Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Primera Edición, 2006/2007

TRABAJO: Juegos matemáticos

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE BACHILLERATO

AUTORES:

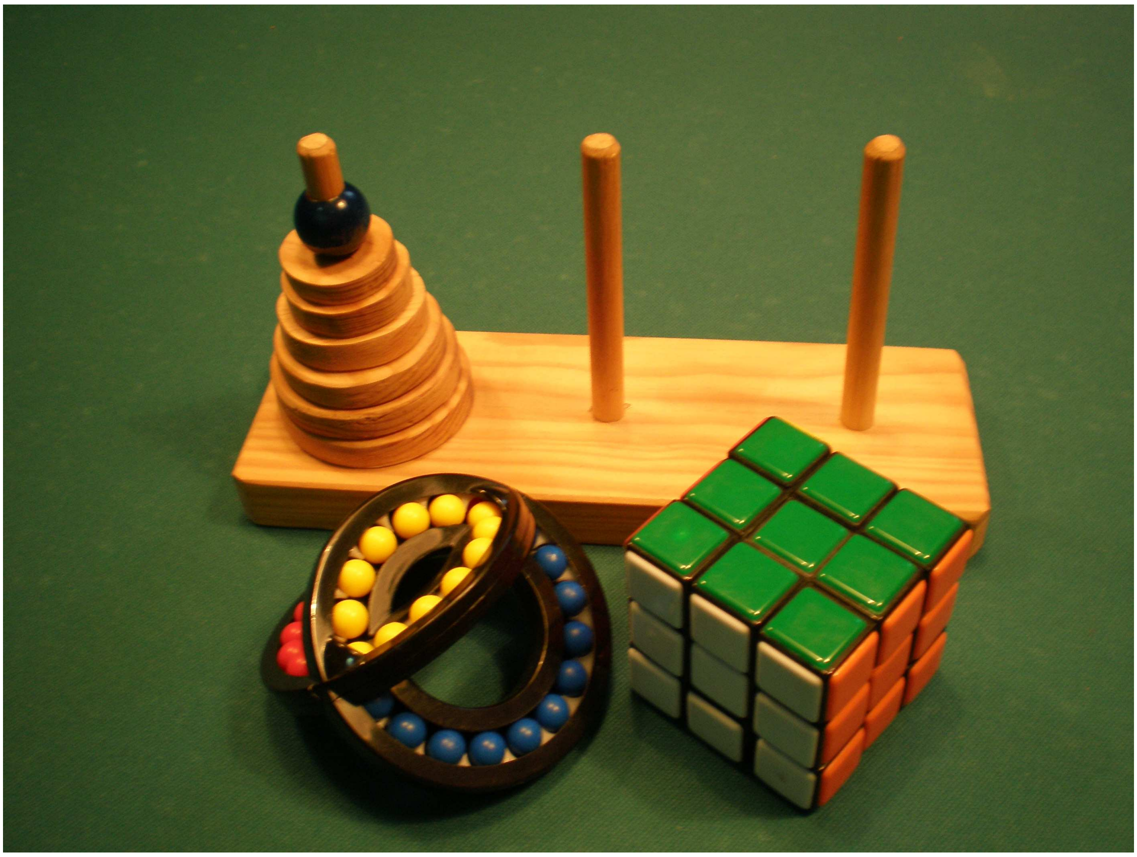
- David Alfaya Sánchez
- Gabriel Fürstenheim Milerud
- Diego Izquierdo Arseguet
- Florencio Michelena Machado

TUTORES:

- María Gaspar Alonso Vega

CENTRO: ESTALMAT (Madrid)

JUEGOS MATEMÁTICOS



Los Espingorcios

2007

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

En este trabajo vamos a analizar tres juegos: los discos de Rubik, el cubo de Rubik y las Torres de Hanoi desde un punto de vista matemático. Remarcando así una parte lúdica de las matemáticas, la teoría de juegos.

ANTECEDENTES

Aunque existe numerosa bibliografía con respecto a todos los juegos tratados (con excepción de los discos de Rubik), decidimos no basarnos en ella y realizar un trabajo independiente, contrastándolo una vez ya realizado.

LOS DISCOS DE RUBIK

El juego está formado por dos discos, con dos puntos de unión, con bolitas de colores como se indica en la foto:

El objetivo del juego es conseguir que las bolas amarillas se encuentren en el centro, las rojas de un lado y las azules de otro.

Vocabulario
Llamamos al disco de la izquierda A y al de la derecha B.
Cuando giramos un disco K 1 bolita en el sentido de las agujas del reloj, escribimos K^+, y si es en sentido contrario al de las agujas del reloj, escribimos K^-.
Sean α y β las intersecciones superior e inferior respectivamente.
Numeramos las posiciones en A y B a partir de α (numerado 0) en sentido de las agujas del reloj para A y B, siendo β la posición 6 de los dos aros.

Resolución
Primero procedemos a poner todas las bolas amarillas en el centro dejando antes siete bolitas amarillas seguidas en un lado y cinco en el otro (es trivial que se puede hacer).

Para el resto de la resolución vamos a utilizar los siguientes movimientos, en los que la zona central permanece amarilla, girando todas las bolas menos la especificada:

1.- $B^+A^-B^-A^+B^-A^-$ (Permanece invariante B-7, el resto de rojas y azules giran en el sentido antihorario)
2.- $A^+B^+A^-B^+A^+B^-$ (Permanece invariante B-7, las demás giran en sentido horario)
3.- $A^-B^+A^+B^-A^+B^+$ Permanece invariante, A 7, giran en sentido horario)
4.- $B^-A^-B^+A^-B^-A^+$ (Permanece invariante A 7, giran en sentido antihorario)

Demostración del movimiento 1:

Cuando realizas el movimiento B^+ la bolita de la posición B-7 pasa a la posición β. En el movimiento A^- la bolita que está en la posición β pasa a la posición A 5 y la bolita que está en A 7 pasa a la posición β. Al realizar el movimiento B^- esta última bolita pasa a la posición B-7. En el movimiento A^+ la que está en A 5 pasa a β. Con el movimiento B^- de β pasa a B-7 y la bolita que está en B 1 pasa a α. Por último, el movimiento A^- mueve la bolita de α a A-1 y la bolita amarilla que estaba descolocada en A 7 se coloca en β. De esta forma: la bolita que estaba en B 1 pasa a A-1, la que estaba en posición A 7 pasa a B-8 y la bolita en B-7 permanece constante. C.Q.D.

Es decir:

- la bolita que está en la posición $B-7 \rightarrow \beta \rightarrow A\,5 \rightarrow A\,5 \rightarrow \beta \rightarrow B-7 \rightarrow B-7$

- la bolita en $A\,7 \to A\,7 \to \beta \to B-7 \to B-7 \to B-8 \to B-8$
- la $B\,1 \to B\,2 \to B\,2 \to B\,1 \to B\,1 \to \alpha \to A-1$
- y: $Bn \to Bn+1 \to Bn+1 \to Bn \to Bn \to Bn-1, \forall n \in [\![2,10]\!]$.
- $An \to An \to An-1 \to An-1 \to An \to An \to An-1, \forall n \in [\![-1,-10]\!]$.

Quedan así demostradas las propiedades enunciadas sobre este movimiento. Los otros movimientos se prueban de forma análoga.

Ahora sólo nos queda demostrar que, una vez colocadas las bolitas amarillas, es posible resolver los discos de Rubik mediante los movimientos 1, 2, 3 y 4 únicamente.

