

Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Primera Edición, 2006/2007

TRABAJO: De las superficies mínimas,
las pompas de jabón y otras construcciones
óptimas

***MENCIÓN ESPECIAL (POR SU CARÁCTER
EXPERIMENTAL)***

AUTORES:

- o Diego Jimeno Génova
- o Julia Díaz Sáez
- o Eva M^a Martín Fernández
- o Roberto Martín Sánchez

TUTORES:

- o Carmen Bas López

CENTRO: IES San Fernando (Madrid)



De las superficies mínimas, las pompas de jabón y otras construcciones óptimas

GRUPO: EN TU POMPA



ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN

2.- CONTEXTO HISTÓRICO

3.- OBJETIVOS

4.- MATERIAL, MÉTODO Y RESULTADOS

4.1.- REFERENCIAS HISTÓRICAS

4.2.- TRABAJO DE LABORATORIO

4.2.1.- PRÁCTICA 0: la esfera como cuerpo geométrico con menor superficie para un determinado volumen.

4.2.2.- PRÁCTICA 1: la tensión superficial

1º experimento: *la forma esférica es la más estable*

2º experimento: *¿puede flotar el metal en agua?*

3º experimento: *¿puede actuar el agua como un pegamento?*

4.2.3.- PRÁCTICA 2: el efecto del jabón sobre la tensión superficial y la formación de superficies mínimas

4.2.4.-PRÁCTICA 3: las matemáticas de las pompas de jabón. Superficies minimales. Leyes de Plateau

1º experimento: *láminas jabonosas que se cortan en aristas y aristas que se cortan en un punto*

2º experimento: *superficies minimales en estructuras tridimensionales*

3º experimento: caminos mínimos. Problema de Steiner y punto de Fermat

5.- CONCLUSIONES GENERALES

6.- BIBLIOGRAFÍA

7.- ANEXO: FOTOGRAFÍAS

"La simetría es una idea por medio de la que el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección". (Herman Weyl)

INTRODUCCIÓN

Si miramos a nuestro alrededor descubrimos asombrosas configuraciones naturales. Es como si la naturaleza supiese matemáticas. Vemos **simetrías en las formas y mucha regularidad en las disposiciones**.

Si nos acercamos a un panal de abejas sus celdillas tienen sección hexagonal; las alas de ciertos insectos, por ejemplo las libélulas, presentan un enrejado, igualmente, casi hexagonal y si seguimos buscando hexágonos los encontramos en situaciones que deben recubrir un plano sin dejar huecos.

Volvamos la vista hacia las plantas. Las semillas de los girasoles se distribuyen formando espirales que también las encontramos en la lengua de las mariposas y en el crecimiento de los caracoles. Vemos que se ha elegido la espiral como forma geométrica en otras muchas configuraciones naturales. Los planetas son esféricos así como también lo son las gotas de agua y las pompas de jabón. ¿Por qué esto es así?. ¿Qué propiedades tienen estas formas para que la naturaleza las haya elegido por encima de todas las demás?. Parece que la naturaleza es sabia a la hora de tomar decisiones.

Hay situaciones en las que la naturaleza actúa de manera que minimiza longitudes y superficies, por ejemplo, la línea recta para un rayo de luz y una esfera para una burbuja. En 1744, Pierre-Luís Moreau de maupertuis, Propuso su gran Esquema del Mundo: "*La naturaleza opera siempre con la máxima economía*".

Geométricamente, los hexágonos rellenan el plano sin dejar huecos y las espirales ahorran espacio; La circunferencia y la esfera tienen la máxima simetría y cumplen los principios de optimización.

La rama de las matemáticas que trata los problemas de máximos y mínimos es el Cálculo de Variaciones o Cálculo Infinitesimal. Minimizar áreas es equivalente a resolver una ecuación diferencial parcial asociada, la ecuación de Euler-Lagrange.

En este punto tenemos que aclarar que nuestros conocimientos matemáticos no abarcan, todavía, este tema pero comprendemos lo que significa. Sabemos, porque lo hemos leído y posteriormente experimentado,

que, a veces, los problemas de máximos y mínimos son difíciles de resolver. Sin embargo, basta una simple disolución jabonosa para que podamos llegar a una comprobación visual y experimental de algo que los matemáticos han tratado, durante varios siglos, de demostrar. Un claro ejemplo de ello son las demostraciones que hizo Plateau en el siglo XIX. Resolvió y enunció las leyes que rigen el comportamiento de minimizar esfuerzos que utiliza la naturaleza, haciendo experimentos con burbujas y pompas de jabón. Sus observaciones tienen un precedente en Jacob Steiner (1796-1863).

Todo esto nos intrigó y nos, pareció increíble, que un juego como es hacer pompas de jabón pudiese resolver problemas de Física que a las Matemáticas les ha llevado tanto tiempo dar respuesta y que todavía hoy en día no son definitivas.

Desde que hicimos ese descubrimiento tuvimos claro que queríamos hacer lo mismo: sumergirnos en jabón e indagar sobre la optimización de formas y de medios, de recursos, de la energía

Pero, buscando información, descubrimos la Historia de las Matemáticas, algo sobre lo que sabíamos muy poco. Por ello, decidimos incluir en nuestro trabajo un repaso sobre la historia de las Matemáticas tomando como hilo conductor los avances del pensamiento científico desde los planteamientos de los Griegos hasta el inicio del Cálculo Diferencial.

