habitaciones cúbicas con seis puertas, una en el centro de cada cara, unidas entre sí formando un gran cubo.

Los protagonistas deambulan de habitación en habitación buscando una salida. Pronto averiguan que hay habitaciones con trampas, esto les hace agudizar el ingenio y descubren que en cada habitación hay un código de nueve cifras agrupadas de tres en tres.

Los protagonistas intuyen que esos números son la clave que les conducirá a la salida. Uno de estos personajes es Leaven, estudiante de Matemáticas, que descubre que en estos números se encuentra codificado tanto la posición actual del cubo, como la de los desplazamientos que dicho cubo seguirá hasta volver a su posición original. Esto ocurre tras tres desplazamientos.

Entre los protagonistas se encuentra Worth que confiesa haber sido el encargado de construir el armazón que envuelve a todos los cubos, por tanto, conoce el tamaño del mismo. Con este dato y la medida de un cubo Leaven averigua que están encerrados en una carcasa de $27 \times 27 \times 27$ en los que hay $26 \times 26 \times 26$ habitaciones cúbicas formando un cubo gigante.

A partir de ese descubrimiento Leaven presta más atención a estos números y consigue descifrar el código. Por ejemplo, en una de las puertas aparece el número 320 176 223, que nos indica que la posición actual del cubo es $(3+2+0, 1+7+6, 2+2+3) = (5,14,7)$. Y que sus tres próximos desplazamientos los realizará según los vectores de traslación:

$$(3-2, 1-7, 2-2) = (1,-6,0),\ (2-0, 7-6, 2-3) = (2,1,-1) \text{ y } (0-3, 6-1, 3-2) = (-3,5,1).$$

Observamos que el cubo pasa por las siguientes posiciones:

Posición original: $(5,14,7)$

Posición tras el primer movimiento: $(5,14,7)+(1,-6,0)=(6,8,7)$

Posición tras el segundo movimiento: $(6,8,7)+(2,1,-1)=(8,9,6)$

Posición tras el tercer movimiento: $(8,9,6)+(-3,5,1)=(5,14,7)$

En el transcurso de la película los personajes descubren una habitación con una de sus coordenadas igual a 27. Leaven explica a sus compañeros que esa habitación es el puente entre el cubo gigante de habitaciones y el armazón. Con esta información los personajes intentan encontrar el camino hacia la salida.

Objetivos

Después de ver la película y que nos explicaran los aspectos matemáticos que en ella aparecen, nuestros tutores nos lanzaron la siguiente pregunta: *¿es posible la construcción de un cubo con esas características*?

Nuestra primera reacción fue incredulidad, pues en la película se menciona un cubo de dimensiones $26 \times 26 \times 26$ y no nos sentíamos capaces de razonar sobre las características de un cubo de tales dimensiones, en el que además cada una de las habitaciones se encuentra en movimiento. Sin embargo, los tutores nos indicaron que iriamos estudiando el problema por partes, de modo que cada una de ellas nos resultara asequible, hasta llegar al caso propuesto.

Así nuestro primer objetivo se convierte en la construcción de un modelo bidimensional con el que nos sentimos mucho más cómodos ya que al ser más manipulable y fácil de construir nos permitía visualizar ciertas propiedades matemáticas que en él aparecen.

La compresión del problema bidimensional nos proporcionó algunas herramientas matemáticas necearias para abordar el caso tridimensional.

Por tanto nuestro plan de trabajo fue el siguiente:

1. Estudiar el caso bidimensional.
   1.1. Cuestiones relativas a la distancia entre los cuadrados.
   1.2. Cuestiones relativas al tamaño del tablero.
   1.3. Cuestiones relativas sobre el número de huecos.
2. Estudiar el caso tridimensional
   2.1. Cuestiones relativas sobre la codificación de los cubos.
   2.2. Cuestiones sobre el movimiento espacial.

Resultados

Presentamos en esta sección los resutados que a lo largo de estos meses hemos ido obteniendo.

Una primera aproximación a un modelo bidimensional de Cube

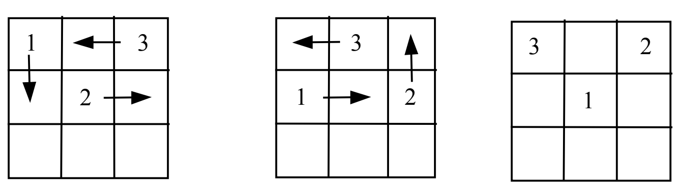
En un tablero con $n \times n$ cuadrados iguales colocaremos n cuadrados sobre él. Cada uno de estos cuadrados se mueve a velocidad constante, y todos ellos a la vez. Sólo se mueven en horizontal y vertical. Aunque recordamos que en la película los cubos no se mueven a la misma velocidad y además tras tres movimientos vuelven a la posición inicial.

