# Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

## Segunda Edición, 2007/2008

**TRABAJO:** El baricentro de mi estrella de Belén

***FINALISTA EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.***


**AUTORES:**

- Laura García Torrijos
- Alicia Rubio Sánchez
- Rodrigo Santos Güemes

TUTORES:

- Jorge García García

CENTRO: Colegio Arcángel Rafael (Madrid)



AUTONOMA 40 años

Fundación Vodafone España

Obra Social CosmoCaixa

# EL BARICENTRO DE MI ESTRELLA DE BELÉN

por: DESPITEU

# EL BARICENTRO DE MI ESTRELLA DE BELÉN



.

## ***1.- INTRODUCCIÓN***

Nos encontramos, año tras año, frente a un problema vital para la decoración de las fiestas más derrochadoras del año: la Navidad. Resulta que, año tras año, ponemos el belén, como millones de personas del mundo. Normalmente ponemos el portal en la cajonera del salón, entre les candelabros y un florero vacío. Solemos poner a la familia honrada en el centro, a los reyes detrás del todo, y a los pastorcitos supervivientes de años anteriores junto a ellos. Al final de todo nos aguarda lo más importante: la estrella. ¿Cómo van a guiarse los Reyes Magos sin ella? Pero claro, la tenemos que colgar.

No me siento capaz de enumerar todas las formas posibles en las que mi pobre estrellita ha ido a parar al suelo. Sólo puedo decir con toda seguridad que pegarla al techo fue la única solución, aunque cutre, de mantener a la brillante guía en lo alto. Pero este año estamos hartos. Queremos colgar la estrella de una manera decente, sin celofán ni cola blanca. Queremos que caiga del techo sujeta a un hilo. El problema es, ¿por dónde pasamos el hilo? Porque, claro está, no vamos a agujerear a la pobre estrella cual queso cheddar, desde luego.

Así pues preguntamos a nuestro querido primo estudiante de físicas, y nos respondió:

- Tenéis que colgarla de un extremo, dejarla colgar a su bola (así de fino es el chaval) y trazar una perpendicular al suelo. Después la colgáis de otro extremo y hacéis lo mismo. De dónde se crucen tenéis que hacer el agujero porque ese es su “baricentro”.

Pero no estábamos dispuestos a hacer malabarismos sobre una escalera en medio del salón, así que nos propusimos hallar un método para saber el punto de equilibrio de la estrella.

