Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Segunda Edición, 2007/2008

TRABAJO: Geometría en dimensión no convencional: sólidos en el hiperespacio

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE BACHILLERATO

AUTORES:

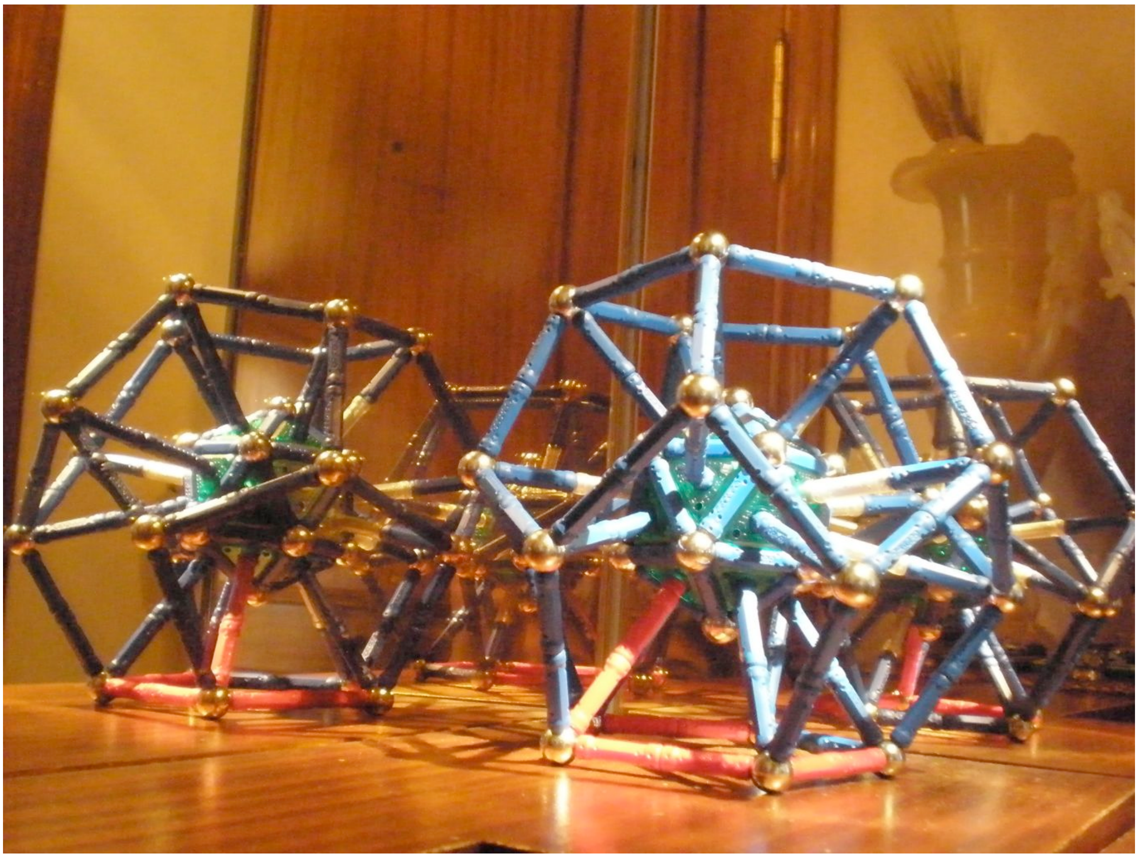
- David Alfaya Sánchez
- Jorge Conzález Ortega
- Moisés Herradón Cueto

TUTORES:

- María Gaspar Alonso-Vega

CENTRO: ESTALMAT (Madrid)

GEOMETRÍA EN DIMENSIÓN NO CONVENCIONAL: SÓLIDOS EN EL HIPERESPACIO



LOS TETRAICOSAEDROS

INTRODUCCIÓN

Vamos a hacer un estudio de la geometría euclídea en espacios de dimensión no convencional, es decir, distinta de 2 y 3. Dada la extensión de este tema, nos vamos a centrar únicamente en el estudio de geometrías de dimensión natural, y especialmente en el análisis de poliedros regulares y semirregulares.