Nos preguntamos:

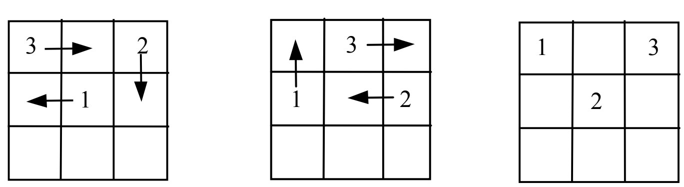
¿Cómo debemos colocar los n cuadrados sobre el tablero para que después de dos movimientos, entiéndase movimiento como desplazamientos horizontales y verticales, de forma que el primero ocupe la posición que inicialmente ocupaba el segundo, el segundo la que ocupaba el tercero,... y el último la del primero?

Ejemplo:

En un tablero 3×3 colocamos tres cuadrados, C_1, C_2 y C_3, y tras dos movimientos $C_1 \to C_2 \to C_3 \to C_1$, y así después de 6 movimientos cada cuadrado ha vuelto a su posición de partida.



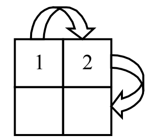
Primer Movimiento



Segundo Movimiento

Observación:

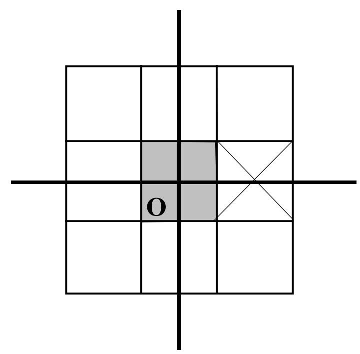
Queremos destacar que el suponer que los cuadrados se mueven a la vez y a la misma velocidad impone muchas restricciones en la colocación de los cuadrados. Por ejemplo, impide construcciones como la siguiente.



Para que el cuadrado 1 ocupe la posición en la que está el 2, éste tiene que desplazarse y hasta que este desplazamiento no se haya completado el 1 no puede comenzar a moverse.

En la búsqueda de un modelo matemático

Partiremos del plano euclídeo. Suponemos que los cuadrados tienen lado 1. Tomaremos como representante de cada cuadrado las coordenadas del punto de intersección de las dos diagonales. Fijamos el origen de coordenadas en el centro de uno de estos cuadrados.



Establecemos una biyección entre los cuadrados y sus representantes. De este modo si $C_{0,0}$ es el cuadrado centrado en el origen y lo movemos una unidad hacia la derecha pasará a ser el cuadrado representado por el punto $(1,0)$, y si ahora lo volvemos a mover una unidad hacia arriba, pasará a ser el cuadrado $C_{1,1}$ cuyo representante es el $(1,1)$.

Así nuestro modelo será $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. En este espacio definimos la siguiente distancia

$$d:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{N} \text{ tal que } d\big((m_1,n_1),(m_2,n_2)\big)=|m_1-m_2|+|n_1-n_2|$$

Intuitivamente esta distancia es el menor número de movimientos necesarios para trasladar el cuadrado C_{m_1,n_1} a la posición del cuadrado C_{m_2,n_2}. Continuando con el ejemplo anterior, podemos ver que la distancia entre $C_{0,0}$ y $C_{1,1}$ es dos, pues necesitamos un movimento en horizontal y uno en vertical para trasladar el primero sobre el segundo.

Proposición:

Efectivamente *d* es distancia:

Demostración:

Debemos comprobar las tres siguientes condiciones:

1. $d(x,y) \geq 0$. Además $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \qquad \forall x,y,z \in \mathbb{Z}$

La primera de estas condiciones se cumple porque el valor absoluto de cualquier número real es siempre mayor o igual que cero. Además el único número real con valor absoluto nulo es el cero.

La segunda condición es consecuencia de que $|a| = |-a|, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

La tercera condición es consecuencia de que $|a+b| \leq |a| + |b|, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

Ejemplo:

Para familiarizarnos con esta distancia vamos a ver cuál es la circunferencia de centro el origen y radio uno.

$$S_1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \text{ tales que } |x| + |y| = 1\} = \{(0,1),(1,0),(0,-1),(-1,0)\}$$

De ahora en adelante, gracias al modelo encontrado, podremos pensar en puntos en lugar de cuadrados teniendo en cuenta que la distancia que empleamos no es la usual sino la anteriormente descrita.

En este marco y con esta distancia, para estudiar el problema de colocar *n* cuadrados C_1, C_2, ... C_n, para que $C_1 \to C_2 \to \ldots \to C_{n-1} \to C_n \to C_1$ comenzaremos por ver cómo son los polígonos de *n* vértices y de lados iguales, en este espacio.