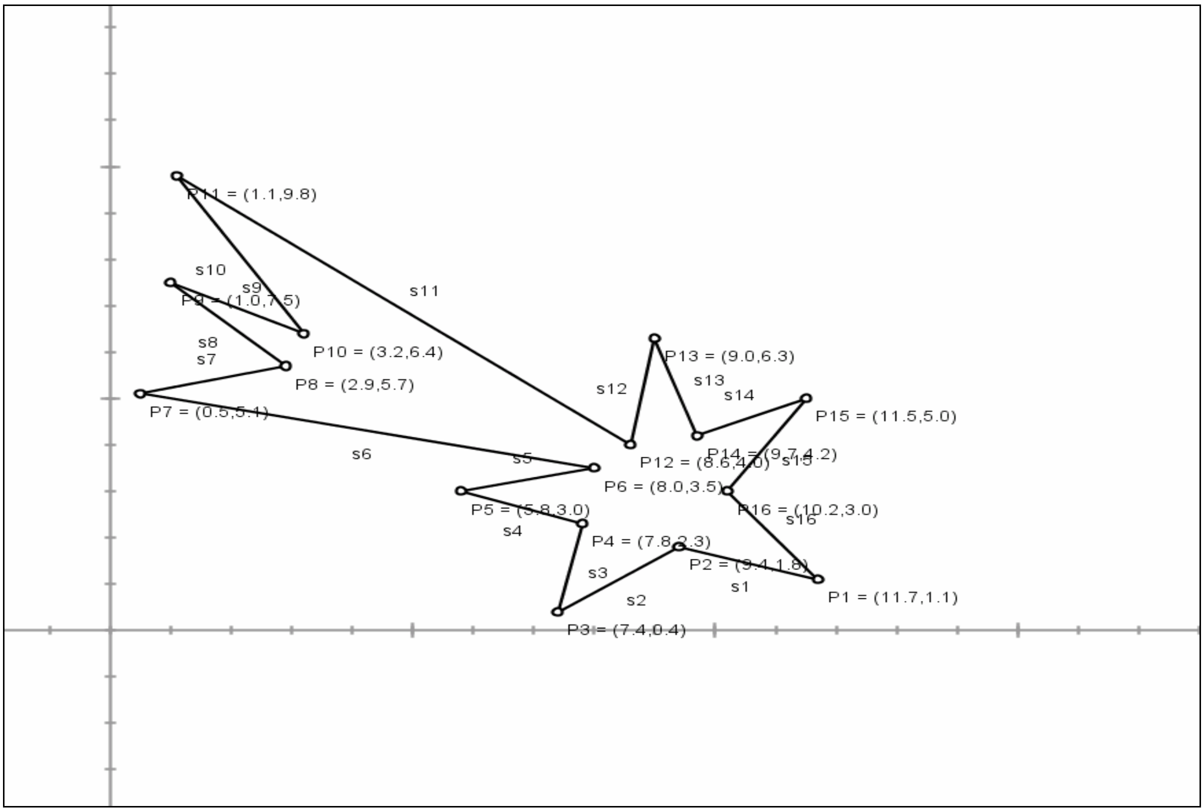
## ***2.- PLANTEAMIENTO***

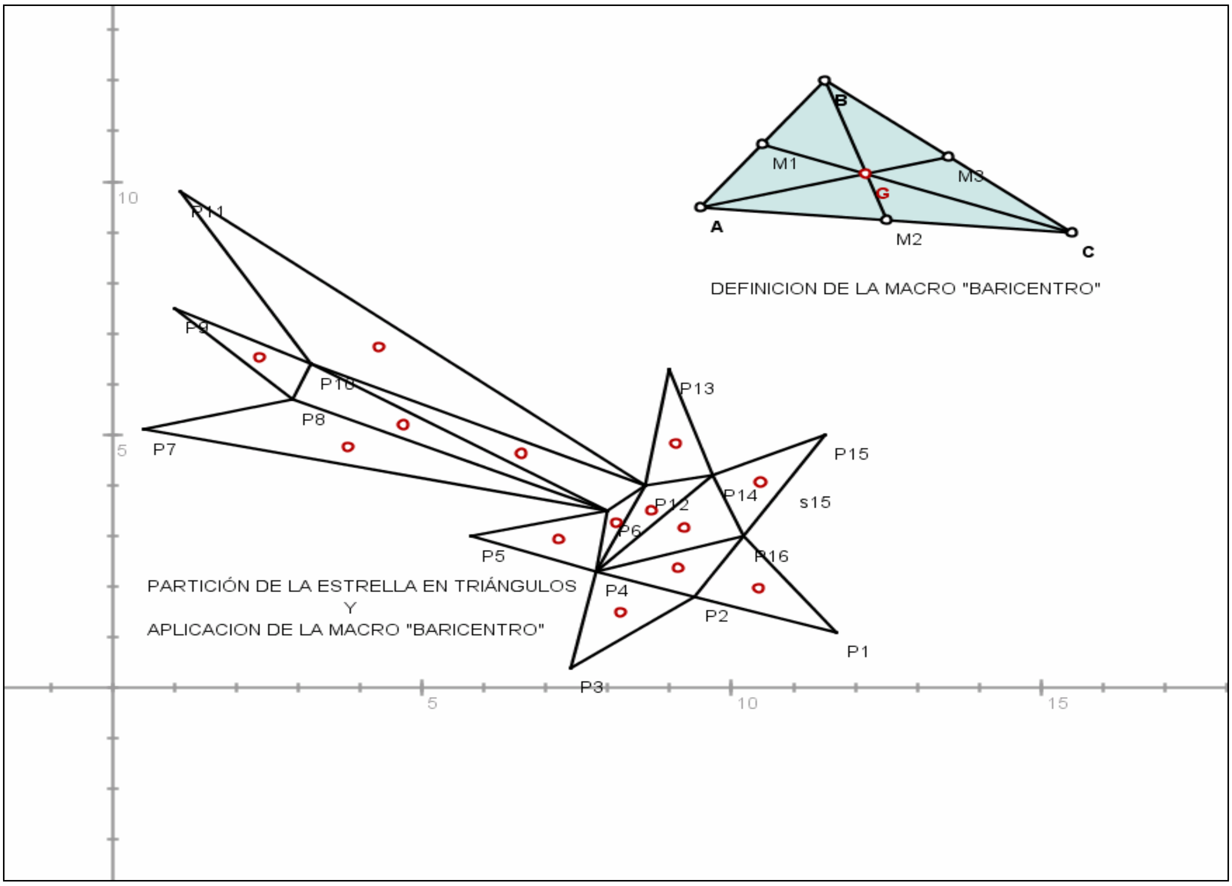
Sabíamos que el punto de equilibrio de un triángulo es el baricentro del mismo, porque en clase sólo nos habían enseñado a hallar este tipo de puntos en triángulos. De modo que se nos ocurrió dividir la estrella en estas figuras geométricas sobre un papel cuadriculado, creando de esta manera 14 triángulos dentro de la misma. Los lados de la estrella eran todos rectos, sin curvas, de modo que allí en aquellos 14 triangulitos estaba todo y había que averiguarlo. Además, bien pensado así como los tres vértices de un triángulo lo definen, los vértices de la estrella, los salientes y los entrantes, la definen y todo cuanto pudiera afirmarse de ella debía poderse calcular a partir de la posición de sus vértices. Su punto de equilibrio, su baricentro, debía poderse establecer a partir de la posición de sus vértices ¡Cuánta razón teníamos!, otra cosa es que fuese fácil, pero de eso va esta historia.

*PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA: Se desea establecer un procedimiento para determinar la posición del baricentro de un polígono general.*

Nos propusimos hallar el baricentro de cada uno de los triángulos. Podíamos obtener este punto mediante la fórmula de mediatrices dada en clase, sacando su ecuación como rectas y obteniendo su punto de corte, pero como somos unos inconformistas natos, le dimos vueltas y vueltas hasta encontrar a una fórmula del baricentro que nos convenciera. Como nos suponíamos la posición del baricentro debía depender de la posición de los vértices Y ¡premio! Encontramos una demostración de que la posición del baricentro es la media de las posiciones de los tres vértices, por lo que de momento estábamos salvados.

Pero antes de nada visualizamos el planteamiento usando el programa “Regla y Compás” que encontramos que era de uso libre. Dibujamos la estrella, trazamos triángulos y construimos una macro “BARICENTRO” a base de cortar las medianas, que luego aplicamos a cada triangulito.


P11 = (1.1,9.8)
s10
s9
P9 = (1.0,7.5)
s11
P10 = (3.2,6.4)
s8
s7
P8 = (2.9,5.7)
P7 = (0.5,5.1)
P13 = (9.0,6.3)
s12
s13
s14
P15 = (11.5,5.0)
s6
s5
P14 = (9.7,4.2)
P12 = (8.6,4.0)
s15
P6 = (8.0,3.5)
P5 = (5.8,3.0)
P16 = (10.2,3.0)
s16
s4
P4 = (7.8,2.3)
s3
P2 = (9.4,1.8)
s1
s2
P1 = (11.7,1.1)
P3 = (7.4,0.4)


10
P11
P9
P10
P8
5
P7
P13
P15
P12
P14
s15
P6
P5
P16
P4
P2
P1
P3
5
10
15
B
M1
M3
G
A
M2
C
DEFINICION DE LA MACRO "BARICENTRO"
PARTICIÓN DE LA ESTRELLA EN TRIÁNGULOS
Y
APLICACION DE LA MACRO "BARICENTRO"

## 3.- NUDO

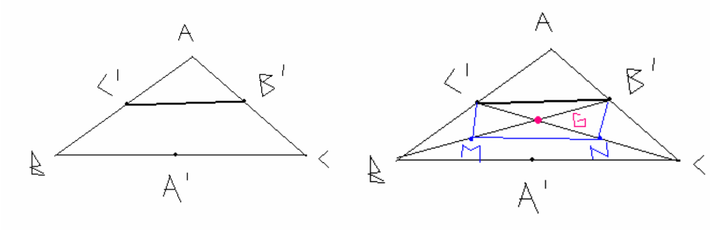
*RECORDATORIO: El teorema de Tales dice los segmentos que delimitan rectas paralelas sobre dos rectas secantes, son proporcionales.*

***PROPOSICIÓN: Las mediatrices de un triángulo se cortan en su baricentro, quien las divide en dos segmentos de longitud 2/3 y 1/3 del total.***

***DEMOSTRACIÓN:** En el triángulo ABC ocurre que unimos dos puntos medios de lados.*

*a) ♣ El segmento C´B´ es paralelo al segmento BC ya que el segmento AC´ es a AB lo que AB´ es a AC.*

*♣ El segmento C´B´ es la mitad del segmento BC porque, según el teorema de Tales, si C´ está en la mitad de AB, C´B´ es la mitad de BC, ya que son segmentos proporcionales.*




*b) ♣ Sea Baricentro = punto G*

*Sea M = mitad del segmento BC*

*Sea N = mitad del segmento CG*

*♣ El segmento MN es paralelo al segmento BC porque, según Tales, el segmento GM es al segmento GB lo que el segmento GM es al segmento GC.*

*♣ Dado que el segmento GM es la mitad del segmento GB, entonces por Tales el segmento MN es la mitad del segmento BC. (Es decir, GM es a GB lo que MN es a BC)*

*♣ Si tanto el segmento C´B´ como el segmento MN son la mitad y paralelas del segmento BC, concluimos que ambas son iguales y paralelas entre sí.*

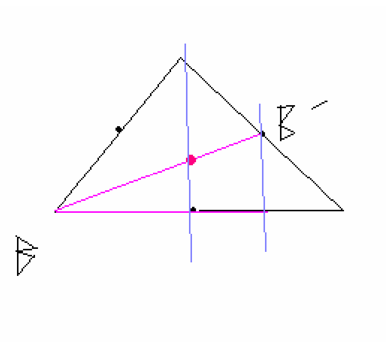
*♣ Así podemos formar el paralelogramo C´B´MN cuyo cruce de las diagonales es el baricentro.*