Partimos de una disposición cualquiera de las bolitas rojas y azules, estando las amarillas ya situadas en el centro.
Suponemos, sin pérdida de generalidad, que en la posición B-8 hay una bolita roja, y que hay k bolitas rojas en las posiciones A7, A8,... A 6+k (k puede ser nulo). Mediante el movimiento 1 repetido k veces, conseguimos que se forme una cadena de k+1 bolitas rojas en las posiciones B-8, B-9, ..., B -7–(k+1).

Ahora distinguimos dos casos:

-la bolita en B-7 es roja. En este caso, realizamos el movimiento 4 de forma que tengamos una cadena de k+2 bolitas rojas entre B-8 y B –7-(k+2). A partir de aquí, repetimos esta operación si la bolita en B-7 es roja, y sino nos referimos al caso siguiente.

-la bolita en B-7 es azul. En este caso, realizamos el movimiento 1 repetidas veces hasta que se sitúe una bola roja en la posición A7. Ahora, hacemos el movimiento 3 repetidas veces hasta que una bolita roja ocupe la posición B-7, y volvemos a empezar.

Repetimos el proceso en su totalidad hasta que todas las bolitas rojas estén en el disco B. La cadena de bolitas rojas que hemos construido no se rompe en ningún momento ya que nunca dejamos una invariante en las posiciones A-1 y B1.

CUBO DE RUBIK

El cubo de Rubik es uno de los juegos más conocidos en el mundo, y es de difícil resolución. En este apartado, vamos a presentar una forma de solucionarlo.

Lo principal es partir de lo más sencillo, y ser organizado. Por ello, vamos primero a aclarar ciertas cuestiones básicas y un poco de vocabulario.

<u>Vocabulario</u>

Llamamos:

-A, B, C, D, E y F a las seis caras del cubo.

-cubito a los pequeños cubos (hay 8 cubitos). Hay 3 tipos de cubitos:

- Tipo K_1: tienen sólo una cara de color. Los representamos con la letra en minúscula de la cara a la que corresponden.
- Tipo K_2: tienen dos caras de color. . Los representamos con las 2 letras en minúscula de las dos caras a las que corresponden.
- Tipo K_3: tienen tres caras de color. . Los representamos con las 3 letras en minúscula de las caras a las que corresponden.

-plano a un conjunto de al menos 8 cubitos cuyos centros están en un mismo plano del espacio. El plano que está entre las caras N y M es el plano NM.

-el hecho de rotar de $\pm 90º$ una cara N lo escribimos $N^{\pm}$ (escogemos que +90º es el sentido de las manecillas del reloj). Por ejemplo, A^{-} es la rotación de 90º de la cara A en el sentido contrario de las agujas del reloj .

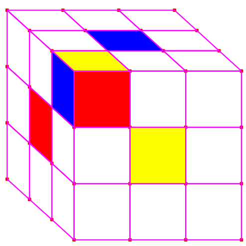
-Diremos que un cubito está colocado si, y sólo si, ocupa su posición correcta.

-Diremos que un cubito está orientado si, y sólo si, además de estar colocado, los colores de sus caras corresponden al color de las caras del cubo grande a las que pertenecen.

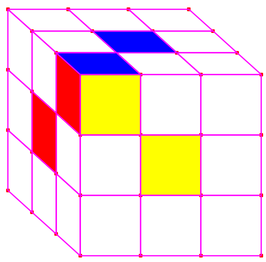
<u>Cuestiones básicas</u>

-El color de cada cara es el del cubito que tiene en su centro (es decir, el del cubito del tipo K_1 que está en la cara).

-Un cubito está colocado si, y solo si, sus caras tienen los mismos colores que aquéllas del cubo grande a las que pertenecen. Por ejemplo, el cubito siguiente está colocado:



-Un cubito está orientado si, y sólo si, cada una de sus caras está en la cara del cubo grande que le corresponde. Por ejemplo:



-Si hacemos unos movimientos que no afectan a las caras en las que está un cubito, el cubito queda invariante.
-Si un cubito es afectado por los movimientos M^+M^- seguidos ó viceversa, entonces queda invariante.
-Si la cara de un cubito colocado está en la cara correcta del cubo, entonces el cubito está orientado.

<u>Resolución</u>

Para resolver el cubo, vamos a proceder de manera organizada, colocando y posicionando primero los cubitos de la cara A, después los que están en el plano entre A y B, y finalmente los de la cara B.

Para demostrar que nuestros pasos funcionan, escogemos un sistema de coordenadas centrado en el centro del cubo grande y con ejes perpendiculares a los pares de caras del cubo grande.

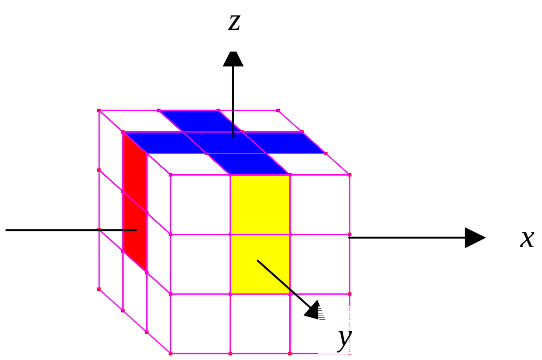
Todas las rotaciones $N^{\pm}$ son rotaciones respecto de uno de los ejes de coordenadas.

→ Primer paso: colocar y orientar los cubitos de tipo K_2 de la cara A.

Para cada cubito, lo primero que hay que hacer es localizarlo (gracias a los colores de sus caras).

-Si no está en A y su cara de color A está en B, se le coloca de forma que su cara que no es del color de A esté en la cara del cubo que le corresponde (ya sea girando A y B si está en AB, ya sea girando B si está en B), y se gira esta cara de forma que esté colocado y orientado el cubito.
-Si no está en A y su cara de color A no está en B, hacemos B^+, giramos la cara de la derecha de +90º, la de delante de -90º y la de la derecha de -90º.
-Si está en A, se gira la otra cara del cubo grande en la que está, de forma que el cubito se halle en AB, y se hacen los movimientos de antes.

Es obvio que de esta forma, al posicionar un cubito, no movemos otro cubito que ya esté posicionado.
Así, obtenemos:



→ 2º paso: colocar y orientar los cubitos de tipo K_3 de la cara A.

Hay que hacerlo sin mover los cubitos ya posicionados. Orientamos el cubo de forma que A esté arriba. Girando B y el cubo, ponemos el cubito de colores a, m y n de forma que esté en B, M y N, siendo M el plano de ecuación $y = 1$, y esté en (1; 1; -1). Habrá entonces de alcanzar la posición $(1;1;1)$.

-Si su cara del color a está en B, hacemos la secuencia $B^+N^-B^+B^+N^-$. Sus coordenadas cambian según el proceso:

$(1;1;-1)\to(-1;1;-1)\to(-1;1;-1)\to(1;1;-1)\to(1;-1;-1)\to(1;1;-1)$. Además, la cara del color a pasa por las caras siguientes: $B\to B\to B\to B\to B\to M$. Ahora hacemos los movimientos que describimos a continuación

Los cubitos que ya habíamos colocado en el paso 1 no han sido movidos, aparte del que está en la cara M, al que le han afectado las operaciones M^+M^-, que lo dejan invariante. De los cubitos que puede que ya hallamos colocado en el paso 2, sólo desplazamos el $(-1;1;1)$, que vuelve a su posición y orientación originales, ya que sólo le afectan las operaciones M^+M^-.

-Si su cara del color a está en M, hacemos la secuencia $B^-N^-B^+N^+$.
-Si su cara del color a está en N, hacemos la secuencia $N^-B^+B^+N^+B^+$.
En estos dos casos, la prueba de que las secuencias son correctas es análoga a la anterior.
-Si el cubito estuviese en A, T y P inicialmente siendo T el plano de ecuación $y = 1$ y P el de ecuación $x = 1$ y el cubito situado en $(1;1;1)$, hacemos la secuencia $T^+B^+T^-$, que transforma el cubito en: $(1;1;1)\to(1;1;-1)\to(1;-1;-1)\to(1;-1;-1)$, y de los cubitos ya colocados, sólo desplaza el cubito que está en $(0;1;1)$, que sólo es afectado por las operaciones T^+T^- que lo dejan invariante.