De esta manera el trabajo se centrará en:

- Estudio de los Sólidos Platónicos en dimensión “n”
- Generalización de los Sólidos de Kepler-Poinsot para dimensión “n”
- Análisis sobre el número de Sólidos de Arquímedes en dimensión “n” y generalización de sus características
- Definición de los sólidos de Catalán de dimensión “n” a partir de los sólidos de Arquímedes
- Expresión general que defina cualquier sólido semirregular de dimensión “n”

ANTECEDENTES

Aunque sabemos que existe cierta bibliografía sobre los temas que tratamos, hemos decidido no basarnos en ella para realizar nuestro trabajo, partiendo de cero y únicamente comprobando algunos de nuestros resultados una vez acabado este.

CONCEPTOS PREVIOS DE LA GEOMETRÍA DE DIMENSIÓN MAYOR QUE 3

Dado que la geometría de dimensión mayor que 3 dista en algunos aspectos de la geometría convencional es necesario hacer ciertas aclaraciones y generalizaciones sobre algunos términos que se utilizarán más adelante.

Mediatriz: Lugar geométrico de los puntos del hiperespacio de dimensión n que equidistan de un conjunto de k puntos.
El resultado es un hiperplano de dimensión n-k+1.

Ángulo diedro: Para dimensión n se define a partir de dos rectas o de dos superficies de dimensión n-1 que se corten. En el primer caso, si consideramos un vector director de cada recta, sean $\vec{u}, \vec{v}$. El ángulo α que forman queda definido por:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$$

En el caso de los planos, se consideran los vectores perpendiculares a cada uno de ellos y el ángulo formado por estos es el formado por los planos.

Concavidad-convexidad: Un sólido es convexo cuando sus caras son convexas y todos los ángulos diedros internos al mismo son menores de 180º. En caso contrario el sólido es cóncavo.

Envolvente convexa de un conjunto de puntos: Menor conjunto convexo que contiene a dichos puntos. A partir de esta definición, se puede dar una nueva definición de sólido convexo como aquel en el que la envolvente convexa del conjunto de sus vértices es igual al conjunto de los puntos de su interior o superficie.

Dualidad: A partir de un sólido de dimensión n definimos su dual como el sólido n-dimensional resultante de sustituir las caras de dimensión k del primero por caras de dimensión n-k-1, manteniendo la disposición relativa de las mismas.
A partir de esta definición, podemos considerar las siguientes propiedades:

- Como los ángulos diedros son iguales, los ángulos de las caras y los ángulos diedros del dual son iguales.
- Como los polígonos son regulares y las caras indistinguibles, los vértices del dual son indistinguibles.
- Como las aristas son iguales, los sólidos de las caras del dual son regulares.
- Como el poliedro es convexo, el dual también es convexo.

Teselación: Estructura de sólidos de dimensión n tal que dos sólidos no se solapan, cada sólido comparte cada una de sus caras de dimensión n-1 con otro y el hiperespacio de dimensión n en que están contenidos queda cubierto sin huecos.

Número de teselación: Número máximo de sólidos de dimensión n tal que se pueda formar una estructura tal que dos sólidos no se solapan y cada sólido comparte cada una de sus caras de dimensión n-1 con otro.

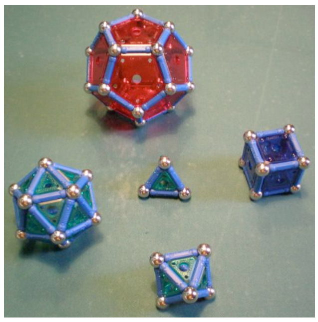
Volumen: Definimos el volumen en dimensión n encerrado entre una gráfica $x_n = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ y el hiperplano $x_n = 0$ como el resultado de la siguiente integral definida:

$$V_n = \int_{X_{n-1}}^{X'_{n-1}} \left(\int_{X_{n-2}}^{X'_{n-2}} \left(... \left(\int_{X_1}^{X'_1} f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) dx_1 \right) ... \right) dx_{n-2} \right) dx_{n-1}$$