Era estupendo ver cómo tirando de un hilo descubríamos la evolución de la **Ciencia Matemática**. Hemos dedicado bastante espacio a esta parte pues nos pareció muy interesante.

Estos son los tres problemas que conducen nuestro trabajo:

Problema de Pierre Fermat (1601-1665): “ **Dado un triángulo de ángulos agudos localícese un punto P tal que la suma de distancias a los vértices sea lo más pequeña posible**”. A ese punto se le llama el punto de Fermat.

Problemas Jacob Steiner (1796-1863): “**De todas las curvas de perímetro dado el círculo es la de área máxima**”. “**Encontrar la red de líneas que conecte varios puntos y cuya longitud total sea la mínima posible**”.

Problema de Joseph A. Plateau (1801-1883): “**Determinar la superficie de área mínima limitada, en el espacio, por un contorno cerrado**”

Nuestro trabajo consistió en reproducir las experimentos de Plateau comprobando sus principios y leyes y dar solución a los dos problema de Steiner bajo el punto de vista de unos alumnos de secundaria.

Otro de los aspectos que nos interesó de la investigación fue su interdisciplinaridad. En ella aparecen aspectos de Física, Matemáticas y Tecnología.

2. CONTEXTO HISTÓRICO

En el siglo XIX, Joseph A. Plateau (1801-1883) realizó experimentos simples y divertidos que consistían en hacer pompas de jabón y mojar marcos de alambre en una disolución jabonosa. Estos experimentos permitieron a Plateau percatarse de que las películas de jabón obedecen a un principio muy simple: hacer mínima su área ya que serán las más estables pues su energía potencial es mínima. Afirmaba, también, que la tensión superficial era, en parte, la causante de los resultados de sus experimentos. Decía que **la formación de una superficie de jabón exige energía y que, en consecuencia, la superficie tiende a contraerse para minimizar dicha energía**. Es decir, la pompa de jabón como la naturaleza en sí busca hacer la menor fuerza posible y eso lo consigue con la forma esférica.

En 1873 formuló el problema que lleva su nombre: **"determinar la superficie de área mínima limitada en el espacio por un contorno cerrado"**. Además enunció tres leyes sobre la formación de estas superficies:

Primera ley: "Tres superficies de jabón se intersecan a lo largo de una línea. El ángulo formado por los planos tangenciales a dos superficies que se intersecan, en cualquier punto a lo largo de la línea de intersección de las tres superficies, es de 120° ".

Segunda ley: " Cuatro líneas, todas formadas por la intersección de tres superficies, se intersecan en un punto y el ángulo formado por cada par de ellas es de $109^\circ 28''$ ".

Tercera ley: "Una película de jabón que puede moverse libremente sobre una superficie la interseca en un ángulo de 90° ".

3. OBJETIVOS

- Buscar, en la historia de la ciencia, las ideas que han llevado a los científicos a encontrar un nexo entre las matemáticas y la física, llamado el cálculo de variaciones o cálculo infinitesimal.
- Indagar sobre la tendencia de los líquidos y la naturaleza, en general, a adoptar la forma esférica
- Mostrar que las películas jabonosas resuelven problemas matemáticos difíciles. Reproducir los experimentos de Plateau.
- Aplicar las experiencias realizadas a la elaboración de materiales interactivos que expliquen, de una manera visual y manipulativas, estos conceptos.

4. MATERIAL, MÉTODO Y RESULTADOS

Para realizar este trabajo elaboramos un calendario de actuación repartiendo entre los componentes del grupo, los distintos aspectos que

íbamos a investigar. Primeramente deberíamos hacer una búsqueda bibliográfica individual para tratarla posteriormente en las reuniones de todo el grupo.

Las principales dificultades que hemos encontrado a la hora de buscar información han sido: la poca especificidad de algunas páginas Web pues trataban los conceptos de una forma muy general; la complejidad del lenguaje científico de otras que hacían casi incomprensible lo explicado, y en otras, lo pobres que eran en contenido. Pero sin duda, la mejor ayuda con la que hemos podido contar han sido los libros, ya que, en ellos hemos encontrado los conceptos claros y completos aunque, a veces, algunos textos resultaban un poco complicados para nosotros.

Una vez recogida la información, nuestra tutora nos orientó a la hora de seleccionarla catalogándola por importancia. Elaboramos un plan de trabajo y nos pusimos en marcha. Fue de gran utilidad una guía, que nos hizo, en la que se nos explicaba el significado de cada apartado de los puntos que debería contener el documento final. También fue de gran ayuda sus explicaciones sobre algunos conceptos difíciles para nosotros y su aportación en la cronología de las referencias históricas.

Al empezar a buscar en la bibliografía nos encontramos con dos libros especialmente interesantes que nos han ayudado mucho en nuestras investigaciones: "Matemática y formas óptimas" de Stefan Hildebrandt y Anthony Tromba y "El jardín de Newton" de J. M. Sánchez Ron. Con ellos descubrimos que los científicos de todos los tiempos han tratado y tratan de comprender la naturaleza a través de conceptos sencillos, aunque dicen que no hay respuestas definitivas a las cuestiones de las formas naturales. Además afirman que las matemáticas desempeñan un destacado papel en todo esto y que es el único instrumento que nos permite formular con precisión lo que observamos y los fenómenos que tratamos de entender del mundo físico.

Pero lo que mas nos sorprendió, como hemos dicho ya antes, fue que con una sencilla disolución jabonosa se pudiera dar explicaciones a problemas complejos y resolver experimentalmente cuestiones del mundo físico que todavía matemáticamente no están demostrados.