Así, sin desplazar ningún cubito ya colocado, situamos el cubito que hay que posicionar en la cara B. A partir de aquí, no hay más que ver con cuál de los pasos anteriores acabamos de colocar el cubito en su posición correcta.

→ 3er paso: colocar y orientar los cubitos de tipo K_2 del plano AB.

Queremos colocar el cubito de colores m y n.

Giramos el cubo de forma que M sea el plano de ecuación $y = 1$ y N el de ecuación $x = 1$. Rotamos B de forma que el cubito se sitúe en (0; 1; -1) ó en (1; 0; -1) y que una de sus caras tenga el color de la cara del cubo grande a la que pertenece (obviamente siempre es posible).

-Si el cubito lo ponemos en (0; 1; -1), hacemos las operaciones $B^-N^-B^+N^+B^+M^+B^-M^-$. El cubito toma las posiciones siguientes.

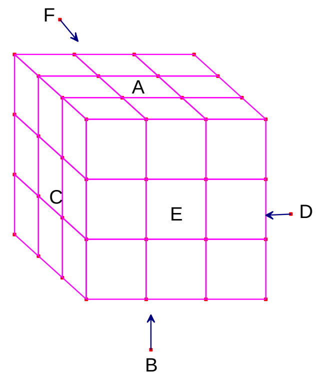
$$(0;1;-1)\to(-1;0;-1)\to(-1;0;-1)\to(0;1;-1)\to(0;1;-1)\to(1;0;-1)\to(1;0;-1)$$
$$\to(0;1;-1)\to(1;1;0)$$

(1; 1; 0) es la posición correcta del cubito. Como el cubito está sólo afectado por los movimientos $B^-B^+B^+B^-M^-$, equivalentes a M^-, la cara del cubito de color m se queda en la cara m.

Como sólo movemos las caras B, M y N, de los cubitos de la cara A sólo desplazamos los que están en dichas caras, y sólo son afectados por las secuencias N^-N^+ ó M^-M^+, que les hacen volver a su posición y orientación originales. De los cubitos de AB y que puede que estén ya colocados en su posición correcta, sólo desplazamos los que están en M ó en N, que son afectados por las secuencias N^-N^+ ó M^+M^-, lo que les hace volver a sus posiciones y orientaciones originales.
-Si el cubito lo ponemos en (1; 0; -1), hacemos las operaciones $B^+M^+B^-M^-B^-N^-B^+N^+$. Se prueba de forma análoga que funciona.

-Si el cubito está al principio en AB, en las caras P y Q, P de ecuación y = 1, Q de ecuación x = 1, hacemos la combinación $Q^{-}B^{+}Q^{+}B^{+}P^{+}B^{-}P^{-}$, de forma que el cubito se halla en B. A partir de aquí, se sigue uno de los pasos anteriores, el adecuado. Se prueba de forma análoga que esta combinación funciona.

A partir de aquí, no daremos demostraciones de la validez de los movimientos, puesto que las demostraciones son análogas a las que hemos dado anteriormente: en cada caso, se prueba primero que el cubito a colocar y orientar queda colocado y orientado y después que los cubitos que ya hemos posicionado y orientado anteriormente no han cambiado de orientación o posición.
Además utilizaremos la nomenclatura siguiente para las caras del cubo grande:

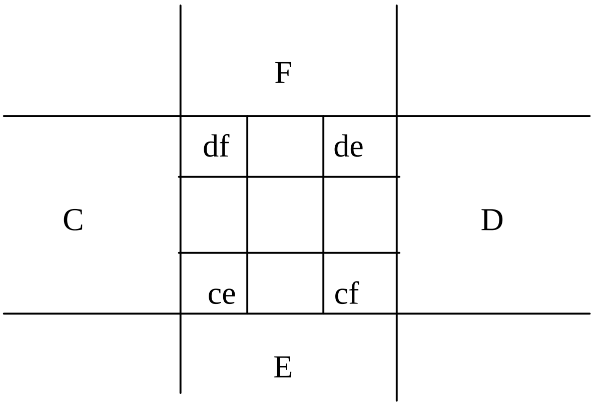


estando definidas ahora las caras de forma que:

La cara llamada…	**Es <u>siempre</u> la que está en el plano de ecuación… <u>aunque se gire el cubo</u>**
A	$z=1$
B	$z=-1$
C	$x=-1$
D	$x=1$
E	$y=1$
F	$y=-1$

→ 4º paso: colocar los cubitos de tipo K_3 de la cara B.

Probemos primero ó dos ó cuatro de los cubitos de este tipo se pueden colocar simplemente rotando B. Es obvio que no pueden haber tres cubitos ya colocados. Supongamos ahora que haya menos de 2 cubitos colocados. Giramos la cara B de forma que el cubito de colores c y e esté colocado correctamente. El cubito que tiene los colores c y e no puede estar al opuesto de los cubitos de colores d y f. Supongamos sin pérdida de generalidad que el cubito de colores d y f se halla en la posición del cubito de colores c y f. Entonces, el cubito de colores d y e, que no podrá estar en su posición correcta, tendrá que estar en la posición del cubito de colores de d y f. Y entonces el cubito de colores c y f estará en la posición del cubito de colores d y e.
Luego tenemos que:



Pero entonces no hay más que girar la cara B de 90º en el sentido de las agujas del reloj para que df y de estén colocados.
Luego por reducción al absurdo, hemos probado que ó dos ó cuatro de los cubitos de este tipo se pueden colocar simplemente rotando B.

-Si los cuatro cubitos ya están colocados, no hay nada que hacer.
-Si hay sólo dos cubitos colocados, hay que invertir los otros dos y se presentan así dos casos:

→ Los cubitos colocados son contiguos (es decir que se sitúan en dos vértices consecutivos de la cara B). En este caso, tras rotar el cubo de forma que los cubitos no colocados estén en $(-1;1;-1)$ y en $(1;1;-1)$, hacemos las operaciones $D^-B^-D^+E^+B^+E^-D^-B^+D^+B^+B^+$.

→ Los cubitos colocados no son contiguos. En este caso, tras rotar el cubo de forma que los cubitos no colocados estén en $(-1;1;-1)$ y en $(1;1;-1)$, hacemos las operaciones $D^-B^-D^+E^+B^+B^+E^-D^-B^+D^+B^-$.

5º paso: Orientar los cubitos de tipo K_3 de las caras B.

Primero precisemos que no es posible que haya exactamente tres cubitos ya orientados.

-Si los cuatro cubitos están orientados, no hay nada que hacer.
-Si dos de los cubitos están orientados y son contiguos, rotamos el cubo de forma que estén en $(1;1;1)$ y $(-1;1;1)$ y hacemos las operaciones $D^-B^+D^+E^+B^+E^-A^-E^+B^-E^-D^-B^-D^+A^+$, una ó dos veces (según el caso, se llegará al resultado querido haciendo las operaciones sólo una ó dos veces).
-Si dos de los cubitos están orientados y no son contiguos, rotamos el cubo de forma que estén en $(1;1;1)$ y $(-1;1;1)$ y hacemos las operaciones $D^-B^+D^+E^+B^+E^-A^+A^+E^+B^-E^-D^-B^-D^+A^+A^+$ una ó dos veces.
-Si sólo un cubito está orientado, rotamos el cubo de forma que éste esté en $(-1;1;-1)$ y hacemos las operaciones $D^-B^-D^+B^-D^-B^+B^+D^+B^+B^+$ que orientan al menos un cubito. Así habrá ó dos ó cuatro cubitos ya orientados, y orientamos los que faltan gracias a los puntos anteriores.
-Si no hay ningún cubito orientado, hay que hacer las mismas operaciones (con la cara ya montada hacia arriba) de forma que al menos un cubito se posiciona y no hay más que volver a uno de los casos precedentes.