SÓLIDOS DE PLATÓN

Definición:
Denominamos sólido de platón o sólido regular, por extensión a los de dimensión 3, a todo aquel sólido n- dimensional que cumpla las siguientes condiciones:

- Si n=2, tomamos los polígonos regulares
- Para n>2, está formado por sólidos de platón de dimensión anterior iguales
- Todas las distancias entre vértices unidos por aristas son iguales
- Todos los ángulos diedros entre caras de dimensión n-1 son iguales
- Los vértices son indistinguibles, es decir, a cada vértice le llega el mismo número de caras de cualquier dimensión



Corolario:
Debido a la regularidad, todo sólido de Platón:

- Tiene simetría radial
- Es inscriptible en una esfera de dimensión n-1

Demostración:

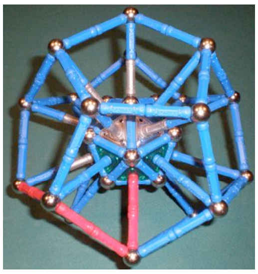
Para dimensión 2, resulta trivial. Tomamos dos aristas consecutivas $\overline{AB}, \overline{BC}$ y sus correspondientes mediatrices $\overline{OM}, \overline{ON}$.

Tomamos ahora la siguiente arista $\overline{CD}$, cuyo punto medio es P. Como $A\hat{B}C = B\hat{C}D$ y $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{BN} = \overline{NC} = \overline{CP} = \overline{PD}$ los triángulos AOM, MOB, BON, NOC, COP y POD son iguales, con lo que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$.

Ahora supongamos que se cumple para todos los sólidos platónicos hasta dimensión n. Los poliedros de dimensión n+1 estarán formados a partir de poliedros de dimensión n. De esta manera, los vértices de cada cara de dimensión n serán equidistantes a la mediatriz de la cara (recta perpendicular por su punto medio).

De forma análoga al caso anterior, tomemos dos caras adyacentes, a cuyos puntos medios llamamos M y N. Como son iguales, sus mediatrices están en el mismo hiperplano de dimensión n, y por tanto se cortan en un punto O. Ahora tomemos una tercera cara, adyacente a una de las anteriores. Sean B y C los puntos medios de las caras de dimensión n-2 comunes a las dos primeras caras y a la segunda y la tercera respectivamente y P el punto medio de la tercera. Ahora podemos actuar de la misma manera que hicimos en 2D, deduciendo así, que $\overline{OM} = \overline{ON} = \overline{OP}$, con lo que todos los vértices de esas caras equidistarán de un centro O.

Corolario 2:
Además, podemos afirmar que el baricentro y el circuncentro coinciden.



Esto se demuestra fácilmente considerando los vectores que van del circuncentro a los vértices. Como todas las distancias son iguales, los módulos son iguales, y como la figura tiene simetría radial, la suma será cero, lo que corresponde a la definición de baricentro.

Propiedad: Si un sólido es regular, su dual también es regular.

Se demuestra de forma directa a partir de las propiedades de los duales descritas anteriormente.

Hipótesis:
En cualquier dimensión n se cumple que si A es dual de B, entonces B es dual de A.

Demostración:
Para probarlo, tomemos un sólido platónico de dimensión n (A). Construimos su dual (B) uniendo los puntos medios de sus caras. A continuación unimos los puntos medios de las caras del dual, es decir, hacemos el dual del dual (C).

Por definición, B es el dual de A. Si, además A fuera el dual de B, entonces C sería semejante a A. Como son concéntricos y los ejes de simetría de B son comunes a ambos, tendríamos que cada punto de C estaría en la perpendicular por A a la cara correspondiente de B, es decir, que el centro de los poliedros (O), cada vértice de C y su correspondiente de A estarían alineados sobre una recta que sería perpendicular a la cara de B y la corta en su centro.