Algunas propiedades de este espacio métrico

Observación:

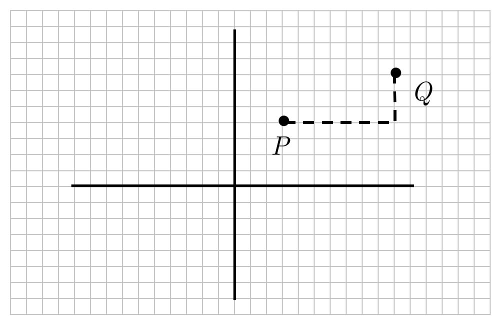
Sean C_1 y C_2 dos de nuestros cuadrados y $P = (m_1, n_1)$ y $Q = (m_2, n_2)$ sus representantes, por ello $d\left(C_1, C_2\right) = d\left(P, Q\right) = |m_1 - m_2| + |n_1 - n_2| = d$

Pues bien, observamos que si Γ es una poligonal arbitraria que nace en *P* y muere en *Q* entonces $\text{long}\ (\Gamma) - d$ es un número par.

Esto se debe al siguiente hecho. Si para ir de C_1 a C_2 no elegimos el camino más corto, esto es, $|m_1 - m_2|$ movimientos en horizontal (todos hacia la derecha o hacia la izquierda, según convenga) y $|n_1 - n_2|$ movimientos en vertical (todos hacia arriba o hacia abajo, según convenga), entonces cada movimiento que se haga de los que no sean necesarios habrá que deshacerlo.

Ejemplo.

Sean $P=(3,4)$ y $Q=(10,7)$. Evidentemente para trasladar P sobre Q debemos mover P siete unidades hacia la derecha y tres hacia arriba, así vamos desde P hasta Q por la línea discontinua que aparece el la figura. Un camino equivalente (en longitud) al anterior es desplazarnos primero tres unidades hacia arriba y luego siete a la derecha. También podríamos intercalar los movimientos, por ejemplo, podríamos mover primero dos unidades a la derecha, luego una hacia arriba, luego otras dos a la derecha, luego dos hacia arriba y tres a la derecha. Sin embargo, si para ir de P a Q elegimos otra poligonal que no sea de las anteriores, es porque en algún momento hemos hecho un movimiento hacia la izquierda (abajo), en cuyo caso tendríamos que hacer uno más a la derecha (arriba), o porque hemos hecho más de siete movimientos a la derecha, por lo que tendríamos que hacer otros tantos hacia la izquierda, o hemos dado más de tres movimientos hacia arriba por lo que habría que bajar otro tanto.



Proposición:

Sean P y Q dos puntos cualesquiera de una circunferencia de centro arbitrario O y radio $r \in \mathbb{N}$. Entonces $d(P,Q)=d$ es par.

Demostración:

Sea Γ la poligonal que nace en P, pasa por O y luego por Q. Su longitud es

$$\operatorname{long}(\Gamma) = r + r = 2r$$

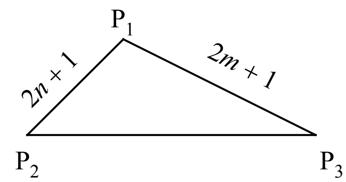
En virtud de la observación anterior existe un número natural m tal que $\operatorname{long}(\Gamma) - d = 2m$, luego despejando $d = 2r - 2m$, y por tanto par.

Proposición:

En este espacio no existen triángulos tales que las longitudes de sus lados sean números impares.

Demostración:

Sea $\Delta\, P_1P_2P_3$ el triángulo de vértices P_1, P_2 y P_3 y sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que



$$d\left(P_1, P_2\right) = 2n+1 \text{ y } d\left(P_1, P_3\right) = 2m+1$$

Veremos que entonces $\operatorname{dist}\left(P_2, P_3\right)$ es par. En efecto, sea Γ la poligonal que nace en P_2, pasa por P_1 y luego por P_3, así

$$\operatorname{long}\left(\Gamma\right) = \operatorname{dist}\left(P_2, P_1\right) + \operatorname{dist}\left(P_1, P_3\right) = 2n+1+2m+1 = 2(m+n+1) \text{ es par}$$

Además por la observación anterior existe un número natural p tal que $\operatorname{long}\,(\Gamma) - d\left(P_2, P_3\right) = 2p$, de donde se deduce que $\operatorname{dist}\left(P_2, P_3\right)$ es par.

Corolario

En este espacio no existen triángulos equiláteros con la longitud de sus lados impar.

Con la misma idea de antes, ahora veremos que en este espacio no existen polígonos con un número impar de vértices y de modo que las longitudes de sus lados sean todas números impares.