6º paso: Colocar y orientar los cubitos de tipo K_2 de la cara B.

Una vez este paso hecho, habremos resuelto el cubo de Rubik. Pero es el paso más complicado.

Primero precisemos que no es posible que hayan exactamente tres cubitos de este tipo ya colocados y orientados.

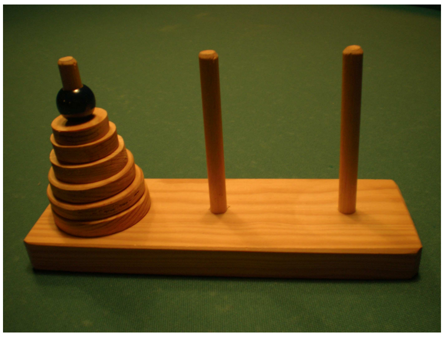
-Si los cuatro cubitos están ya colocados y orientados, el cubo de Rubik ya estará resuelto.
-Si dos de los cuatro cubitos están ya colocados y orientados y estos dos cubitos son contiguos (es decir que no son simétricos respecto del centro de B), giramos el cubo de forma que estén en $(0;1;-1)$ y $(-1;0;-1)$ y hacemos los movimientos: $C^-B^-A^+F^+F^+B^+B^+A^+A^+E^-B^-E^+A^+A^+B^+B^+F^+F^+B^+A^-C^+B^+$.
-Si hay dos de los cuatro cubitos que están colocados y orientados y estos dos cubitos no son contiguos, giramos el cubo de forma que estén en $(0;1;-1)$ y $(0;-1;-1)$ y hacemos los movimientos: $B^+B^+D^+C^-E^+D^+C^-A^+D^+C^-F^+F^+D^-C^+A^+D^-C^+E^+D^-C^+$.
-Si sólo uno de los cubitos está ya colocado y orientado, giramos respecto del eje de las cotas el cubo de forma que esté en $(0;1;-1)$ y hacemos $C^-D^+E^+C^+D^-B^+B^+C^-D^+E^+C^+D^-$. Repitiendo esta secuencia una ó dos veces más, se orientarán y posicionarán al menos un cubito. A partir de ese momento, para acabar la resolución del cubo, nos referimos a uno de los casos anteriores.
-Si ningún cubito está ya colocado y orientado, hacemos los mismos movimientos que antes, los cuales repetidos una ó dos veces colocarán y orientarán al menos un cubito. No hay más que referirse a casos anteriores a partir de aquí.

DE ESTA FORMA, HABREMOS RESUELTO EL CUBO DE RUBIK.

TORRES DE HANOI

Descripción del juego:

El juego, inventado en 1883 por el matemático francés Edouard Lucas, consta de tres palos, en los que se insertan una serie de discos de distinto radio. Al comienzo de la partida, todos los discos aparecen en el primer palo en orden decreciente de radios. El objetivo del juego es pasar todos los discos al último palo, con las siguientes restricciones de movimientos:



- Un movimiento consiste en tomar el disco superior de uno de los palos y colocarlo encima de los de otro.
- Solo se puede realizar un movimiento cada vez
- Un disco solo puede ser colocado sobre otro si su radio es menor

Ejemplo de partida:
Tomemos los discos a, b y c y los palos 1, 2 y 3, tales que:

$$radio_a < radio_b < radio_c$$

La partida sería a3, b2, a2, c3, a1, b3, a3 y se realizaría en 7 movimientos.

La leyenda dice que, en un templo de Benarés, existía una cúpula que señalaba el centro del mundo, en la que se encontraba una bandeja sobre la que había tres agujas de diamante. En una mañana lluviosa, un rey mandó poner 64 discos de oro, siendo ordenados por tamaño: el mayor en la base de la bandeja y el menor encima de todos los discos.

Los sacerdotes del templo debían mover los discos entre las agujas, según las leyes que se les habían entregado: "El sacerdote de turno no debía mover más de un disco a la vez, y no podía situar un disco de mayor diámetro encima de otro de menor diámetro".

Se decía que cuando los sacerdotes finalizaran su labor, el mundo se acabaría. Hoy no existe tal templo, pero el juego aún perdura en el tiempo...

Objetivos:

Este trabajo consta de dos partes:

En la primera, se analizará el juego en su conjunto para cualquier número de discos, determinando estrategias para ganar y el mínimo número de pasos necesarios para conseguirlo, aparte de un análisis de la formación de ciclos en su estructura.

La segunda parte es una generalización del juego, en la que se plantea la posibilidad de que, además de múltiples discos, existan más de tres palos. En esta parte se intentará describir una función que indique el número mínimo de movimientos necesarios para completar este reto matemático dado un número cualquiera de discos y palos, lo que se trata de un problema abierto.

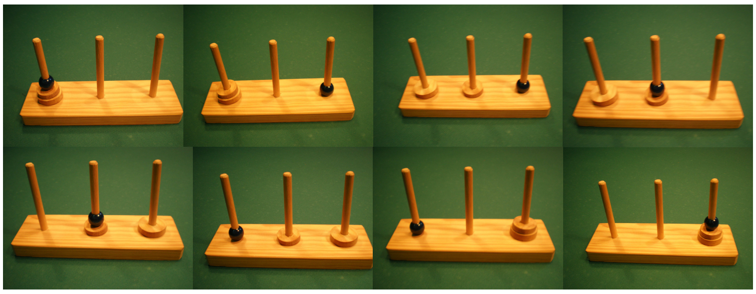
TORRES CON TRES PALOS Y VARIOS DISCOS

En primer lugar, intentaremos hallar el número mínimo de movimientos necesarios para ganar para un número cualquiera *a* de discos.

Definición:

Llamamos $M(a) = n$ a la función de variable el número de discos que da como valor el número de movimientos antes indicado.

Experimentalmente sabemos que:



$M(1) = 1$
$M(2) = 3$
$M(3) = 7$
$M(4) = 15$

Hipótesis:

Para todo $a>0$:

$$M(a) = 2^a - 1$$

Demostración por inducción:

$M(1) = 1$ y $M(2) = 3$ son valores ciertos y cumplen la hipótesis.

Llamemos a los discos $x_1, x_2,\ldots, x_a$, tales que el radio de x_1 sea menor que el de x_2, etc., siendo el radio de x_a el más grande. Por las reglas del juego, x_a no podrá colocarse encima de ninguno de los otros discos, y deberá ser el que esté más abajo en el tercer palo al terminar.

Por tanto, en algún momento la tercera columna deberá estar totalmente vacía, y dado que solo se puede mover un disco cada vez, el palo 1 o 2 deberá tener solo al disco x_a.

Esto supone que para mover los *a* discos a la tercera columna, primero hay que mover los *a-1* primeros al segundo palo, después pasar x_a al tercero y finalmente volver a pasar los del segundo palo al 3. De esta manera tememos que:

$$M(a) = M(a-1) + 1 + M(a-1) = 2\,M(a-1) + 1$$

De aquí obtenemos que si $M(a-1)$ cumple la hipótesis, $M(a)$ también, ya que:

$$M(a-1) = 2^{a-1} - 1 \;\; => \;\; M(a) = 2\,(2^{a-1} - 1) + 1 = 2^a - 1$$

Con lo que la hipótesis queda demostrada por inducción.