Dado que A, B y C son simétricos, solo es necesario considerar un vértice de A y las caras que contienen a ese vértice para la demostración.

Tomamos un punto X en A. Sean las caras que lo contienen $x_1, x_2, \ldots x_k$ y sean sus centros $Y_1, Y_2, \ldots Y_k$. Por la definición de dual, los puntos $Y_1, Y_2, \ldots Y_k$ están unidos y forman una cara, y, cuyo centro es Z. Sea, además, O el centro del poliedro A.

Por la definición antes dada, X está en A, $Y_1, Y_2, \ldots Y_k$ pertenecen a B y Z es un vértice de C.

Por ser A un sólido platónico, X equidista de $Y_1, Y_2, \ldots Y_k$, es decir, está sobre su mediatriz. Como Z y O también están a la misma distancia de $Y_1, Y_2, \ldots Y_k$, eso significa que también deben estar sobre su mediatriz, con lo que X, Z y O están alineados. Por la definición de mediatriz, se cumple, además, que XO es perpendicular a y, con lo que se demuestra que si A es dual de B, entonces B es dual de A.

Cabe destacar que esta demostración es aplicable a cualquier dimensión del espacio solamente trasladando los puntos al sistema de referencia apropiado.

Ahora, consideraremos los distintos sólidos platónicos, su estructura y un estudio de sus características a partir de la geometría analítica y combinatoria.

HIPERTETRAEDRO

Definición:

Sólido platónico que cumple las siguientes condiciones:
1) Un hipertetraedro de dimensión n tiene n+1 vértices.
2) Cualesquiera i+1 vértices están en el mismo plano i-dimensional y forma un tetraedro de dimensión i.
3) Ningún grupo de i vértices está en el mismo plano k-dimensional si i>k+1.
4) Todos los puntos de un hipertetraedro son equidistantes
5) Todo grupo de i+1 puntos de un tetraedro se pueden inscribir en una superficie esférica de dimensión i-1

Nota: (2) se deduce de que, por (5), los i+1 puntos están sobre la superficie esférica de dimensión i-1 y de que toda esfera de dimensión i-1 está en un plano de dimensión i.
(3) se deduce de (4) y (5), ya que el máximo número de puntos equidistantes sobre una superficie esférica de dimensión i-1 es i+1

Construcción de un hipertetraedro de dimensión n+1 a partir de uno de dimensión n:
Por (1), el nuevo tetraedro tendrá n+2 vértices

Dado que por (2), n+1 vértices cualesquiera de un tetraedro n+1 dimensional están sobre el mismo plano n dimensional y forman un tetraedro de dimensión n, podemos tomar el tetraedro n-dimensional y añadir un vértice más (punto X) para obtener el n+1-dimensional.

Por (3), el otro vértice estará fuera del plano n-dimensional de los otros.

Por (2), cualesquiera 2 puntos del sólido deben estar sobre una recta (plano de dimensión 1), luego el nuevo vértice debe estar unido a todos los anteriores.

Por lo tanto, si S_i es el número de aristas de un tetraedro de dimensión i, tenemos:

$$S_i = S_{i-1} + i$$

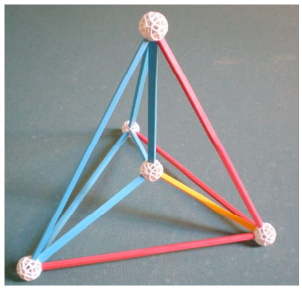
De donde deducimos que:

$$S_i = \sum_{k=1}^{i} k = \frac{i\cdot(i+1)}{2}$$

Una arista es un plano de dimensión 1. Si generalizamos para k, por (1) y (2) tenemos que, si $S_{i,k}$ es el número de caras de dimensión k que tiene el tetraedro de dimensión i, entonces $S_{i,k}$ debe ser el número de subconjuntos de i+1 elementos tomados de k en k, es decir:

$$S_{i,k} = \binom{i+1}{k}$$

Por otro lado, vamos a intentar encontrar la posición del nuevo punto con respecto al tetraedro de dimensión n.