La primera parte del trabajo la hemos dedicado a la Historia de las Matemáticas por los motivos que apuntamos en la introducción. La **segunda parte** la dedicamos a plantear las leyes de Plateau de una manera empírica, experimental. Para ello montamos un aula-laboratorio con todos nuestros materiales en la que realizábamos las prácticas. La posibilidad de consultar Internet en el instituto ha sido de gran ayuda.

Nuestras fuentes de información fueron libros, revistas especializadas e Internet .

4.1. Referencias históricas

Nuestra selección está motivada por la búsqueda de grandes científicos que han influido en los avances matemáticos y en los pasos que se dieron hasta llegar al cálculo diferencial.

Aunque brevemente, tenemos que remontarnos a la época griega ya que es ahí dónde comienza la ciencia matemática tal y como se considera hoy en día, siglos V-IV a. J.C. En esta época los primeros pensadores griegos (más tarde conocidos como filósofos) empezaron a generalizar casos concretos pasando a casos generales que permitiesen aplicarse a otras situaciones similares.

Los griegos y las formas geométricas. Los griegos, fueron los primeros en asegurar que la Tierra era esférica, pues esta era la forma perfecta. Primeramente Pitágoras (582-507 a.C.) que afirmaba que la estructura del universo se basaba en la aritmética y en la geometría. No debemos omitir a Platón (427-347 a.J.C.), a pesar de ser mucho mas reconocido por sus pensamientos filosóficos, que manifestaba una fascinación por la forma esférica como la figura perfecta. Consideraba que el mundo estaba construido esférico ya que así la distancia de todos los puntos al centro era la misma, siendo una figura completamente semejante a si misma. Era lo que ellos refirieron como **la más perfecta de todas las curvas, nombrada círculo**. (Es interesante el párrafo de Platón sobre la forma esférica del mundo que se puede leer en "El Jardín de Newton", J. M. Sánchez Ron. CRÍTICA. Nov. 2001, página 16). Recordemos a Euclides cuya contribución ha sido fundamental para la Geometría. Sus elementos marcan las normas y el rigor, **La omnipresencia de la Geometría**. No podemos pasar sin mencionar a Eratóstenes, pues confirmó, midiéndola, la esfericidad de la Tierra.

Vayamos a **los griegos y su intuición del infinito**: Con el descubrimiento de los inconmensurables las cantidades empiezan a no ser medibles: primera aparición del infinito. Empiezan a dudar de que el número sea la esencia de todas las cosas. Anaxágoras (500-428 a. J.C.) afirmaba: "*En lo pequeño no existe lo extremadamente pequeño, sino algo cada vez mas pequeño. De igual modo, en lo grande siempre hay algo más grande*". Hipócrates (450 a. J.C.) consiguió resolver geométricamente los problemas de cuadraturas. La cuadratura de las lúnulas: "*Ciertas áreas limitadas por líneas curvas son conmensurables con áreas limitadas por líneas rectas*". Aproxima la medida de curvas con polígonos.

Todos estos descubrimientos hacen tambalear los cimientos de su ciencia. Nos encontramos con los primeros intentos de explicar el infinito en Sócrates, Demócrito y Zenón. Surge *el conflicto, la crisis en la ciencia Griega y aparece el miedo "al infinito"*. Esta inseguridad les hace abandonar esta línea de investigación y ya con Euclides (450 d. J.C.) el retroceso se hizo realidad.

Aún así, seguimos encontrando a pensadores que no abandonan esa línea de investigación, como Eudoxo (408-355 a.J.C.) que aproxima el área del

círculo y la de su polígono inscrito de n lados. Pero Aristóteles, aunque admitía la infinita divisibilidad afirmaba que toda magnitud es finita y continua. Sus teorías retrasan los avances de la ciencia durante muchos siglos.

Destaquemos al mayor científico, al genio, al inventor que fue Arquímedes (287-212 a.J.C.). Estableció los cimientos del cálculo infinitesimal. Lo consiguió al añadir la mecánica al estudio de la Geometría.

La aportación medieval .Tenemos que dar un salto hasta el siglo XIV. Este salto se debe a que durante los siglos anteriores la influencia de Aristóteles y la Iglesia Católica fue tan fuerte que las nuevas investigaciones no salían a la luz.

Se abren nuevos caminos de exploración en las matemáticas. Las universidades europeas centran sus estudios en, el cambio en las magnitudes, en el movimiento. Empiezan a cuantificar las formas variables. Se estudian las series infinitas. Un grupo de científicos autollamados Merton, enuncian las Leyes de Merton y establecen el valor medio en velocidades constantes. Oresme (1323-1382) fue el primero que utilizó la representación gráfica de una cantidad variable. Mide la variabilidad como la diferencia de ordenadas. Asocia el área bajo la gráfica velocidad-tiempo a la distancia y advierte de la disminución de la variación en la proximidad de los máximos. Se acerca al concepto de tangente.

Nos encontramos a Galileo (1564 – 1642) que apoyó fervientemente el copernicanismo, formuló la primera ley del movimiento y experimentó con la caída de los cuerpos; a Kepler (1571-1630) que, además de enunciar sus leyes sobre las órbitas de los planetas, investigó las posibles maneras de llenar el plano con polígonos regulares e iguales.

El Renacimiento. En el Renacimiento se vuelven los ojos al mundo griego y se estudia a Arquímedes. Con el siglo XVII nace el álgebra simbólica, el método analítico y el cálculo diferencial.

Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) establecen el nexo entre Geometría y Álgebra. "*A métodos generales, soluciones generales*". Una ecuación algebraica describe una curva y una curva está descrita por una ecuación algebraica. El Álgebra facilita el estudio de los indivisibles, de lo infinitamente pequeño. El tiempo se convierte en una variable universal. De ella dependerá la variación simultánea de otras magnitudes como base de un Cálculo Infinitesimal.

A mediados del siglo XVII se produjo un acontecimiento matemático de la máxima importancia. Newton (1642-1727), aunque su obra maestra es la Ley de la Gravitación Universal, ideó el cálculo diferencial e integral, fundamentos matemáticos de la ciencia moderna, paralelamente a la famosa ley. Al mismo tiempo Leibniz también lo desarrolló aunque lo hicieron con planteamientos diferentes.

Años mas tarde Euler siguió con estos trabajos y Lagrange resolvió el problema isoperimétrico. Pero Lagrange no solo había resuelto el problema, había inventado un nuevo método, "el calculo de variaciones". Podía demostrar que los postulados de Newton sobre la materia y el movimiento se adaptaban al principio de economía de la materia. Con él, cobraron una nueva dimensión el estudio de las propiedades óptimas de los objetos geométricos, como son los problemas isoperimétricos. Con esta nueva disciplina se pueden resolver analíticamente problemas de optimización. Entre estos problemas de variaciones nos encontramos con el de la circunferencia como figura que encierra un área máxima con un mínimo de perímetro, y el de la esfera, como cuerpo con menor superficie para un determinado volumen.

En el siglo XVIII, el matemático Suizo Jacob Steiner (1796-1863) dio varios e ingeniosos argumentos para afirmar que la solución al problema isoperimétrico es el círculo.

Y llegamos a Plateau y sus observaciones sobre superficies minimales con experimentos con pompas de jabón. Una de las observaciones que hizo y ha sido de gran importancia para las matemáticas, es la que corresponde a que *" si introducimos una estructura cerrada en una disolución jabonosa, se forma siempre, una película de jabón"*. La cuestión que se preguntaban los matemáticos era, ¿"será que sobre cualquier curva cerrada se puede tender una superficie minimal?".

Fueron muchos los matemáticos a quienes intrigó el problema anterior, pero su solución parecía sumamente difícil. El estudio de estos problemas está vinculado al desarrollo de la Topología.

Ya en el siglo XX, Jesé Douglas, resolvió muchos de los problemas planteados sobre superficies minimales. Por sus trabajos recibió la medalla Fields en matemáticas el año 1936. Jean Taylor demostró que las reglas de Plateau son consecuencia del principio de mínima energía que la película de jabón alcanza cuando cubre la menor cantidad de superficie posible y Torsten Carleman (1919) que demostró que la esfera es la única figura en equilibrio que podía adoptar un líquido en reposo que gravitara sobre sí mismo.

Por último citaremos que se sigue investigando sobre modelos matemáticos que explique la forma esférica de las pompas de jabón.

4.2. Trabajo de laboratorio

En esta fase se trataba de utilizar modelos sencillos con películas de jabón que nos ayudasen a comprender los problemas de optimización.

A lo largo de nuestra etapa de planificación del trabajo experimental observamos que teníamos que investigar sobre tres cosas: a) la tensión superficial y la molécula de jabón, b) la forma esférica de las pompas y las

superficies mínimas c) los problemas de minimizar recorridos. Por ello dividimos los experimentos en tres prácticas diferentes.

La fase de redacción de los experimentos ha sido complicada. No es fácil explicar lo que se forma con las disoluciones jabonosas, hay que verlas y sobre ellas, la explicación se entiende sin necesidad de dar muchas explicaciones.

Materiales utilizados

- Disolución jabonosa (50% agua, 40% jabón, 10% glicerina)
- Curvas cerradas realizadas con alambres.
- Armazones poliédricos con varillas de plástico
- Armazones formados por dos láminas planas transparentes unidas por pequeñas pasadores metálicos
- Pajitas de bebidas
- Recipientes para los líquidos
- Retroproyector
- Pelotas de goma, Globos y tubos de PVC
- Calidoscopios poliédricos

PRACTICA 0: La esfera como cuerpo geométrico con menor superficie para un determinado volumen.

Esta práctica no la hemos realizado en este trabajo, pues a lo largo de nuestra etapa escolar ya lo habíamos demostrado en otras ocasiones.

PRACTICA 1: La tensión superficial

Si depositamos sobre un vidrio una gota de alcohol, una de agua, una de glicerina, una de aceite y una de mercurio y acercamos una lupa, se observa que son mas o menos esféricas y que unas están más aplanadas que otras.

En esta práctica tratamos de mostrar, empíricamente, lo que es la tensión superficial y cómo se manifiesta en los líquidos.

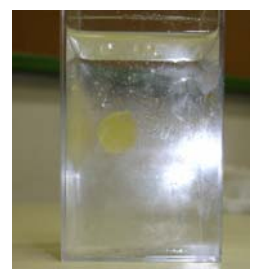
Objetivos:

1. Comprender el concepto de tensión superficial.
2. Descubrir el efecto que la tensión superficial ejerce sobre la superficie de los líquidos.
3. Observar fenómenos que tienen lugar en los líquidos y que no son explicados mas que por el efecto de la tensión superficial.

1^{er} Experimento: La forma esférica es la mas estable.