Demostración sin inducción:
Llamemos:

$$P(x) = 2x + 1$$

Por lo que hemos deducido anteriormente:

$$P[M(a-1)] = M(a)$$

Entonces, podemos escribir $M(a)$ como:

$$M(a) = P[M(a-1)] = P[P[M(a-2)]] = P^2[M(a-2)] = P^3[M(a-3)]$$

Y en general:

$$M(a) = P^k[M(a-k)]$$

Tomando $k = a-1$:

$$M(a) = P^{a-1}[M(1)] = P^{a-1}(1)$$

Pero:

$$P^{a-1}(1) = \overbrace{2 \cdot (2 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot (2 + 1) + 1) + 1 \ldots) + 1}^{a-1 \text{ veces}} = 2^{a-1} + 2^{a-2} + \ldots + 2 + 1$$

Entonces:

$$M(a) = 2^{a-1} + 2^{a-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^a - 1$$

como queríamos demostrar.

Ahora que ya sabemos el número mínimo de movimientos, vamos a intentar obtener una estrategia que nos de los movimientos necesarios para ganar en el mínimo número de pasos.

Definición:
Sea N una función que asocia a todo trío (a,b_0,b_f) el conjunto de los movimientos necesarios para pasar una columna de a discos del palo b_0 al palo b_f en el mínimo número de pasos respetando las normas del juego.

Por ejemplo:

$$N(3,1,3) = \{x_1 3, x_2 2, x_1 2, x_3 3, x_1 1, x_2 3, x_1 3\}$$

Son los movimientos necesarios para pasar tres discos del primer palo al tercero. Además, es la solución del juego para tres discos (pasar todos del palo 1 al 3).

Podemos expresar, entonces, el juego con a discos como hallar $N(a,1,3)$.

Por la definición de N y M, podemos decir que, para cualesquiera b_0 y b_f:

$$|N(a,b_0,b_f)| = M(a)$$

Ya que el número de elementos de N es el número de movimientos mínimos, que es M, y b_0 y b_f no afectan a éste.

Ahora, el objetivo es intentar descomponer $N(a,b_0,b_f)$ en conjuntos conocidos más pequeños para facilitar su estudio.

Definición:

Definimos la unión de dos conjuntos $N(a,b_0,b_f)$ y $N(a',b_0',b_f')$ como un nuevo conjunto que incluye todos los elementos del primero y, a continuación, todos los elementos del segundo, y designamos la operación por $\cup$ (que no es ni conmutativa ni asociativa).

Ejemplo:

$$N(3,1,3) = \{x_1 3,\ x_2 2,\ x_1 2,\ x_3 3,\ x_1 1,\ x_2 3,\ x_1 3\}$$
$$N(2,3,1) = \{x_1 2,\ x_2 1,\ x_1 1\}$$
$$N(3,1,3) \cup N(2,3,1) = \{x_1 3,\ x_2 2,\ x_1 2,\ x_3 3,\ x_1 1,\ x_2 3,\ x_1 3,\ x_1 2,\ x_2 1,\ x_1 1\}$$

Con esta operación podemos establecer la relación siguiente:

$$N(a,b_0,b_f) \cup N(a,b_f,b_0) \approx \{\ \phi\ \}$$

Esta relación resulta de hacer y deshacer una serie de movimientos, lo que equivale a no haber hecho ninguno.

Por otro lado, siguiendo el razonamiento que usamos para calcular *M(a)*, podemos decir que, para todo *a*:

$$N(a,1,3) = N(a-1,1,2) \cup N(1,1,3) \cup N(a-1,2,1)$$
$$N(a-1,1,2) = N(a-2,1,3) \cup N(1,1,2) \cup N(a-2,3,1)$$
$$N(a-2,1,3) = N(a-3,1,2) \cup N(1,1,3) \cup N(a-3,2,1)$$
$$\ldots$$

De estas expresiones, podemos deducir que para formar una columna de *a* discos en el palo 3, primero hay que formar una de *a-1* en el 2, una de *a-2* en el 3, etc.

Finalmente podemos deducir que se deben realizar columnas de *1, 2, 3,…* discos alternativamente en los palos 2 y 3 hasta completar la de *a* discos.
Esto nos deja dos casos de juego, en función de la paridad de *a*:

Si *a* es impar, los movimientos son:

$$N(a,1,3) = N(1,1,3) \cup N(1,1,2) \cup N(1,3,2) \cup N(1,1,3) \cup N(2,2,3) \ldots$$

$N(1,1,3)$

$N(2,1,2)$

$N(3,1,3)$

$N(4,1,2)$

…

formándose las columnas de *1, 2, 3,…, a* discos antes mencionadas.

Si *a* es par, los movimientos son:

$$N(a,1,3) = N(1,1,2) \cup N(1,1,3) \cup N(1,3,3) \cup N(1,1,2) \cup N(2,2,2) \ldots$$

$N(1,1,2)$

$N(2,1,3)$

$N(3,1,2)$

$N(4,1,3)$

…

formándose de nuevo las columnas de *1, 2, 3,…, a* discos.

Para concluir, cabe destacar que conociendo ciertas combinaciones de movimientos básicas, como $N(1,b_0,b_f)$, $N(2,b_0,b_f)$ y $N(3,b_0,b_f)$ y la estructura general de la resolución de las torres antes descrita (formación de columnas de *1, 2 ,3,…, a* discos) la solución del juego resulta rápida y mecánica.

A continuación se da la solución de algunas partidas:

$N(1,1,3) = \{x_1 3\}$

$N(2,1,3) = \{x_1 2, x_2 3, x_1 3\}$

$N(3,1,3) = \{x_1 3, x_2 2, x_1 2, x_3 3, x_1 1, x_2 3, x_1 3\}$

$N(4,1,3) = \{x_1 2, x_2 3, x_1 3, x_3 2, x_1 1, x_2 2, x_1 2, x_4 3, x_1 3, x_2 1, x_1 1, x_3 3, x_1 2, x_2 3, x_1 3\}$

$N(5,1,3) = \{x_1 3, x_2 2, x_1 2, x_3 3, x_1 1, x_2 3, x_1 3, x_4 2, x_1 2, x_2 1, x_1 1, x_3 2, x_1 3, x_2 2, x_1 2, x_5 3, x_1 2, x_2 3, x_1 3, x_3 1, x_1 2, x_2 1, x_1 1, x_4 3, x_1 3, x_2 2, x_1 2, x_3 3, x_1 1, x_2 3, x_1 3\}$

$N(6,1,3) =\{x_1 2, x_2 3, x_1 3, x_3 2, x_1 1, x_2 2, x_1 2, x_4 3, x_1 3, x_2 1, x_1 1, x_3 3, x_1 2, x_2 3, x_1 3, x_5 2, x_1 1, x_2 2, x_1 2, x_3 1, x_1 3, x_2 1, x_1 1, x_4 2, x_1 2, x_2 3, x_1 3, x_3 2, x_1 1, x_2 2, x_1 2, x_6 3, x_1 3, x_2 1, x_1 1, x_3 3, x_1 2, x_2 3, x_1 3, x_4 1, x_1 1, x_2 2, x_1 2, x_3 1, x_1 3, x_2 1, x_1 1, x_5 3, x_1 2, x_2 3, x_1 3, x_3 2, x_1 1, x_2 2, x_1 2, x_4 3, x_1 3, x_2 1, x_1 1, x_3 3, x_1 2, x_2 3, x_1 3\}$

CICLOS EN LAS TORRES DE HANOI

Como hemos visto antes, la resolución de las Torres de Hanoi se basa en un procedimiento iterativo, con lo que no es de extrañar que se produzcan repeticiones en los movimientos. Analizando las mismas, podemos observar que se forman ciclos de movimientos.