*c) ♣ El baricentro, entonces, está en la mitad del segmento B´M. Como hemos dicho que M está en la mitad del segmento GB, concluimos también que:*

*EL BARICENTRO ESTÁ A 1/3 DE B´ Y A 2/3 DE B.*

***PROPOSICION**: El baricentro de un triángulo se sitúa en el punto medio de los vértices, esto es*

***Siendo G=(Gx,Gy); Gx=(Ax+Bx+Cx)/3 , Gy= (Ay+By+Cy)/3***




***DEMOSTRACION**:*

*Coordenadas de B =* $B_x, B_y$ *y coordenadas de B´ =* $\dfrac{A_X + C_X}{2}, \dfrac{A_Y + C_Y}{2}$*, entonces la coordenada x del baricentro será:*

$$B_X + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{A_X + C_X}{2} - B_X\right) = B_X + \frac{2A_X + 2C_X}{6} - \frac{2B_X}{3} = \frac{6B_X + 2A_X + 2C_X - 4B_X}{6} =$$

$$= \frac{2A_X + 2B_X + 2C_X}{6} = \frac{A_X + B_X + C_X}{3}$$

*Y la coordenada y será:*

$$B_Y + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{A_Y + C_Y}{2} - B_Y\right) = B_Y + \frac{2A_Y + 2C_Y}{6} - \frac{2B_Y}{3} = \frac{6B_Y + 2A_Y + 2C_Y - 4B_Y}{6} =$$

$$= \frac{2A_Y + 2B_Y + 2C_Y}{6} = \frac{A_Y + B_Y + C_Y}{3}$$

*ASÍ QUE EL BARICENTRO ES LA MEDIA DE LOS TRES PUNTOS DE UN TRIÁNGULO, ES DECIR:*

$$Gx, Gy = \frac{A_X + B_X + C_X}{3}, \frac{A_Y + B_Y + C_Y}{3}$$

Utilizando esta última fórmula pudimos hallar los baricentros, obteniendo lo siguiente:

| VERTICES | X | Y |
|---|---|---|
| P1 | 11,7 | 1,1 |
| P2 | 9,4 | 1,8 |
| P3 | 7,4 | 0,4 |
| P4 | 7,8 | 2,3 |
| P5 | 5,8 | 3 |
| P6 | 8 | 3,5 |
| P7 | 0,5 | 5,1 |
| P8 | 2,9 | 5,7 |
| P9 | 1 | 7,5 |
| P10 | 3,2 | 6,4 |
| P11 | 1,1 | 9,8 |
| P12 | 8,6 | 4 |
| P13 | 9 | 6,3 |
| P14 | 9,7 | 4,2 |
| P15 | 11,5 | 5 |
| P16 | 10,2 | 3 |

| | | | | | | | BARICENTROS | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TRIANGULOS | Px1 | Py1 | Px2 | Py2 | Px3 | Py3 | media x | media y |
| T1:P10,P11,P12 | 1,1 | 9,8 | 3,2 | 6,4 | 8,6 | 4 | 4,30 | 6,73 |
| T2:P8,P9,P10 | 1 | 7,5 | 3,2 | 6,4 | 2,9 | 5,7 | 2,37 | 6,53 |
| T3:P10,P6,P12 | 3,2 | 6,4 | 8 | 3,5 | 8,6 | 4 | 6,60 | 4,63 |
| T4:P8,P5,P7 | 2,9 | 5,7 | 5,8 | 3 | 0,5 | 5,1 | 3,07 | 4,60 |
| T5:P10,P8,P6 | 3,2 | 6,4 | 2,9 | 5,7 | 8 | 3,5 | 4,70 | 5,20 |
| T6:P12,P13.P14 | 8,6 | 4 | 9 | 6,3 | 9,7 | 4,2 | 9,10 | 4,83 |
| T7:P12,P6,P4 | 8,6 | 4 | 8 | 3,5 | 7,8 | 2,3 | 8,13 | 3,27 |
| T8:P4,P6,P5 | 7,8 | 2,3 | 8 | 3,5 | 5,8 | 3 | 7,20 | 2,93 |
| T9:P12,P4,P14 | 8,6 | 4 | 7,8 | 2,3 | 9,7 | 4,2 | 8,70 | 3,50 |
| T10:P16,P4,P14 | 10,2 | 3 | 7,8 | 2,3 | 9,7 | 4,2 | 9,23 | 3,17 |
| T11:P15,P16,P14 | 11,5 | 5 | 10,2 | 3 | 9,7 | 4,2 | 10,47 | 4,07 |
| T12:P16,P2,P4 | 10,2 | 3 | 9,4 | 1,8 | 7,8 | 2,3 | 9,13 | 2,37 |
| T13:P1,P2,P16 | 11,7 | 1,1 | 9,4 | 1,8 | 10,2 | 3 | 10,43 | 1,97 |
| T14:P3,P2,P4 | 7,4 | 0,4 | 9,4 | 1,8 | 7,8 | 2,3 | 8,20 | 1,50 |