Sabemos que X equidista de los otros n+1 puntos, luego X está sobre la mediatriz de los otros puntos. Entonces, X está sobre una recta perpendicular al plano n-dimensional formado por los otros n+1 puntos. Como el centro de la superficie esférica a la que pertenecen los n+1 puntos está sobre su mediatriz (es su mediatriz en el espacio de dimensión n) la recta que buscamos es la perpendicular al plano por ese centro.

Ahora, sean los vértices del hipertetraedro:

$$X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1}$$

Si tomamos que la última coordenada de los k primeros vértices es cero, tenemos que el vértice k+1 comparte las k-1 primeras coordenadas con el circuncentro de los k primeros vértices, ya que ambos están sobre la misma perpendicular al plano $x_n = 0$.

Por otro lado, como el hipertetraedro es un poliedro regular, su circuncentro coincide con el baricentro. Llamemos a este punto G. Sabemos, por propiedad del baricentro, que la suma de los siguientes vectores libres es el vector nulo:

$$\overrightarrow{GX_1} + \overrightarrow{GX_2} + \ldots + \overrightarrow{GX_k} = \overrightarrow{O}$$

Si descomponemos cada uno de los vectores anteriores en cada una de las direcciones del hiperespacio tenemos que la suma de todas las componentes debe ser 0. Por lo tanto tenemos que:

$$\overrightarrow{GX_{1,y}} + \overrightarrow{GX_{2,y}} + \ldots + \overrightarrow{GX_{k,y}} = \overrightarrow{O}$$

Además, como los k-1 primeros vértices están en el mismo plano de dimensión k-2 (el plano $x_k = x_{k-1} = 0$), si la coordenada k-ésima del punto G es y y la de el k-ésimo punto es x_{k-1} , entonces tenemos que la componente del eje x_{k-1} de los k-1 primeros puntos tiene sentido contrario a la del k-ésimo punto. Por ello, podemos escribir:

$$\left|\overrightarrow{GX_{1,y}}\right| + \left|\overrightarrow{GX_{2,y}}\right| + \ldots + \left|\overrightarrow{GX_{k-1,y}}\right| = \left|\overrightarrow{GX_{k,y}}\right|$$

Por otro lado, dado que G coincide con el circuncentro, y que, como ya hemos dicho, los k-1 primeros vértices están en el mismo plano de dimensión k-2 tenemos que todas las componentes de estos puntos son iguales entre sí e iguales a y .

De esta manera podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\overrightarrow{GX_{1,y}}\right| + \left|\overrightarrow{GX_{2,y}}\right| + \ldots + \left|\overrightarrow{GX_{k-1,y}}\right| = (k-1)\cdot y \\ \left|\overrightarrow{GX_{k,y}}\right| = \left|\overrightarrow{OX_{k,y}}\right| - \left|\overrightarrow{OG_y}\right| = x_{k-1} - y \end{array}\right\}$$

De donde obtenemos que:

$$(k-1)\cdot y = x_{k-1} - y$$

Es decir, que:

$$x_{k-1} = k\cdot y$$

Ahora, a partir de las ecuaciones que ya teníamos del hipertetraedro, podemos deducir una fórmula recurrente para el n-ésimo vértice:

Sea el tetraedro de dimensión n-1 con n vértices. La distancia del n-ésimo al n-1-ésimo es 1, y como ya hemos dicho antes, las n-3 primeras coordenadas son iguales, con lo que tenemos que:

$$\left(x_{k-1} - \frac{x_{k-1}}{k}\right)^2 + x_k^2 = 1$$

Y despejando x_k queda:

$$x_k = \sqrt{1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \cdot x_{k-1}^2}$$

Sustituyendo x_{k-1} por su valor tenemos:

$$x_k = \sqrt{1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \cdot \left(1-\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^2 \cdot x_{k-2}^2\right)} = \sqrt{1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 + \left(\frac{k-2}{k}\right)^2 \cdot x_{k-2}^2}$$