Proposición

En este espacio no existen polígonos con un número impar de vértices $P_1, P_2, P_3 \ldots P_{2m}, P_{2m+1}$, y con todos los lados de longitud impar.

Demostración:

En efecto, sean $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2m}, P_{2m+1}$ los vértices de un polígono tales que las siguientes distancias

$$d\left(P_1, P_2\right), d\left(P_2, P_3\right), \ldots, d\left(P_m, P_{m+1}\right)$$

$$d\left(P_1, P_{2m+1}\right), d\left(P_{2m+1}, P_{2m}\right), \ldots, d\left(P_{m+3}, P_{m+2}\right) \text{ sean impares}$$

Veremos que en tal caso $d\left(P_{m+1},P_{m+2}\right)$ es par. Denotamos por Γ_1 la poligonal que pasa por $P_1,P_2,P_3...P_m$ y P_{m+1}, y por Γ_2, la poligonal que pasa por $P_1,P_{2m+1},P_{2m}...P_{m+3}$ y P_{m+2}. Así $\text{long}(\Gamma_1)$ y $\text{long}(\Gamma_2)$, tienen la misma paridad. (Pues ambas son suma de *m* números impares. Luego serán pares si *m* lo es e impares cuando *m* sea impar)

Sea ahora Γ_3 la poligonal $\Gamma_3=\Gamma_1^{-1}\cup\Gamma_2$, esto es, la que consiste en recorrer Γ_1 al revés y luego empalmar con Γ_2. De este modo Γ_3 nace en P_{m+2} y muere en P_{m+1}. Además

$$\text{long}\left(\Gamma_3\right)=\text{long}\left(\Gamma_1\right)+\text{long}\left(\Gamma_2\right)$$

es par, pues es suma, o bien de dos números pares, o bien de dos números impares.

En virtud de la observación anterior sabemos que $\text{long}\left(\Gamma_3\right)-d\left(P_{m+1},P_{m+2}\right)$ es par, pero como además también es par $\text{long}\left(\Gamma_3\right)$, se tiene que $d\left(P_{m+1},P_{m+2}\right)$ ha de ser par.

Observación

Por lo anterior no podremos colocar $2n+1$ cuadrados, $C_1,C_2,C_3...C_{2n},C_{2n+1}$ tales que $d\left(C_1,C_2\right)=d\left(C_2,C_3\right)=...=d\left(C_{2n},C_{2n+1}\right)=d\left(C_{2n+1},C_1\right)=2m+1$ y se muevan según el patrón $C_1\to C_2\to...\to C_{2n}\to C_{2n+1}\to C_1$

Cuestiones relativas al tamaño del tablero

En este trabajo también hemos estudiado algunas propiedades relacionadas con el tamaño del tablero.

Hemos visto antes que la distancia entre los distintos cuadrados, que permite la configuración de *n* cuadrados tales que $C_1\to C_2\to...\to C_{n-1}\to C_n\to C_1$ tiene que ser par. Por otro lado, el menor número positivo par es el 2, luego éste es precisamente el mínimo de las distancias que permite el movimiento en las condiciones anteriores. De donde se deduce que:

Proposición

El número mínimo de cuadrados que ha de tener un tablero para que sea posible colocar *n* cuadrados C_1, C_2, ... C_n, tal que el movimiento que sigue el patrón

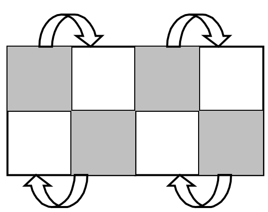
$$C_1\to C_2\to...\to C_{n-1}\to C_n\to C_1$$

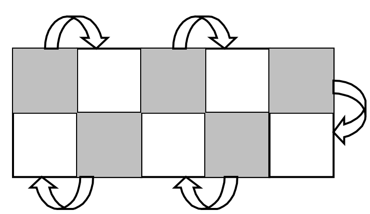
sea realizable sin salirse del tablero es 2*n*.

Demostración

Es claro que para que $d\left(C_i, C_{i+1}\right) = 2$ debe existir un cuadrado vacío adyacente a ambos. Además el cuadrado vacío que es adyacente a C_i y a C_{i+1} es distinto al que es adyacente a C_{i+1} y a C_{i+2}. Pues por el primero pasará C_i cuando vaya de camino hacia C_{i+1}, y por el segundo pasará C_{i+1} cuando vaya de camino a C_{i+2}. Es por ello, que si fuesen el mismo C_i y C_{i+1} chocarían.