Ya teníamos las coordenadas de los baricentros, que se corresponden con las columnas *media x* y *media y*. Nos dimos cuenta, con el paso del tiempo, que lo que realmente teníamos era 14 baricentros diferentes, y no un único baricentro, que era lo que realmente buscábamos. Para hallar un único baricentro teníamos que tener en cuenta las masas de cada triángulo, que en este caso se corresponderían con las áreas de los mismos. Para hallar el área de los triángulos utilizamos la fórmula siguiente:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

dónde Px1 y Py1 se corresponden con las coordenadas del vértice 1, Px2 y Py2 con las del vértice 2, y Px3 t Py3 con las del vértice 3, la cual demostramos mediante lo siguiente:

**Área de un triángulo cuyos vértices son dados.**

Si los vértices del triángulo son: $P_1(X_1Y_1)$, $P_2(X_2Y_2)$ y $P_3(X_3Y_3)$ siguiendo el dibujo siguiente, su área será el área del polígono 1 más el área del polígono 2 menos el área del polígono 3. Como los tres polígonos son trapecios ortogonales, cada área será su base por la semisuma de las alturas, por lo que sus valores son:

1: $POL: M1, P1, P3, M3: \frac{Y_1+Y_3}{2}\cdot(X_3-X_1)$

2: $POL: M3, P3, P2, M2: \frac{Y_3+Y_2}{2}\cdot(X_2-X_3)$

3: $POL: M1, P1, P2, M2: \frac{Y_1+Y_2}{2}\cdot(X_2-X_1)$

Sumando 1 y 2 y restando 3 queda:

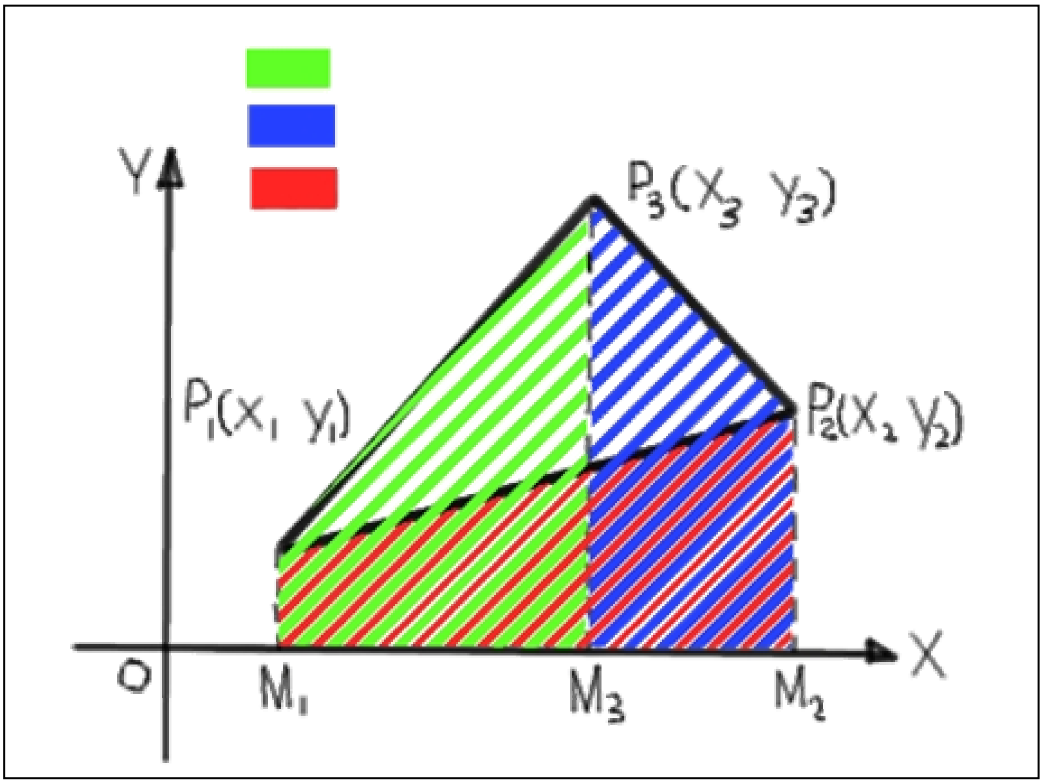
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\begin{array}{l}(Y_1\cdot X_3-Y_1\cdot X_1+Y_3\cdot X_3-Y_3\cdot X_1+Y_3\cdot X_2-Y_3\cdot X_3+Y_2\cdot X_2-Y_2\cdot X_3-Y_1\cdot X \\ (+Y_1\cdot X_1-Y_2\cdot X_2+Y_2\cdot X_1)=\end{array}\right.$$

$$A=\frac{1}{2}\left(X_1Y_2+X_2Y_3+X_3Y_1-X_3Y_2-X_2Y_1-X_1Y_3\right)$$

Esta fórmula también puede ser representada como un determinante, para hacer más sencillo su cálculo:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

La cual aplicaremos en su valor absoluto.