Así, en disco x_n se cumple que, una vez se ha movido, no vuelve a hacerlo hasta pasados 2^n movimientos. Esto se explica porque cuando se mueve, es para formar una columna de n discos (aunque sea para formar o deshacer una mayor), con lo que se usan $2^n - 1$ movimientos y a continuación (movimiento 2^n) se vuelve a mover.

Por otro lado, dado que las torres de *1, 2, 3,…* discos se establecen en columnas alternativas, también existen ciclos en cuanto a hacia qué lado se mueven los discos. De esta manera, para torres con *n* discos, los discos de la forma x_{n-2k} se mueven siguiendo la pauta *1-3-2*, mientras que los de la forma x_{n-2k-1} se mueven según la pauta *1-2-3*.

También es relevante el hecho de que, en cada movimiento, siempre se ha de mover x_1 o el siguiente disco más pequeño. La explicación es que, a cada paso se da una de las siguientes posibilidades:

1. Se inicia la formación de una nueva columna, en cuyo caso hay que mover el mayor de los discos de ésta (aunque sea también segundo menor de los que se pueden mover según las reglas del juego)
2. Se finaliza su formación moviendo la cúspide o disco menor x_1.

GENERALIZACIÓN PARA VARIOS PALOS Y DISCOS

Definición:

Llamamos *f(a,b)* al número de movimientos necesarios para completar el juego con *a* discos y *b* palos.

Generalidades:

Lógicamente si $a \leq b-1$, $f(a,b)=2a-1$ ya que se puede colocar cada disco, con excepción del último, en un palo, pasar el último disco y reagrupar. Si $b \leq 2$ la función sólo está definida para $a=1$.

Supongamos que tenemos un a tal, que podemos distribuir a-1 en una serie de columnas (con c_i discos cada una) de forma que cada una se puede formar con $2c_i-1$ movimientos. Tras esto, moveríamos el disco x_a y repetimos el proceso. El número total de movimientos sería $2(2c_1-1+2c_2-1+...+2c_n-1)+1=4(c_1+c_2+...+c_n)-2n+1$.

Dado que $\sum_{i=1}^{n} c_i = a-1$ el mínimo se alcanzará cuando utilicemos el máximo número de columnas, en este caso b-2. Por tanto $f(a,b)=4a-2b+1$ para $b-1 \leq a \leq \frac{(b)(b-1)}{2}$

Es fácil comprobar que se puede con $\frac{(b)(b-1)}{2}$ pues c_1 puede valer b-1, c_2 b-2, ..., c_{b-2} 2, y a esto hay que sumarle el último disco.
Como corolario, si $a=b-1$, $4a-2b+1=2a-1$.

Hasta ahora, todas las distribuciones mínimas eran ordenadas, es decir, el proceso consiste en formar b-2 columnas, que una vez construidas permanecen sin tocar hasta ser recolocadas en el último palo.

Vamos a suponer que para cualesquiera a y b, una distribución ordenada (que se demostrará al final) es la más rápida. Entonces $f(a,b)$ sería $2(f(d_1,b)+f(d_2,b-1)+...+f(d_{b-2},3))+1$. Donde d_i sería el número de discos que hay en cada una de estas columnas ordenadas. El 2 se debe a que los movimientos se realizan para colocar las columnas y para quitarlas y el +1 corresponde al último disco.

Para distinguir, llamaremos a la función que "está fuera del paréntesis" $F(a,b)$. Digamos que una función es f_m cuando su pendiente 2^m. Hasta ahora, hemos visto que la función se comporta primero como una f_0 (cuando insertas el primer disco), después como una f_1 y después como una f_2. Al añadir un disco en la expresión del párrafo anterior, el aumento mínimo de movimientos se daría al colocar este disco en la función dentro del paréntesis que tuviera menor m. Cuando añadimos el segundo disco, podemos colocarlo en una f_0, entonces, $F(a,b)$ aumenta dos movimientos. Como ya se ha demostrado, se pueden ir colocando discos en f_0 hasta un máximo de b-2 discos. A partir de aquí, todas las funciones dentro del paréntesis son f_1, y por tanto $F(a,b)$

tiene pendiente 4. Esto ocurre hasta que se alcanza la cota de $\frac{(b)(b-1)}{2}$, como ya habíamos demostrado. En este momento, cada d_i vale b-i, es decir, que al añadir un disco más, tendrás que utilizar una f_2 y $F(a,b)$ tendrá pendiente 8. Así pues, la pendiente de $F(a,b)$ se va duplicando cada un cierto número de discos.

Definición:

Para describir la función, vamos a considerar estos puntos en los que, fijado b, la pendiente se duplica. Dado que las diferentes pendientes son 2^n, llamaremos por comodidad n-ésimo límite al número máximo de discos que puedes poner con un número fijo de palos para los que la función tiene de pendiente 2^n. Lo llamaremos $l(n,b)$.

Propiedad:

Dado que el n-ésimo límite se alcanza cuando se alcanzan los n-1-ésimos límites en las d_i y se ha movido el último disco, se debe cumplir que:

$$l(n,b) = l(n-1,b-1) + l(n-1,b-2) + ... + l(n-1,3) + 1$$

Hipótesis:

$$l(n,b) = \binom{n+b-2}{n}$$

Demostración:

Dado que se cumple:

$$l(n,b) = l(n-1,b-1) + l(n-1,b-2) + ... + l(n-1,3) + 1$$

Y que si $b=2$:

$$\binom{n+b-2}{n} = \binom{n}{n} = 1$$

Se reduce a demostrar:

$$\sum_{i=2}^{b} \binom{n+i-2}{n} = \binom{n+b-1}{n+1}$$

Aplicando la propiedad de los números combinatorios:

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

Podemos escribir:

$$\binom{n+b-1}{n+1} = \binom{n+b-2}{n} + \binom{n+b-2}{n+1} = \binom{n+b-2}{n} + \binom{n+b-3}{n} + \binom{n+b-3}{n+1} = \ldots =$$
$$= \sum_{i=3}^{b} \binom{n+i-2}{n} + \binom{n+1}{n+1}$$

Como:

$$\binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n}{n}$$

Tenemos que:

$$\sum_{i=2}^{b} \binom{n+i-2}{n} = \sum_{i=3}^{b} \binom{n+i-2}{n} + \binom{n}{n} = \sum_{i=3}^{b} \binom{n+i-2}{n} + \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+b-1}{n+1}$$

Como queríamos demostrar.

Dejando b fijo, se observa que los n-ésimos límites conforman una diagonal del triángulo de Pascal, de forma que la diagonal perteneciente a 3 palos es la de *1, 2, 3, 4…*, la perteneciente a 4 palos *1, 3, 6, 10…* El 1 se puede considerar que es el límite cero pues de cero discos a 1 disco se requiere un movimiento que es 2^0.

Por otra parte, la primera diagonal, formada por 1, supone los límites para dos palos, ya que sólo se puede mover un disco. Como curiosidad, los n-ésimos límites para *b* palos se tratan de los números triangulares de *b-2* dimensiones.

Comportamiento general de la función

Hipótesis:

La función sigue la estructura de una exponencial de base 2 con exponentes relacionados con el número de límite y multiplicada por otra función.

Demostración:

Con el objetivo de simplificar la función no vamos a analizarla en su conjunto, sino solo en sus límites. Una vez hecho esto, extrapolaremos el resto de sus valores.