Materiales:

- Alcohol, pipeta, aceite y un vaso



Qué hicimos:

- 1.- Tomamos un vaso, le echamos 3 dedos de agua y fuimos añadiendo la misma cantidad de alcohol.-
- 2.- Con la pipeta cogimos el aceite, la metimos en la mezcla y con cuidado, añadimos el aceite en la disolución de agua y alcohol.

Observaciones y resultados:

Se forma una gota esférica de aceite que queda en el centro de la disolución entre el agua y el alcohol en estado de ingravidez.

2^{do} Experimento: ¿Puede flotar el metal en agua?

Materiales:

- cuchilla, papel secante, recipiente con agua

Qué hicimos:

- 1.- Llenamos un recipiente con agua.
- 2.- Colocamos un papel de filtro y encima la cuchilla.

Observaciones y resultados:

El papel de filtro precipita hacia el fondo.
La cuchilla queda flotando en la superficie.



3^{er} Experimento: ¿Puede el agua actuar como un pegamento?

Materiales:

- 2 láminas de metacrilato o de vidrio de 15x20 cm, recipiente con agua

Qué hicimos:

- 1.- Colocamos las láminas de metacrilato una sobre otra.
- 2.- Introdujimos ambas láminas, junta, en el agua.
- 3.- Sacamos las dos láminas (como fueron introducidas) y observamos
- 4.- Deslizamos la de debajo hasta sobresalir un poco, y pusimos encima de ella un peso.

Observaciones y resultados:

Al desplazar la lámina de debajo de manera que sobresalga por delante, ésta no se despegue de la otra. Parece como si estuvieran pegadas. Incluso poniéndole un peso encima no se despegue de la otra.



Conclusiones

Explicación teórica:

La tensión superficial es la resultante de las fuerzas que actúan sobre las moléculas de la superficie de un líquido. Es una fuerza perpendicular a la superficie y dirigida hacia el interior del líquido. La forma esférica de las gotas puede ser explicada a través de las fuerzas existentes en todos los líquidos, las de cohesión. Pero las moléculas que están en la superficie solo son atraídas por las que tiene debajo y las de los lados. La resultante de

estas fuerzas actúa hacia el interior del líquido. En una gota hay mucha superficie y las moléculas de la superficie son atraídas hacia el interior de la gota dándole una forma esférica.

En nuestra práctica:

1. Al añadir alcohol al agua hemos igualado, prácticamente, la densidad de la mezcla a la del aceite. La gota de aceite está libre, no hay fuerzas externas que actúen sobre ella. Las fuerzas de su tensión superficial tiran hacia dentro de sus moléculas y la esfera es la forma de menor superficie para un volumen dado. Los líquidos en libertad adoptan la forma esférica.
2. La superficie de un líquido actúa como una membrana tensa por la acción de la tensión superficial. Esta fuerza es bastante débil y se rompe con facilidad pero como hemos visto, es capaz de aguantar el peso de algunos objetos haciéndoles flotar aunque su densidad sea mucho más alta que la del agua. Por eso flota la cuchilla.
3. Entre las dos láminas de metacrilato se ha formado una superficie de agua muy fina. La fuerza de la tensión superficial actúa atrayendo entre sí las moléculas del agua por eso las dos láminas actúan como si estuvieran pegadas.

PRÁCTICA 2: El efecto del jabón sobre la tensión superficial y la formación de superficies mínimas.

Materiales:

- Un plato, un embudo, pajitas de bebidas, jabón, agua y recipientes
- Curvas cerradas realizadas con alambres. A algunas de estas curvas les habíamos atado un hilo como se ve en la fotografía.



Objetivos:

1. Verificar que el jabón tiene el efecto de disminuir la tensión superficial de los líquidos permitiendo su laminación y formando burbujas que mantienen, sin embargo, la tendencia a situarse en superficies mínimas.
2. Mostrar cómo se tensa un hilo debido a la tensión superficial y adopta la forma de círculo, la de mayor área para un perímetro determinado.
3. Comprobar el efecto de la tensión superficial aunque se ejerza una fuerza sobre la lámina de disolución
4. Comprobar la propiedad isoperimétrica de la circunferencia.



Qué hicimos:

- 1.- Intentar hacer burbujas y pompas sólo con agua.
- 2.- Echar polvos de talco en un vaso sólo con agua y después le fuimos añadiendo jabón. Los polvos se iban al fondo.
- 2.- Hicimos muchas pompas con la disolución de jabón y todas eran esféricas.

3.- Sobre un plato echamos una disolución jabonosa y situamos el embudo, con su parte más ancha sobre la disolución y soplamos por la parte del embudo que queda hacia arriba (la más estrecha) haciendo una burbuja apoyada en el plato. Poco a poco, fuimos levantando el embudo (de una forma oblicua). Ladeamos el embudo, y lo retiramos de la pompa. Dentro de esa burbuja, introduciendo una pajita siempre mojada previamente, hicimos más pompas. Esta parte de la práctica también nos ha servido para comprobar que los ángulos que forman las burbujas con las superficies sobre las que se apoyan son de 90° .

3.- Introducir estructuras de alambre planas en la disolución. Primero sumergimos un alambre semicircular con un hilo atado a sus extremos y al extraerlo observamos que se formaba una película de jabón y que el hilo quedaba tensado hacia la parte interior del alambre de forma circular. Con un dedo mojado tiramos del hilo y lo dejábamos nuevamente libre. El hilo retrocedía volviendo a su posición anterior de equilibrio. Hicimos lo mismo con estructuras cerradas y un hilo atado a los lados. La película quedaba dividida en dos partes por el hilo pero éste flotaba en la lámina de jabón y no se tensaba. Rompíamos con un dedo mojado una de las partes en que queda dividida la lámina y la película resultante, tiraba del hilo adoptando la forma circular.