Y así, mediante ésta fórmula, obtuvimos los siguientes datos, que corresponden con las áreas de los triángulos. Usamos la función ABS de Excel para asegurarnos de que las áreas resultaban positivas.

| TRIANGULOS | Px1 | Py1 | Px2 | Py2 | Px3 | Py3 | media x | media y | áreas |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T1:P10,P11,P12 | 1,1 | 9,8 | 3,2 | 6,4 | 8,6 | 4 | 4,30 | 6,73 | 6,66 |
| T2:P8,P9,P10 | 1 | 7,5 | 3,2 | 6,4 | 2,9 | 5,7 | 2,37 | 6,53 | 0,935 |
| T3:P10,P6,P12 | 3,2 | 6,4 | 8 | 3,5 | 8,6 | 4 | 6,60 | 4,63 | 2,07 |
| T4:P8,P5,P7 | 2,9 | 5,7 | 5,8 | 3 | 0,5 | 5,1 | 3,07 | 4,60 | 4,11 |
| T5:P10,P8,P6 | 3,2 | 6,4 | 2,9 | 5,7 | 8 | 3,5 | 4,70 | 5,20 | 2,115 |
| T6:P12,P13.P14 | 8,6 | 4 | 9 | 6,3 | 9,7 | 4,2 | 9,10 | 4,83 | 1,225 |
| T7:P12,P6,P4 | 8,6 | 4 | 8 | 3,5 | 7,8 | 2,3 | 8,13 | 3,27 | 0,31 |
| T8:P4,P6,P5 | 7,8 | 2,3 | 8 | 3,5 | 5,8 | 3 | 7,20 | 2,93 | 1,27 |
| T9:P12,P4,P14 | 8,6 | 4 | 7,8 | 2,3 | 9,7 | 4,2 | 8,70 | 3,50 | 0,855 |
| T10:P16,P4,P14 | 10,2 | 3 | 7,8 | 2,3 | 9,7 | 4,2 | 9,23 | 3,17 | 1,615 |
| T11:P15,P16,P14 | 11,5 | 5 | 10,2 | 3 | 9,7 | 4,2 | 10,47 | 4,07 | 1,28 |
| T12:P16,P2,P4 | 10,2 | 3 | 9,4 | 1,8 | 7,8 | 2,3 | 9,13 | 2,37 | 1,16 |
| T13:P1,P2,P16 | 11,7 | 1,1 | 9,4 | 1,8 | 10,2 | 3 | 10,43 | 1,97 | 1,66 |
| T14:P3,P2,P4 | 7,4 | 0,4 | 9,4 | 1,8 | 7,8 | 2,3 | 8,20 | 1,50 | 1,62 |

## 4.- Y DESENLACE

**Baricentro de un conjunto de triángulos**

El baricentro global, como punto donde se equilibran los pesos de los triángulos (que equivale a sus áreas) se puede encontrar promediando las posiciones de los baricentros de los triángulos pesados según sus áreas.

Es decir, $$G = \frac{G_1 \cdot A_1 + ... + G_{14} \cdot A_{14}}{A_1 + ... + A_{14}}$$

En esta expresión G es la posición del baricentro global (Gx,Gy) que queremos determinar. G1(G1x,G1y) y los demás son las posiciones de los baricentros de cada triángulo. A1 y las demás son las áreas de cada triángulo, que suman el área total de la figura global.

Este resultado es extensible a cualquier composición de áreas. Y no es más que la media ponderada de las posiciones de los baricentros utilizando como pesos las áreas de sus triángulos.