Sustituyendo repetidas veces el valor de la x y tomando $x_1 = 1$ llegamos a la expresión:

$$x_k = \frac{\sqrt{k^2-(k-1)^2+(k-2)^2-\ldots+(-1)^{k-2}\cdot 2^2+(-1)^{k-1}}}{k} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\cdot i^2}}{k}$$

Si tomamos los sumandos dos a dos, tenemos una diferencia de cuadrados. Sabemos que la diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia, pero como tomamos términos consecutivos, la diferencia es 1, con lo que el sumatorio inicial se transforma en una suma de naturales consecutivos. Existen entonces dos casos:

Si k es par, entonces hay un número entero de parejas y podemos expresar x como:

$$x_k = \frac{\sqrt{\left(k^2-(k-1)^2\right)+\ldots+\left(2^2-1^2\right)}}{k} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} i}}{k} = \frac{\sqrt{\frac{k\cdot(k+1)}{2}}}{k} = \sqrt{\frac{k+1}{2\cdot k}}$$

Si k es impar, tenemos:

$$x_k = \frac{\sqrt{\left(k^2-(k-1)^2\right)+\ldots+\left(3^2-2^2\right)+1^2}}{k} = \frac{\sqrt{\sum_{i=2}^{k} i+1}}{k} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} i}}{k} = \frac{\sqrt{\frac{k\cdot(k+1)}{2}}}{k} = \sqrt{\frac{k+1}{2\cdot k}}$$

De esta manera, los vértices del hipertetraedro quedan definidos así:

El vértice X_k de un hipertetraedro de dimensión n tiene de coordenadas:

$$X_k = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, \ldots, \frac{x_i}{i+1}, \ldots, \frac{x_{k-1}}{k}, x_k, \overbrace{0,\ldots,0}^{n-k-1}\right)$$

Donde $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son los k primeros de la sucesión antes definida.

Si sustituimos cada término por su valor obtenemos:

$$X_k = \left(\overbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \ldots,}^{i-1} \frac{1}{\sqrt{2\cdot i\cdot(i+1)}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2\cdot k\cdot(k-1)}}, \sqrt{\frac{k+1}{2\cdot k}}, \overbrace{0,\ldots,0}^{n-k-1}\right)$$

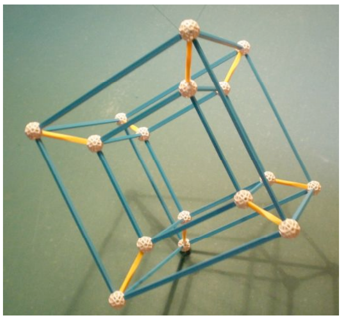
HIPERCUBO

Definición:

Sólido regular definido a partir de la estructura del cuadrado de 2D y el cubo de 3D y que cumple que:

1) Dos aristas o dos caras de dimensión n-1 cualesquiera siempre son paralelas o perpendiculares
2) Las caras de dimensión k son hipercubos de dimensión k.

Consideramos que un cubo de dimensión n se forma duplicando el cubo de dimensión n-1 y uniendo cada par de vértices con una arista. De esta forma nos aseguramos que todas las aristas sean perpendiculares, ya que todas las de las caras lo son y las nuevas las tomamos perpendiculares al espacio de dimensión n-1 que contenía al hipercubo anterior. Consideramos un punto como cubo de dimensión 0. De esta manera, en general, las coordenadas de los vértices de un hipercubo de dimensión n son $\left(\overbrace{\pm 1,\pm 1,\ldots,\pm 1}^{n}\right)$ y el número de vértices es, por tanto, 2^n.



A partir de esta construcción podemos dar una nueva descripción de la estructura del hipercubo. El hipercubo estaría formado por una cara de dimensión n-1 inicial alrededor de la cual se colocaría un anillo de hipercubos de dimensión n-1 tales que cada uno de ellos comparte exactamente una cara de dimensión n-2 con el hipercubo inicial. Finalmente, cada una de las caras de este anillo comparte otra cara de dimensión n-2 con un último hipercubo, cuyas coordenadas son las mismas que la del inicial a excepción de la última, que cierra el conjunto.