Observaciones y resultados:

- Sólo con agua no conseguíamos hacer burbujas que durasen. Con la disolución jabonosa, sí.
- Los polvos de talco que estaban flotando en el agua al añadirle jabón se iban al fondo.
- Las pompas de jabón en libertad siempre son esféricas.
- La superficie de contacto entre una burbuja y una superficie plana es circular y forman ángulos de 90° .
- Al introducir las estructuras cerradas planas de alambre se forman películas que se ajustan al perímetro del alambre.
- Las estructuras con un hilo, al romper una de los dos superficies que quedan a los dos lados del hilo, la tensión superficial contrae a la película que queda y tiraba del hilo. El hilo se tensa y adopta la forma de una circunferencia perfecta. Daba igual la manera en que se sujete el hilo. Con la que tenía un hilo que formaba un lazo conseguimos una forma circular perfecta.
- Al formarse una película de jabón sustentada en un alambre y en un hilo, el hilo adopta la forma circular.



Conclusiones:

- La pompa hecha solo con líquido puro no es estable. Necesita de un tensoactivo, como el jabón, para estabilizarla. El jabón actúa sobre la tensión superficial disminuyéndola y estabiliza las pompas. Además son esféricas porque la esfera tiene el menor área para un volumen dado. La ley del mínimo esfuerzo.
- Formada la película de jabón, al estirla, la capa de líquido se expande y permite que vuelvan las moléculas del agua a la superficie

y la, concentración de jabón, disminuye lo que hace que aumente la tensión superficial. Por eso al romper una de las partes de la lámina ésta se tensa. Así, el jabón refuerza selectivamente las partes más débiles de la pompa y evita que se estiren más permitiendo la laminación. Las películas de jabón buscan minimizar el área superficial, esto es, minimizar su energía de superficie pero cuando se rompe una de las partes ahí ya no hay líquido, por eso se obtiene un círculo que es la forma geométrica de máxima área para un perímetro determinado. (Problema de Steiner)

Explicación teórica: El jabón es una sal alcalina (generalmente sodio o potasio) de un ácido graso de cadena larga. Dentro de la molécula de jabón se pueden distinguir dos partes distintas. Una parte hidrófila polar que se puede disolver en agua y una parte hidrófoba que no se puede disolver en agua. Cuando disolvemos jabón en agua las colas de las moléculas de jabón que no les gusta el agua se colocan hacia fuera, colocándose en la superficie entre las del agua, y a las que les gusta hacia adentro. Al soplar aire y formar una burbuja las moléculas de jabón se reorientan y adoptan una estructura de bicapa: hay una capa de agua rodeada de dos capas de moléculas de jabón con las cabezas hidrófilas hacia el agua y las hidrófobas hacia fuera.

PRÁCTICA 3: Las matemáticas de las pompas de jabón. Superficies minimales. Leyes de Plateau.

Objetivos:

1. Poner de manifiesto los efectos de la tensión superficial de los líquidos y aplicarlos a la resolución de problemas de minimización de superficies.
2. Obtener superficies mínimas inscritas en curvas cerradas tridimensionales y en poliedros (problema de Plateau).
3. Comprobar las tres leyes de Plateau y el problema de Steiner de conexiones mínimas.

1^{er} Experimento: Láminas jabonosas que se cortan en aristas y aristas que se cortan en un punto

Materiales:

- Estructuras planas compuestas por dos piezas rectangulares de metacrilato transparente unidas por tres tornillos o pasadores que las mantienen separadas unos 2 cm. aproximadamente.
- Transportador de ángulos
- Tubos de PVC, una pinza y globos



Qué hicimos:

1- En una de las estructuras de metacrilato con tres tornillos insuflamos disolución jabonosa y formamos burbujas. Las burbujas tocaban a las

paredes de metacrilato formando circunferencias y entre sí tocándose formando siempre ángulos iguales.

2- Con una pajita insuflamos una burbuja jabonosa dentro y formamos un cilindro limitado por las dos láminas de metacrilato y las tres varillas. A continuación íbamos extrayendo el aire de la burbuja hasta que el cilindro se transformó en tres láminas jabonosas perpendiculares a las placas de metacrilato y formaban ángulos de 90° con ella. Pero, las láminas entre sí formaban una Y. Para medir estos ángulos colocamos sobre el conjunto un transportador de ángulos y su valor dio de 120° , $1/3$ de la circunferencia. Esta configuración era estable lo que equivale a un camino de mínimas distancias.

3- Formamos muchas burbujas entre las dos placas de metacrilato para ver si se colocaban formando una estructura hexagonal. Se rompían y no fuimos capaces de comprobarlo. Este resultado pudimos comprobarlo en una exposición que visitamos este curso: "*Por qué las matemáticas*" con pelotas de goma iguales esféricas si las comprimías hasta que no quedaban huecos entre ellas, formaban hexágonos.

4- Formamos conjuntos de dos pompas libres. Se tocaban con ángulos de 120° . Si una era más grande que la otra el aire pasaba de la pequeña a la grande.

5- Comprobamos esto mismo con dos globos hinchados uno más que el otro y los unimos con un tubo de los del riego de jardín con una llave para dejar pasar el aire de una a otra.