Además en un tablero rectángulo de dimensiones $2 \times n$ podemos colocar n cuadrados de la forma pedida. En efecto, basta rellenar la primera fila del modo cuadrado-hueco-cuadrado-... y luego rellenar la segunda fila poniendo debajo de un cuadrado un hueco y debajo de un hueco un cuadrado.





Proposición

La longitud del lado del menor tablero cuadrado en el que se pueden colocar n cuadrados C_1, C_2, ... C_n, que se muevan a velocidad constante y siguiendo el patrón

$$C_1 \to C_2 \to \ldots \to C_{n-1} \to C_n \to C_1$$

es $E\left[\sqrt{2n-1}\right]+1$

Demostración

De la proposición anterior se deduce que el área del menor tablero en las condiciones del enunciado ha de ser mayor o igual que $2n$. Por ello, la longitud del lado, que denotaremos por l, ha de ser mayor o igual que $l \geq \sqrt{2n}$.

Distinguiremos dos casos según que $\sqrt{2n} \in \mathbb{N}$ o que $\sqrt{2n} \notin \mathbb{N}$

i) Si $\sqrt{2n}$ es un número natural, entonces ésta es la longitud mínima

ii) Si $\sqrt{2n}$ no es un número natural, entonces $E\left[\sqrt{2n}\right]+1$ es el menor natural mayor que $\sqrt{2n}$, y como l ha de ser natural y mayor o igual que $\sqrt{2n}$, deducimos que $l = E\left[\sqrt{2n}\right]+1$ es el candidato a lado del tablero más pequeño posible.

De este modo concluimos que

$$l = \begin{cases} \sqrt{2n} & \text{si} \quad 2n \text{ es un cuadrado perfecto} \\ E\left[\sqrt{2n}\right]+1 & \text{en} \quad \text{caso} \quad \text{contraio} \end{cases}$$

Si queremos evitar distinguir casos podemos resumir lo anterior en una única fórmula dada por $l = E\left[\sqrt{2n-1}\right]+1$

Después de haber estudiado algunas propiedades de los polígonos en este espacio nos lanzamos a la construcción de nuestro Cube bidimensional.

Construcción de un Cube bidimensional

Con toda la información anterior nos aventuramos a diseñar un modelo bidimensional cumpliendo con los requisitos anteriores: velocidad constante, mínima distancia y una codificación igual que en la película.

Los cuadrados presentados en el modelo tienen un número de cuatro cifras agrupadas de dos en dos: $x_1x_2 -- y_1y_2$ y tal que

- $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$ sean las coordenadas del cuadrado.
- $(x_1 - x_2\ ,\ y_1 - y_2)$ sean las coordenadas del vector de traslación del primer movimiento que realice el cuadrado.

	20--11	⇨	31--11	⇨	42--11	⇨	53--11	⇨	55--02	
	⇧								⇩	
	11--31		22--13	⇦	24--22	⇦	35--22	⇦	46--22	
	⇧		⇩							
	11--42		31--33	⇨	42--33	⇨	53--33	⇨	55--24	
	⇧								⇩	
	11--53	⇦	13--44		33--35	⇦	35--44		55--35	
			⇧		⇩		⇩		⇩	
			22--64	⇦	24--55		44--64	⇦	46--55	

Movimientos en tableros bidimensionales con un único hueco

Tras haber construido este modelo queríamos intentar alguno con menos huecos. De hecho nos fuimos al caso más extremo: con un solo hueco. Es decir, en un tablero $n \times n$ se colocan $n^2 - 1$ cuadrados. Evidentemente en este caso no se pueden mover a la vez. De hecho, se mueven de uno en uno.

Así nos preguntamos si dada una disposición inicial de los $n^2 - 1$ cuadrados, ¿es posible conseguir cualquier otra disposición de estos cuadrados? Muy pronto vimos que esto no era siempre posible.

Ejemplo:

Si consideramos las dos siguientes disposiciones en un tablero 2×2 pronto observaremos que no es posible pasar de una a la otra con una secuencia de movimientos válidos. Llamamos movimiento válido a deslizar uno de los números adyacentes a la casilla vacía hasta ocuparla, dejando vacante la casilla ocupada originalmente por la pieza movida. Los movimientos sólo se pueden realizar en horizontal o vertical.

1	2
3	

2	1
3	

Nuestros tutores nos indicaron que lo que nos proponíamos era el conocido juego del 15, que fue propuesto por Sam Loyd (1841-1911).

Juego del 15

El juego consistía en una caja cuadrada que contenía quince piezas cuadradas, numeradas del 1 al 15, dispuestas como en la siguiente figura.