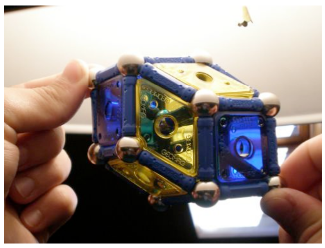
Si escribimos en una tabla las caras de distintas dimensiones en un cubo de dimensión n, tendremos, para los primeros hipercubos:

Cubos/Caras	Caras de dimensión 0	1	2	3	4	5	6	7
Cubo de dimensión 0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0
2	4	4	1	0	0	0	0	0
3	8	12	6	1	0	0	0	0
4	16	32	24	8	1	0	0	0
5	32	80	80	40	10	1	0	0
6	64	192	240	160	60	12	1	0
7	128	448	672	560	280	84	14	1

Si en vez de tomar el número total de caras, tomamos el número de caras que se unen en cada vértice, tenemos que:

Cubos/Caras por vértice	Caras de dimensión 0	1	2	3	4	5	6	7
Cubo de dimensión 0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Para cada cara de dimensión m en un cubo de dimensión n, llamamos al número de caras por vértice $C(n,m)$, y tenemos que $C(n,m) = C(n-1,m) + C(n-1,m-1)$, puesto que al pasar de una dimensión a la siguiente en cada vértice están las caras que había en la dimensión anterior más las que se forman al trasladar las $m-1$-caras y unirlas por una cara de dimensión m. Por esto, se sigue que $C(n,m) = \binom{n}{m}$. Luego, si llamamos $T(n,m)$ al número



total de caras de dimensión m en un n-hipercubo, se sigue que $T(n,m) = \frac{C(n,m)\cdot 2^n}{2^m} = \binom{n}{m}\cdot 2^{n-m}$, al ser 2^n el número de vértices que tiene el hipercubo y 2^m el número de vértices que tiene cada cara.

HIPEROCTAEDRO

Definición:
Sólido platónico dual del hipercubo.

Propiedades:
Como el hipercubo es el dual del hiperoctaedro, y el primero tiene, en dimensión n, n caras de dimensión n-1 por vértice, tenemos que el hipertetraedro tiene n vértices en cada cara de dimensión n-1.

Si consideramos un vértice del hipercubo, cada cara de dimensión n-1 tiene, a su vez n-1 caras de dimensión n-2 por vértice, que debe compartir con algunas de las otras caras de dimensión n-1 que hay en el vértice. Por tanto, y dado que no puede compartir dos con la misma cara, cualesquiera dos caras de dimensión n-1 que compartan un vértice comparten una cara de dimensión n-1.

De esta manera, al hacer el dual tenemos que si dos caras de dimensión n-1 están siempre unidas por una cara de dimensión 2 en el hipercubo, entonces dos vértices cualesquiera de una cara del hiperoctaedro deben estar unidos por una cara de dimensión 1, es decir, una arista.

Uniendo las dos premisas anteriores obtenemos que las caras de dimensión n-1 del hiperoctaedro de dimensión n tal como lo hemos definido deben ser hipertetraedros de dimensión n-1.

En cuanto a su estructura, podemos definirla de nuevo a partir de la del hipercubo. Si consideramos la descripción del apartado anterior, veremos que en dimensión n, el dual de la cara inicial y la de cierre son dos puntos. Dado que las caras del anillo que las une comparten exactamente una cara de dimensión n-2 con el inicial, y que son perpendiculares a esta su figura dual equivale al dual de las caras de dimensión n-2 de la cara inicial, es decir, a un hiperoctaedro de dimensión n-1.

Además, como las caras inicial y de cierre comparten exactamente una cara de dimensión n-2 con cada cara del anillo, al hacer el dual resulta que los dos vértices correspondientes están unidos mediante una arista con cada uno de los vértices del hiperoctaedro inicial.