Observaciones y resultados:

- Llegamos a la solución del problema de Steiner de conexiones mínimas con las pompas.
- Los sistemas de varias pompas de jabón se sitúan de manera que las aristas de líquido forman ángulos de 90° y de 120° .
- Al compactar esferas la disposición óptima es la hexagonal.
- Al hacer dos pompas, una sobre otra, se observa que se juntan formando ángulos de 120° . Si una es más grande que la otra la pared común se va hacia la de mayor tamaño intentando adoptar la menor área posible. Si son de igual tamaño la pared es plana. Al tener la mas pequeña mayor presión interna que la grande le lleva a empujar a la otra para minimizar la energía
- Al juntar mas de dos pompas sólo se tocan tres paredes en una misma línea y están separadas por ángulos de 120° .
- Si juntamos dos pompas una mayor que la otra el aire pasa de la de menor volumen a la de mayor volumen.

2º Experimento: Superficies minimales en estructuras tridimensionales.

Materiales:

- Estructuras cerradas de alambre tridimensionales.
- Poliedros hechos con varillas de plástico y bolas en los vértices.
- Calidoscopios poliedricos y poliedros de porexpan

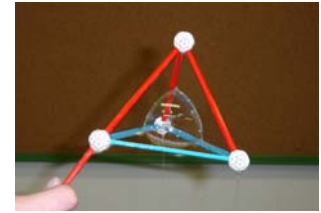


Objetivos:

1. Comprobar las leyes de Plateau para configuraciones estables de películas jabonosas.

Qué hicimos:

1. Sumergimos las curvas cerradas en la disolución. Al sacarlas se había formado una película jabonosa. No siempre era de la misma forma pero todas tendían hacia una que era la mas estable. En todas ellas las superficies jabonosas se interceptan en una o varias aristas.
2. Sumergimos las estructuras poliédricas en la disolución jabonosa. Para una misma estructura obteníamos varias configuraciones de superficies distintas formadas por películas planas hacia el interior del sólido. Sacudiéndolas un poco o soplando se pasaba de unas a otras quedando, al final, la mas estable. Cada par de superficies formaban una línea de contacto en su interior y cada cuatro aristas se cortaban en un punto. Medíamos los ángulos.
3. Cómo las superficies que se obtenían formaban nuevamente ángulos diedros, buscamos una explicación a los valores de 120° y $109^\circ 28'$ obtenidos. Para ello usamos los calidoscopios poliédricos pues los ángulos que forman son los mismos.



Observaciones y resultados:

- En la estructura tetraédrica se obtienen seis láminas planas que se cortan en tres aristas y estas en un punto central. El ángulo entre cada par de láminas es de 120° y entre cada par de aristas es de $109^\circ 28'$, cómo postuló Plateau.
- En el cubo se obtienen varias situaciones de laminas en equilibrio. La primera: de cada arista sale una superficie hacia el interior del cubo. Las 8 láminas se juntan en una línea común. La segunda: las 8 aristas se tocan en un punto común. Esta configuración no es estable. Pero todavía hay otra: las aristas forman un nuevo cubo en el interior. Las doce láminas tienen la forma de trapecios.
- Lo que vimos en el octaedro no es fácil de describir.
- Es divertido jugar con estas estructuras colocando mas pompas en el centro soplando con una pajitas.
- Nos ayudó mucho, para la comprensión de los ángulos, ver los calidoscopios. Estos calidoscopios se forman con las pirámides interiores de cada poliedro. En el calidoscopio del tetraedro los ángulos de los triángulos que los forman son de $109^\circ 28'$

3º Experimento: Caminos mínimos. Problema de Steiner y punto de Fermat.

ENUNCIADO DEL PUNTO DE FERMAT: Es un punto cuya suma de distancia a tres puntos dados es mínima. Desde este punto se ve cada uno de los lados del triángulo bajo un ángulo de 120° .

Materiales:

- Estructuras planas compuestas por dos piezas rectangulares de plástico transparente unidas por varios tornillos o pasadores que las mantienen separadas unos 2 cm. aproximadamente.
- Transportador de ángulos
- Retroproyector, acetatos, papel y rotuladores
- Maqueta con tres pueblos

Objetivos:

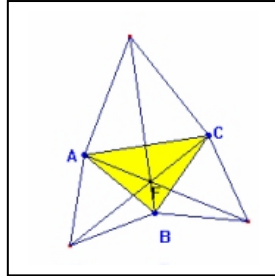
- 1º- Comprobar experimentalmente que la línea más corta entre dos puntos es la línea recta
- 2.- Poner de manifiesto la existencia y las propiedades del punto de Fermat de un triángulo.
- 3.- Resolver el problema de Steiner para cuatro puntos situados en los vértices de un rectángulo obteniendo una estructura de caminos que conectan los puntos con una longitud total mínima. Generalización a un número arbitrario de puntos en el plano.