Observamos que la casilla inferior derecha está vacía, y si los números se leen de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo entonces están ordenados en forma creciente, excepto por el 15 y el 14 que aparecen cambiados. Sam Loyd ofreció pagar mil dólares a quien lograra, mediante alguna secuencia de movimientos válidos, intercambiar el 14 y el 15 dejando los demás números en su posición inicial.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Nuestros tutores nos indicaron que la solución al problema que estábamos pensando aparecía en la obra "El enigma de Fermat", de Simon Singh (págs 136-138), pero antes de lanzarnos a su lectura debíamos saber qué es una permutación. También era necesario saber que era una permutación par y una impar.

Definición

Una permutación de los números del 1 al n es una reordenación cualquiera a_1, a_2, ... a_n, de estos n números.

Por ejemplo, todas las permutaciones de los números 1, 2 y 3 son $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ y $(3,2,1)$.

En realidad el concepto de permutación de *n* elementos ya lo conocíamos, pues lo habíamos estudiado en Matemáticas, en el tema de Combinatoria. Lo que desconocíamos era que las permutaciones se dividen en pares e impares.

Definición

Dada una permutación a_1, a_2, ... a_n de los números 1, 2, ...*n*, cada par (a_i, a_j) con $a_i > a_j$ y con $i < j$ que aparece en la sucesión se denomina inversión. Si el número total de inversiones de una permutación es par, entonces se dice que la permutación es par, en caso contrario, se dice que es impar.

Continuando con el ejemplo anterior vemos que:

$(1,2,3)$, $(2,3,1)$ y $(3,1,2)$ son permutaciones pares

$(3,2,1)$. $(1,3,2)$ $(2,1,3)$ son permutaciones impares

Ahora bien, lo que afirma Simon Singh en su obra "El enigma de Fermat" es que si en el juego del 15 partimos de una posición en la cual la casilla vacía se encuentra en la esquina inferior derecha y tras una secuencia de movimientos válidos seguimos dejando la casilla vacía en esta posición, entonces la paridad de la permutación obtenida es la misma que la de partida.

Lo anterior se debe a que los movimientos horizontales no modifican en nada la permutación y tan solo desplazan la casilla vacía dentro de la misma fila. En cambio si movemos un número hacia abajo el efecto será que el número adelanta a los tres que le siguen, y además la casilla vacía pasará de una fila impar a una par, o viceversa. Así si el número a bajar está en inversión con *k* de los tres que le siguen (con *k* igual a 0, 1, 2 o 3), al efectuar el movimiento esas *k* inversiones desaparecerán, pero aparecerán $3-k$ nuevas. Por ello las permutaciones antes y después del movimiento serán de diferente paridad. Análogamente, las permutaciones de antes y después de subir un número tendrán diferente paridad.

Ahora bien, si partimos de una posición inicial en la que esté la casilla vacía en la esquina inferior derecha y volvemos a dejar en el mismo sitio la casilla vacía, entonces hemos tenido que realizar un número par de movimientos verticales (pues la casilla vacía ha subido tantas veces como ha bajado). Por lo tanto, la paridad de la permutación original y la obtenida tras los movimientos ha de ser la misma. Lo que prueba que podemos clasificar las configuraciones en pares e impares.

De este modo, si partimos de una configuración inicial que presente una permutación par, entonces tras una secuencia de movimientos válidos podemos conseguir llegar a la configuración 1, pero si partimos de una configuración que presente una permutación impar, entonces sólo llegaremos a la configuración 2.

Configuración 1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

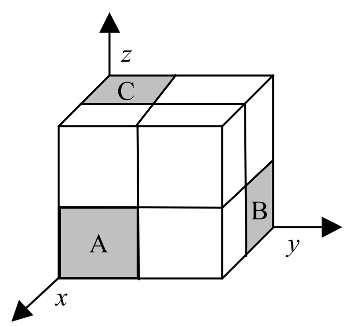
Configuración 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

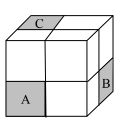
Tras haber encontrado la solución a este problema nos propusimos buscar un algoritmo de modo que dada una configuración arbitraria, nos condujese, bien a la configuración 1 bien a la configuración 2, dependiendo de la paridad de la permutación de partida. Lo máximo que llegamos a conseguir fue encontrar una solución a un juego particular, y nos llevó tanto tiempo que desistimos de encontrar un algoritmo general.

Primer intento de construcción de un Cube tridimensional sencillo

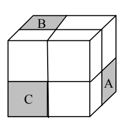
Al abordar el problema tridimensional quisimos comenzar con un caso muy sencillo. En un cubo de arista 2 unidades, colocamos tres cubos, A, B y C, de arista una unidad, tal y como muestra la figura. De manera que tras efectuarse el primer movimiento $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{A}$, y así, tras tres movimientos todos los cubos regresaran a sus posiciones iniciales.