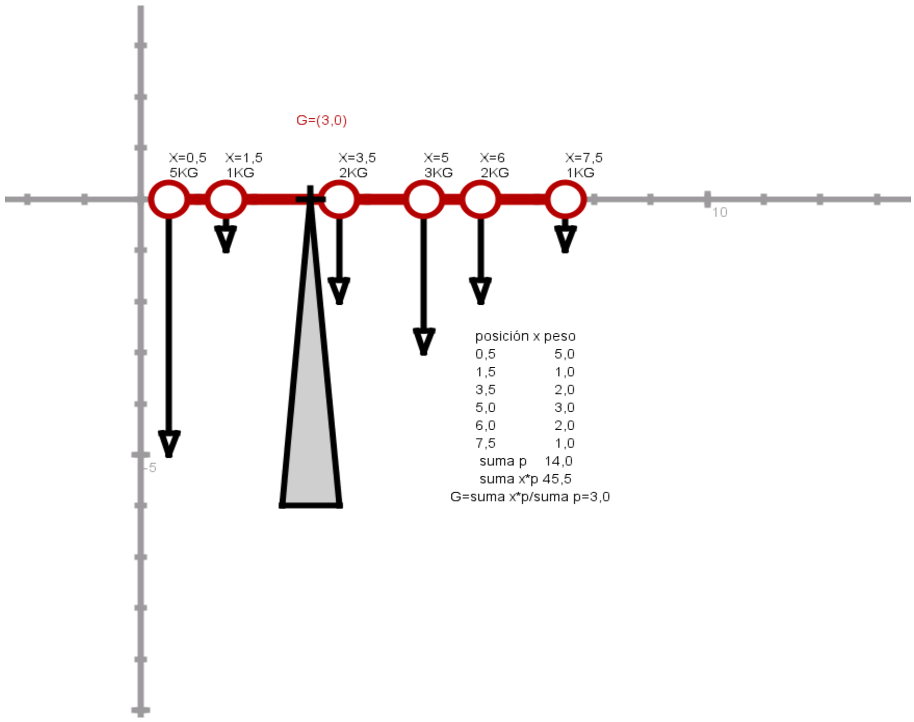
Es sencillo probarlo para un conjunto de masas puntuales en una dimensión. La condición para que un columpio esté equilibrado es que la palanca, el momento, que hacen los pesos a ambos lados del punto de apoyo sea el mismo, es decir, contando con el signo, que sumen cero:

$$\sum P_i*(X_i-G)=0,$$

donde sacando el factor común G: $\sum P_i*X_i - G* \sum P_i = 0$

y despejando G queda, $G= \sum P_i*X_i / \sum P_i$

es decir la posición del punto de equilibrio es la media ponderada de las posiciones de las masas.

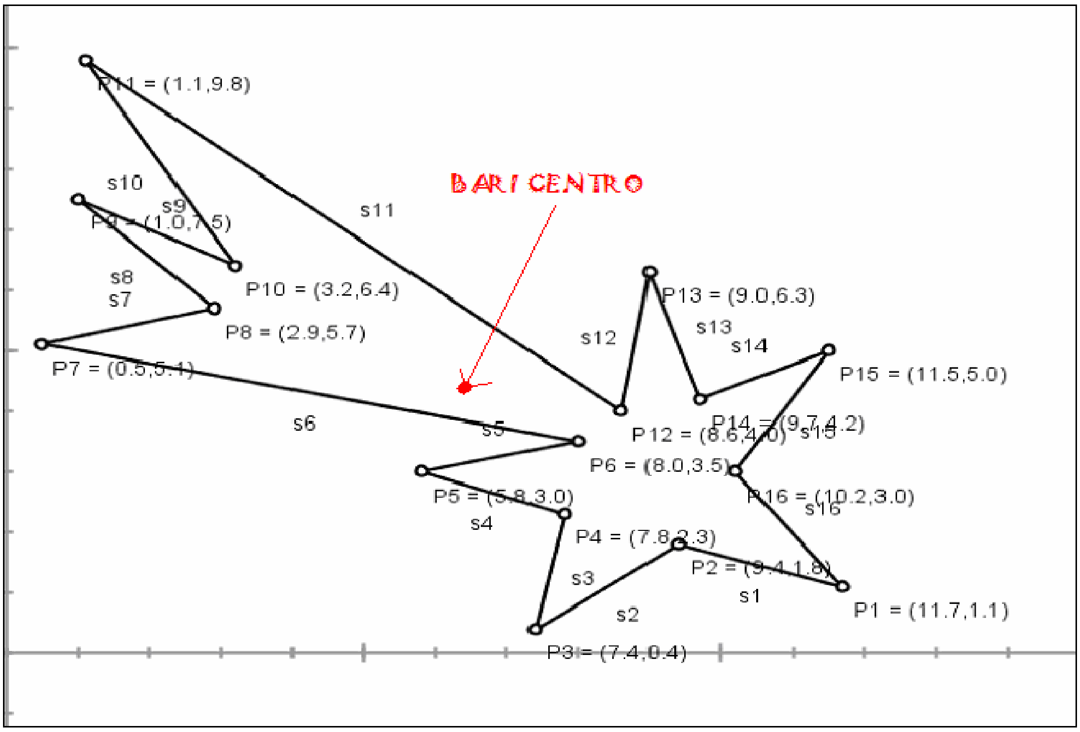


Así pues ya estábamos en condiciones de calcular la posición del baricentro del conjunto de triángulos que componían la estrella.