Según lo que hemos deducido antes:

$$l(n,b) = \binom{n+b-2}{n}$$

Por la relación del triángulo de Pascal antes mencionada, sabemos que:

$$l(n,b) = l(n-1,b) + l(n,b-1)$$

Por otro lado, sabemos que de $f\left(l\left(n-1,b\right),b\right)$ hasta $f\left(l\left(n,b\right),b\right)$ la pendiente es 2^n, por lo que podemos establecer la forma recursiva:

$$f\left(l\left(n,b\right),b\right) = f\left(l\left(n-1,b\right),b\right) + 2^n \cdot l(n,b-1)$$

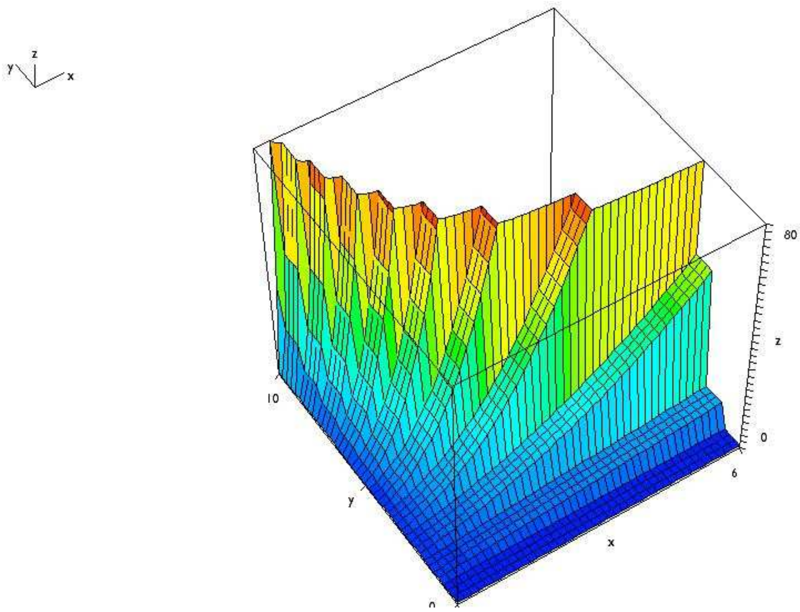
Desarrollando la suma completa, podemos expresar $f\left(l\left(n,b\right),b\right)$ como:

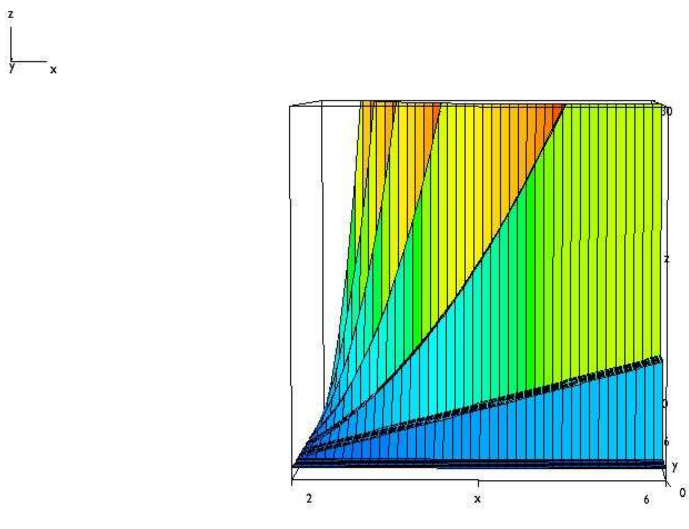
$$f\left(l(n,b),b\right) = \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot l(i,b-1)$$

Sustituyendo los límites por su valor tenemos que:

$$f\left(l(n,b),b\right) = \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot \binom{n+b-3}{b-3}$$

Siendo su representación gráfica:





Por otro lado tenemos que, al ser la pendiente 2^n y para $0 \le m \le l(n+1,b) - l(n,b)$:

$$f\left(l(n,b)+m,b\right) = f\left(l(n,b),b\right) + 2^n \cdot m$$

De donde obtenemos que:

$$f\left(l(n,b)+m,b\right) = \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot \binom{i+b-3}{b-3} + 2^{n+1} \cdot m$$

Por otra parte tenemos que:

$$f\left(l(n,b),b\right) = 2\Big(f\left(l\left(n-1,b\right),b\right) + f\left(l\left(n-1,b-1\right),b-1\right) + \ldots + f\left(l\left(n-1,3\right),3\right)\Big) + 1 =$$

$$= 2 \cdot f\left(l(n-1,b),b\right) + f\left(l(n,b-1),b-1\right)$$

Combinando esta ecuación con la otra recursión, tenemos que:

$$f\left(l(n,b),b\right) = 2^{n+1} \cdot l(n+1,b-1) - f\left(l(n+1,b-1),b-1\right)$$

Calculando los casos particulares para b=3, 4, 5 y 6.

$f\left(l\left(n,3\right),3\right) = 2^{n+1} - 1$ (Ya que $l\left(n,3\right) = n+1$)

$$f\left(l(n,4),4\right) = n \cdot 2^{n+1} + 1$$

$$f\left(l\left(n,5\right),5\right) = 2^{n+1} \cdot \frac{n^2+n+2}{2!} - 1$$

$$f\left(l\left(n,6\right),6\right) = 2^{n+1} \cdot \frac{n^3+3n^2+8n}{3!} + 1$$

$$f\left(l\left(n,7\right),7\right) = 2^{n+1} \cdot \frac{n^4+6n^3+23n^2+18n+24}{4!} - 1$$

Dado que 0! y 1! valen 1, intuimos que la función tiene la forma de:

$$f\left(l(n,b),b\right) = 2^{n+1} \cdot \frac{g(n,b)}{\left(b-3\right)!} + (-1)^b$$

Donde *g(n,b)* es un polinomio de grado $b-3$.

Por inducción, si:

$$f\left(l(n,b),b\right) = 2^{n+1} \frac{g(n,b)}{\left(b-3\right)!} + (-1)^b$$

Entonces:

$$f\left(l(n,b),b\right) = 2^{n+1} \cdot l(n+1,b-1) - f\left(l(n+1,b-1),b-1\right) =$$

$$= 2^{n+1} \cdot l(n+1,b-1) - 2^{n+2} \cdot \frac{g(n+1,b-1)}{\left(b-4\right)!} - \left(-1\right)^{b-1} =$$

$$= 2^{n+1} \cdot \left(\frac{\frac{\left(n+b-2\right)!}{\left(n-1\right)!} - 2\cdot\left(b-3\right)\cdot g(n+1,b-1)}{\left(b-3\right)!} \right) + \left(-1\right)^b$$

Donde el numerador es un polinomio de grado $b-3$ ya que $\frac{(n+b-2)!}{(n-1)!}$ tiene grado $b-3$ y $2\cdot(b-3)\cdot g(n+1,b-1)$ tiene grado $b-4$.