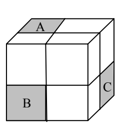
Posiciones



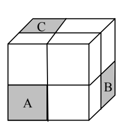
inicial



tras el primer movimiento



tras el segundo movimiento



vuelta a la de partida

Nuestro propósito era buscar una codificación para estos cubos como la de la película, esto es, cada cubo llevará un número de nueve cifras agrupadas de tres en tres: $x_1x_2x_3 \quad y_1y_2y_3 \quad z_1z_2z_3$

y tal que

- $(x_1 + x_2 + x_3\ ,\ y_1 + y_2 + y_3\ ,\ z_1 + z_2 + z_3)$ sean las coordenadas del cubo
- $(x_1 - x_2\ ,\ y_1 - y_2\ ,\ z_1 - z_2)$ sean las coordenadas del vector de traslación del primer movimiento que realice el cubo

- $(x_2 - x_3 \ , \ y_2 - y_3 \ , z_2 - z_3)$ sean las coordenadas del vector de traslación del segundo movimiento que realice el cubo
- y por ello, si el tercer movimiento viene determinado por el vector de traslación $(x_3 - x_1 \ , \ y_3 - y_1 \ , z_3 - z_1)$, volveremos a la posición de partida.

Al ponernos manos a la obra observamos que al imponer $\mathrm{A} = (1{,}0{,}0)$, $\mathrm{B} = (0{,}1{,}0)$ y $\mathrm{C} = (0{,}0{,}1)$, ocurre que si $x_1x_2x_3 \ \ y_1y_2y_3 \ \ z_1z_2z_3$ es la codificación de A, se debe cumplir:

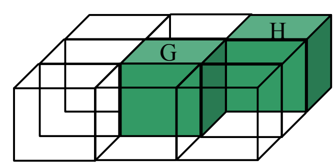
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} ,$$

pero este sistema tiene por única solución $x_1 = \frac{-1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$.

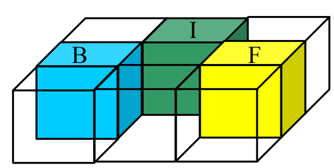
Acabamos de ver que ya en uno de los casos más sencillos encontramos problemas en la codificación, pues obtenemos números racionales y nosotros pretendiamos una codificación sólo con naturales.

Cambiamos la codificación

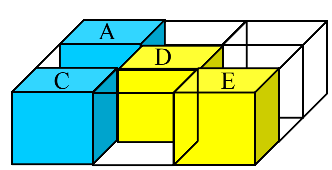
Para salvar el problema que acabamos de describir adoptamos un cambio de codificación. Ahora cada cubo lleva un número de nueve cifras agrupadas de tres en tres: $x_1x_2x_3 \quad y_1y_2y_3 \quad z_1z_2z_3$ y tal que



- $(x_1 + x_2 + x_3 \ , \ y_1 + y_2 + y_3 \ , z_1 + z_2 + z_3)$ sean las coordenadas del cubo
- $(x_2 - x_3 \ , \ y_2 - y_3 \ , z_2 - z_3)$ sean las coordenadas del vector de traslación del primer movimiento que realice el cubo



- $(x_3 \ , \ y_3 \ , z_3)$ sean las coordenadas del vector de traslación del segundo movimiento que realice el cubo
- y por ello, si el tercer movimiento viene determinado por el vector de traslación $(-x_2, -y_2, -z_2)$, volveremos a la posición de partida.



Con esta nueva codificación salvamos el problema de las fracciones pero nos siguen quedando números enteros, por ello vamos a permitir que en la codificación aparezcan números negativos, que serán denotados por su valor absoluto seguido de un apóstrofo. De este modo, codificaremos el número -3 por 3´.

Con estas instrucciones construiremos un modelo que consistirá en 9 cubos (A, B, ...e I) de arista 1 insertos en uno de arista 3, tal y como muestra la figura. Como antes tras el primer movimiento

$$\mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{A}$$

$$\mathrm{D} \to \mathrm{E} \to \mathrm{F} \to \mathrm{D}$$

$$\mathrm{G} \to \mathrm{H} \to \mathrm{I} \to \mathrm{G}$$

y después de tres movimientos todos retornan a su posición de partida. Si consideramos que $\mathrm{A} = (0,0,0)$, entonces $\mathrm{B} = (1,0,1)$, $\mathrm{C} = (2,0,0)$, $\mathrm{D} = (1,1,0)$, $\mathrm{E} = (2,2,0)$, $\mathrm{F} = (1,2,1)$, $\mathrm{G} = (1,1,2)$, $\mathrm{H} = (0,2,2)$ e $\mathrm{I} = (0,1,1)$.