| TRIANGULOS | Px1 | Py1 | Px2 | Py2 | Px3 | Py3 | media x | media y | áreas | Baricentro global | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T1:P10,P11,P12 | 1,1 | 9,8 | 3,2 | 6,4 | 8,6 | 4 | 4,30 | 6,73 | 6,66 | 6,20 | 4,57 |
| T2:P8,P9,P10 | 1 | 7,5 | 3,2 | 6,4 | 2,9 | 5,7 | 2,37 | 6,53 | 0,93 | | |
| T3:P10,P6,P12 | 3,2 | 6,4 | 8 | 3,5 | 8,6 | 4 | 6,60 | 4,63 | 2,07 | | |
| T4:P8,P5,P7 | 2,9 | 5,7 | 5,8 | 3 | 0,5 | 5,1 | 3,07 | 4,60 | 4,11 | | |
| T5:P10,P8,P6 | 3,2 | 6,4 | 2,9 | 5,7 | 8 | 3,5 | 4,70 | 5,20 | 2,12 | | |
| T6:P12,P13.P14 | 8,6 | 4 | 9 | 6,3 | 9,7 | 4,2 | 9,10 | 4,83 | 1,22 | | |
| T7:P12,P6,P4 | 8,6 | 4 | 8 | 3,5 | 7,8 | 2,3 | 8,13 | 3,27 | 0,31 | | |
| T8:P4,P6,P5 | 7,8 | 2,3 | 8 | 3,5 | 5,8 | 3 | 7,20 | 2,93 | 1,27 | | |
| T9:P12,P4,P14 | 8,6 | 4 | 7,8 | 2,3 | 9,7 | 4,2 | 8,70 | 3,50 | 0,86 | | |
| T10:P16,P4,P14 | 10,2 | 3 | 7,8 | 2,3 | 9,7 | 4,2 | 9,23 | 3,17 | 1,62 | | |
| T11:P15,P16,P14 | 11,5 | 5 | 10,2 | 3 | 9,7 | 4,2 | 10,47 | 4,07 | 1,28 | | |
| T12:P16,P2,P4 | 10,2 | 3 | 9,4 | 1,8 | 7,8 | 2,3 | 9,13 | 2,37 | 1,16 | | |
| T13:P1,P2,P16 | 11,7 | 1,1 | 9,4 | 1,8 | 10,2 | 3 | 10,43 | 1,97 | 1,66 | | |
| T14:P3,P2,P4 | 7,4 | 0,4 | 9,4 | 1,8 | 7,8 | 2,3 | 8,20 | 1,50 | 1,62 | | |
| | | | | | | | | área total | 26,89 | | |

Es decir, redondeando, que las coordenadas del baricentro de mi estrella de belén son:

**G=(6.20, 4.57)**




Ya sabíamos dónde colgar la estrella para que, de aquí en lo sucesivo, se mantenga colgada del techo para guiar a nuestros pequeños Reyes Magos. Porque eso, al igual que las piadosas mentiras contadas en Navidad para mantener vivo un espíritu carcomido por la avaricia y la comercialización, no es más que un sueño, una ilusión.

## -OBJETIVOS

El objetivo de este trabajo es obtener fórmulas sencillas para el baricentro y el área de un triángulo, y obtener el baricentro de una figura compleja a partir de su descomposición en figuras simples.

## -CONCLUSIONES

Se ha establecido un procedimiento para calcular la posición del baricentro de un polígono estrellado. Esto se logra mediante su descomposición en triángulos, el cálculo sencillo del baricentro y el área de cada triángulo, y por último, obteniendo la media de las posiciones de los baricentros ponderada con las áreas de los triángulos.

## -RESULTADOS

Se ha seguido el procedimiento explicado en el apartado “conclusiones” de modo gráfico utilizando el programa “círculo y compás” de libre uso representando y descomponiendo la estrella en triángulos y definiendo la macro baricentro. También se ha compuesto una hoja de cálculo Excel dónde a partir de los vértices se calcula los baricentros de los triángulos y sus áreas. Y, finalmente el baricentro de la estrella, que se corresponde con: (6.5, 4.3).

## -BIBLIOGRAFÍA

♦ “Analytic geometry” por Joseph H. Kindle, 1950, editorial Schaum, propiedad de mi primo.
♦ “Algunas aplicaciones de la mecánica a las matemáticas” por V. A. Upenski, editorial MIR, 1979, de la colección “Lecciones populares de Matemáticas”, propiedad de mi padre.
♦ “Geometría tercer grado” editorial Bruño, 1967, propiedad de mi abuelo.
♦ “El baricentro y la división en dos partes de igual área”, archivo pdf por Néstor Aguilera, del Instituto de Matemáticas de Litoral, Santa Fe, Argentina, propiedad de google.

## -PSEUDÓNIMO

Nuestro trabajo quiere hacer honor a tres grandes matemáticos que, a su vez, ilustran los campos de la ciencia que hemos empleado a la hora de hacer nuestro trabajado baricentro. Así pues, para ellos es, para Descartes, Pitágoras y Euclides.

## Despiteu.