Vamos a hallar el valor de $g(n,b)$

$$g(n,b)=(b-3)!\cdot\left(l(n+1,b-1)-\frac{2\cdot g(n+1,b-1)}{(b-4)!}\right)$$

Sustituyendo en la función sucesivas veces *g(n+1,b-1), g(n+2,b-2),* etc. por su valor obtenemos:

$$g(n,b)=(b-3)!\cdot\sum_{i=1}^{b-2}(-2)^{i-1}\cdot l(n+i,b-i)$$

que es equivalente a:

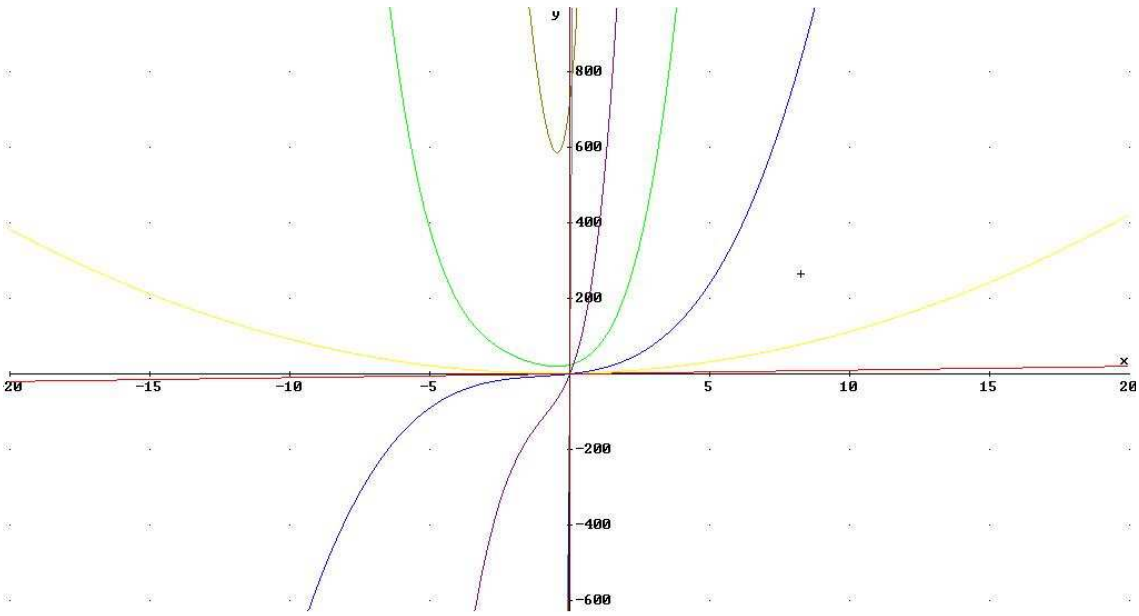
$$g(n,b)=(b-3)!\cdot\sum_{i=1}^{b-2}(-2)^{i-1}\cdot\binom{n+b-2}{n+i}$$

Aunque está multiplicado por (b-3)! el término de mayor grado tiene coeficiente 1

$$f\left(l(n,b)+m,b\right)=2^{n+1}\left(\frac{(b-3)!\cdot\sum_{i=1}^{b-2}(-2)^{i-1}\cdot\binom{n+b-2}{n+i}}{(b-3)!}+m\right)+(-1)^{b}$$

Preferimos no simplificar $(b-3)!$ pues así el polinomio tiene coeficientes enteros. Obviamente, se trata de un polinomio de grado b-3.

A continuación la gráfica de los primeros polinomios:



Como se observa, ninguno de los polinomios posee raíces reales (con excepción de n=0, en las impares), por tanto sería interesante analizar la distribución de las raíces en el campo complejo, pudiendo haber una distribución particular, incluso un fractal debido a la naturaleza altamente iterativa de esta función.

De esta manera queda resuelto el problema de obtener el mínimo número de movimientos necesarios para resolver las Torres de Hanoi con *a* discos y *b* palos.

Conclusión:

Siendo *a* el número de discos y *b* el de palos tal que:

$$l(n,b) < a < l(n+1,b)$$

Y:

$$a - l(n,b) = m$$

Tenemos que las funciones:

$$\boxed{f(a,b) = \sum_{i=0}^{n} 2^i \cdot \binom{i+b-3}{b-3} + 2^{n+1} \cdot m}$$

$$\boxed{f(a,b) = 2^{n+1}\left(\frac{(b-3)!\cdot\sum_{i=1}^{b-2}(-2)^{i-1}\cdot\binom{n+b-2}{n+i}}{(b-3)!} + m\right) + (-1)^b}$$

Permiten calcular de forma exacta el número mínimo de movimientos necesarios para resolver las Torres de Hanoi con cualquier número de palos y discos. La primera fórmula es más apropiada que la segunda cuando n es bastante menor b, pues en caso contrario el sumatorio es mucho más grande.

La ventaja de la segunda es que una vez calculado el polinomio para un b dado, los cálculos se reducen drásticamente.

Algoritmo:

De lo hallado, se deduce fácilmente el algoritmo para resolver las torres de Hanoi con b palos y $l(n,b)$ discos en un número mínimo de movimientos. Llamamos t_i a las i-ésima columna. Procederemos de la siguiente manera:

-Colocamos $l(1,b)$ discos en t_2, $l(1,b-1)$ en t_3, ..., $l(1,3)$ en la $t_{b-1.}$

-Movemos un disco, y colocamos las columnas anteriores encima, obteniendo una columna con $l(2,b)$ discos en t_b.

-Hacemos columnas de $l(1,b-1)$ discos en t_2, $l(1,b-2)$ en t_3, ..., $l(1,3)$ en la $t_{b-2.}$

-Pasamos un disco y reagrupamos, obteniendo una columna con $l(2,b-1)$ discos en t_{b-1}.

-Procedemos de manera análoga hasta obtener una columna con $l(2,3)$ en t_3, con $l(2,4)$ en t_4, ..., $l(2,b-1)$ en t_{b-1}, $l(2,b)$ en t_b. Movemos un disco desde t_1 hasta t_2 y reagrupamos, obteniendo una columna con $l(3,b)$.

...

-Obtenemos columnas con $l(n-1,b)$, $l(n-1,b-1)$, ..., $l(n-1,3)$ discos, movemos el último disco en t_1 a la columna que esté libre y reagrupamos.

Si se tratase de un número de discos (a) comprendido entre dos límites $l(n,b)$ *y* $l(n+1,b)$, de nuestro trabajo se desprenden tres características:

-Los $a-l(n,b)$ discos pueden ser distribuidos en las columnas que se quiera siempre y cuando el número de discos en estas no supere $l(n,d_i)$ donde d_i indica el número de palos útiles para una columna t_i, es decir, el número de columnas vacías más las que tienen discos más pequeños que ella.

-Para formar cualquier columna intermedia, comprendida entre el k-ésimo y el k+1-ésimo límite, en ningún momento se debe superar el k-ésimo límite en las columnas intermedias.

-Para formar cualquier columna intermedia, comprendida entre el k-ésimo y el k+1-ésimo límite, hay que recurrir a la distribución que deje sin utilizar el menor número de palos (es decir, si con 7 discos y 4 palos, es preferible al formar la primera columna de 4 discos, formarla a partir de dos columnas de dos que de una columna de 3 y una de 1), lo que se basa en la fórmula inicial: $2(2c_1-1+2c_2-1+...+2c_n-1)+1=4(c_1+c_2+...+c_n)-2n+1$.

Demostración de que la distribución es ordenada

Ante todo somos conscientes de que la demostración que vamos a dar a continuación no es completamente rigurosa aunque intuitivamente correcta. Así mismo, estamos seguros de que debe existir una demostración formal que, sin embargo, ha escapado a nuestros intentos.

Supongamos que en un momento dado, en lugar de colocar una torre encima de la que le corresponde, la dejamos donde está. Movemos una serie de discos (aquí también incluimos no mover ninguno) y a continuación tenemos cuatro opciones:

-Colocar la torre donde la íbamos a colocar antes. En este caso, estamos añadiendo más movimientos pues nos supone la misma cantidad de movimientos que antes y, además, al mover esa serie de discos, hemos dispuesto de un palo menos.

-Dejar la torre donde está. En este caso se trata de una distribución ordenada y será mínima cuando cumpla los requisitos expuestos en el trabajo.

-Mover la torre encima de otra que no le corresponde. En este caso nos supone la misma cantidad de movimientos que antes y además disponemos de un palo menos.

-Colocar una torre más pequeña encima de esta. Sin embargo, este caso se puede analizar desde el punto de vista de la torre más pequeña y se reduce al anterior.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Http:\\www.wikipedia.org
[2] Htttp:\\www.mathworld.org