Sólo detallaremos los cálculos necesarios para la codificación de A, para el resto de los cubos se procede de manera análoga, y por ello, tan solo damos su código.

Hay que imponer:

$$(x_1 + x_2 + x_3 \ , \ y_1 + y_2 + y_3 \ , z_1 + z_2 + z_3) = (0,0,0),$$

$$(x_2 - x_3 \ , \ y_2 - y_3 \ , z_2 - z_3) = (1,0,1)$$

$$(x_3 \ , \ y_3 \ , z_3) = (1,0,-1)$$

De aquí obtenemos tres sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Estos sistemas son compatibles determinados.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 - y_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_2 - z_3 = 1 \\ z_3 = -1 \end{cases}$$

que tienen por soluciones

$$x_1 = -3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1 \ \ ; \ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0 \ \ ; \ z_1 = 1,\ z_2 = 0,\ z_3 = -1$$

Por consiguiente, la codificación de A será $3'21 \quad 000 \quad 101'$.

Análogamente se obtiene que:

$$\mathrm{B} = 41'2' \quad 000 \quad 21'0 \qquad \mathrm{C} = 21'1 \quad 000 \quad 2'11 \qquad \mathrm{D} = 201' \quad 010 \quad 2'11$$

$$\mathrm{E} = 31'0 \quad 41'1' \quad 101' \qquad \mathrm{F} = 1'11 \quad 101 \quad 21'0 \qquad \mathrm{G} = 21'0 \quad 201' \quad 41'1'$$

$$\mathrm{H} = 2'11 \quad 31'0 \quad 101 \qquad \mathrm{I} = 101' \quad 1'11 \quad 010$$

Llegados a este punto, observamos que las siguientes condiciones que nosotros hemos impuesto:

- que todos los movimientos que planteamos sean materialmente posibles
- que todos los cubos se muevan a la vez y lo hagan con la misma velocidad

son muy restrictivas.

En la película aparecen dos cubos con las siguientes codificaciones

Cubo primero: 149 419 568

Cubo segundo: 666 897 466

Esto nos indica que las posiciones de estos cubos son $(1+4+9, 4+1+9, 5+6+8) = (14,14,19)$ y $(6+6+6, 8+9+7, 4+6+6) = (18, 24, 16)$, respectivamente. Además el primero realiza los movimientos determinados por los vectores $(-3,3,-1)$, $(-5,-8,-2)$ y $(8,5,3)$. Mientras que los movimientos que realiza el segundo vienen dados por los vectores $(0,-1,-2)$, $(0,2,0)$ y $(0,-1,2)$.

Es claro, que estos cubos no se mueven a la misma velocidad pues, por ejemplo, en el primer movimiento que realiza el primer cubo éste recorre una distancia de 7 unidades, mientras que en el primer movimiento que realiza el segundo cubo éste recorre una distancia de 3 unidades (Obsérvese que estamos empleando la distancia que definimos al comienzo del trabajo).

Del ejemplo anterior también se deduce que los cubos o bien, no llevan velocidad constante, o bien, tardan tiempos distintos en realizar cada uno de sus movimientos. Como acabamos de ver en el primer movimiento que realiza el primer cubo éste recorre una distancia de 7 unidades, mientras que en el segundo movimiento que éste realiza recorre una distancia de 15 unidades.

Conclusiones

Leyendo con detenimiento este trabajo podemos extraer varias conclusiones. El caso bidimensional nos proporcionó la información necesaria para comprender la necesidad de un gran número de huecos que permitan el movimiento, por tanto deducimos que en la película no salen todos los huecos que harían falta.

También vimos que para permitir el movimiento tal y como nuestros tutores nos plantearon era necesario que los cubos distarán entre sí una cantidad par, remarcando que usamos una distancia diferente a la usual.

El análisis que hemos hecho sobre la codificacion para el caso tridimensional nos lleva a pensar que quizás no todos los cubos puedan representarse con la codificacion mostrada en la película.

Aún así todavía tenemos cuestiones sin resolver como son la distancia mínima en el caso tridimensional, el número de huecos necesarios para permitir el mayor número posible de cubos moviéndose, así como el tamaño mínimo del cubo.

Bibliografía

El enigma de Fermat
de Simon Singh
Editorial: Planeta, S.A.

Las Matemáticas en el Cine
de Alfonso Jesús Población Sáez
Editorial: Proyecto Sur de Ediciones

Proyecto Cube: Una Introducción a la Geometría Tridimensional
de Elena Thibaut Tadeo
Revista Suma nº 47

Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas
de Miguel de Guzmán Ozámiz
Editorial: Anaya

Calculus
de Michael Spivak
Editorial: Reverte

Introducción al Álgebra
de Xambó Descamps
Editorial: Complutense