Qué hicimos:

1. Introducir las estructuras de metacrilato en la disolución jabonosa:
 - Al sumergir y extraer la estructura transparente de dos tornillos, salía una lámina entre los dos pasadores. El camino más corto entre dos puntos la línea recta.
 - Al sumergir y extraer la estructura transparente de tres tornillos observamos que el jabón forma una figura compuesta por tres superficies que unen cada clavo con un segmento central. Proyectamos esta figura mediante un retroproyector y obtuvimos un triángulo con tres segmentos internos que unen cada vértice con un punto. Este punto, es el punto de Fermat y cumple la propiedad de que la suma de distancias a los tres vértices es mínima. Se forman además ángulos de 120° .
 - Con la estructura de cuatro clavos que formando un rectángulo aparecen cuatro segmentos uniendo los cuatro pasadores y un segmento central sostenido entre ellos. Nuevamente observamos que los ángulos libres son de 120° . Se trata de la configuración que, uniendo los cuatro puntos, tiene la menor longitud.
 - Con la estructura con seis clavos formando un hexágono regular, como los ángulos interiores son ya de 120° , podremos prever que el jabón no hará "atajos" y formará el hexágono exterior.
2. Con una maqueta en la que estaban colocados tres pueblos resolver un problema de Optimización de costes de servicios: "Dados tres pueblos, dónde construir un hospital de manera que el camino total que deberán recorrer las ambulancias sea mínimo". Se trata de localizar el punto de Fermat. En una mesa-maqueta hay colocados tres pueblos y en cada uno de ellos un punto (un agujero) que los representa. Por cada agujero se ha pasado un hilo. En los extremos de los hilos que caen por debajo de la mesa, se han colocado tres pesos iguales; El otro extremo de los hilos se han juntado con un

nudo en la parte de arriba de la mesa. Al elevar la cuerda y soltarla nuevamente, el nudo se coloca en el punto de Fermat.

3. Localizamos el punto de Fermat geométricamente



5. CONCLUSIONES GENERALES

- La tensión superficial es la causante de la forma esférica de los líquidos
- Una burbuja en el aire siempre es esférica.
- Las pompas esféricas son una prueba del teorema que dice: de todos los sólidos de volumen dado, la esfera tiene una superficie de área mínima.
- Cuando las pompas están libres intersecan perpendicularmente con las superficies que las limitan o las que las soportan.
- Cuando unimos dos pompas de jabón de distinto tamaño el aire pasa de la mas pequeña a la mas grande.
- Las superficies minimales son aquellas de energía potencial mínima. Son las mas estables y se pueden materializar en películas de jabón.
- Las películas mas estables son las planas pero a veces aparecen otras que son como una silla de montar.
- Las películas de jabón que se forman en las estructuras cerradas se colocan de manera que la tensión o fuerza sobre todos los puntos de la estructura sean iguales.
- En equilibrio estable sobre una arista pueden concurrir únicamente tres superficies que se intersecan en ángulos de 120° .
- En las estructuras tridimensionales cuando las láminas jabonosas hacen mínima el área del sistema, las láminas no están libres ya que se apoyan en los contornos de la figura. Cada tres se cortan en una arista que será una línea. Cada par de estas láminas forman al cortarse ángulos de 120° .
- En un punto solo pueden concurrir 4 aristas que se forman por la intersección de tres superficies. En dicho punto, el ángulo que forman cada par de aristas es de $109^\circ 28'$

6. BIBLIOGRAFÍA

Libros y artículos

- "Matemáticas y formas óptimas" S.HILLDEBRANT & A.TROMBA. Ed.
Biblioteca scientific American - Barcelona 1990

- "Cinco ecuaciones que cambiaron el Mundo" MICHAEL GUILLÉN.
DEBOLSILLO, marzo 2006
- "Experimentos con burbujas de jabón" LUÍS EDUARDO GONZÁLEZ &
GERARDO MEJÍA.. U. Autónoma. Madrid
- "El jardín de Newton, la ciencia a través de la historia" JOSÉ MARÍA
SÁNCHEZ RON. *Ed. Crítica - Barcelona 2001*
- "Geometría de las pompas de jabón" INVESTIGACIÓN Y CIENCIA,
Junio 2001
- "La tensión superficial" FERNANDO DE PRADA PÉREZ DE AZPEITIA &
JOSÉ A. MARTÍNEZ PONS. *I.E.S Las Lagunas, Rivas Vaciamadrid*
- "La rebelión de las formas" JORGE WAGENSBERG. *Metatemas*
Tusquets - Barcelona 2004
- "Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII" PEDRO M.
GONZALEZ URBANEJA. Alianza Editorial. Madrid 1992.
- "Matemáticas mojadas. Geometría sobre las pompas de jabón"
ANTONIO AUBANEL. *Universidad Autónoma de Barcelona*
- "Ritmos, matemáticas e imágenes" ELISEO BORRAS, PILAR MORENO
& OTROS. *Ed. Nivela - Madrid 2002*
- "SIGMA. El mundo de las matemáticas". James R. Newman. Ediciones
Grijalbo. S.A. Barcelona 1968
- "Superficies jabonosas y transición de fases" J.GÜEMEZ.
Departamento de Física aplicada. U de Cantabria - Febrero 2004

Páginas web consultadas

- WWW. Geocities.com/matemáticamente/pompas
- WWW. Lowy-robles.com/35_2
- WWW.rsme.es/gacetadigital/abriol
- WWW. Aulaelmundo.es
- WWW.geofocus.rediris.es
- WWW.mensa.es/carrollina
- WWW.seed.slb.com/es/sciritr/watch/bathroom/soap
- WWW.prof.uniandes.edu.co
- WWW.elrincondelaciencia.com "Jabones y detergente"
- WWW. "Pompa de jabón" de Wikipedia, la enciclopedia libre.
- WWW.tabloide.eurofull.com/shop/detallenot.asp?notid=550
- WWW.dibulgamat.net/weborriat/recursosinternet/Recaula/Pompasjabon.asp