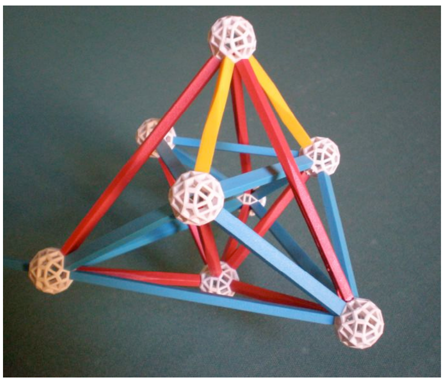
Podemos establecer un modelo de formación del octaedro a partir de estas bases:

- El hipercubo de dimensión n tiene 2n caras, luego el hiperoctaedro tiene 2n vértices.
- El hipercubo tiene 2^n vértices, luego el hiperoctaedro tiene 2^n caras.

A partir de esto, se puede deducir que el paso de un octaedro de dimensión n a otro de dimensión n+1 consiste en añadir 2 vértices y conectarlos a los ya existentes de forma que se duplique el número de caras.

Podemos, entonces, generar un modelo de hiperoctaedro que cumpla todas las premisas.

Un hiperoctaedro de dimensión n y lado 1 viene definido por las siguientes características:



Las coordenadas del m-ésimo vértice son:

$$A_m = \left(\underbrace{0,\dots,0}_{\lceil m/2 \rceil - 1}, \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{2}}, \underbrace{0,\dots,0}_{n-\lceil m/2 \rceil} \right)$$

Dos vértices A_i, A_j están unidos por una arista si y solo si:

$$\lceil i/2 \rceil \neq \lceil j/2 \rceil$$

Con esta configuración, se cumple que el hiperoctaedro tiene 2n vértices.

La prueba de que tiene 2^n caras se realiza por inducción:

Para dimensión 2 es trivial, ya que el número de caras es igual al número de aristas, que es 4.

De la misma manera, el número de caras en dimensión 3 es 8, que también se cumple.

Supongamos que en dimensión n se cumple. En dimensión n+1, las caras de dimension n serán las que se formen uniendo una cara de dimensión n-1 del hiperoctaedro de dimensión n con uno de los vértices nuevos.

Como la figura es simétrica y hay dos vértices nuevos:

$$N^{\mathrm{o}}\, caras_{n+1} = 2 \cdot N^{\mathrm{o}}\, caras_n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

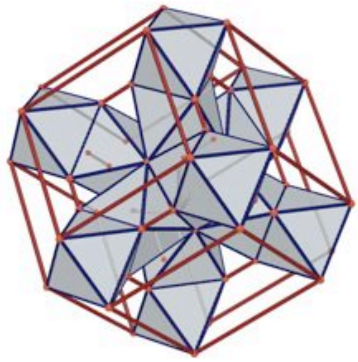
Como queríamos demostrar.

EL TETRAICOSAEDRO

Definición:
Sólido platónico de dimensión n>3 cuyas caras son hiperoctaedros de dimensión anterior.

Propiedades:
Más adelante demostraremos que, en realidad, existe un único sólido de estas características, que aparece en dimensión 4 y cuyas caras son octaedros de dimensión 3. Partiendo de esta base vamos a deducir las características de este cuerpo.

En primer lugar, podemos ver que el número de octaedros por vértice debe ser menor o igual que siete, ya que este es el número máximo de octaedros iguales de dimensión 3 que pueden situarse de forma que sean disjuntos dos a dos y compartan un mismo vértice.



Por otro lado, sabemos que el dual de este sólido debe ser otro sólido regular. Como el tetraicosaedro tiene menos de 8 caras por vértice, entonces el sólido dual debe tener menos de 8 vértices por cara, es decir, sus caras deben ser tetraedros u octaedros.

Es imposible que su dual esté formado por tetraedros. Si se diera el caso, en cada vértice del tetraicosaedro tendría 4 octaedros que deberían compartir una cara de dimensión 2 dos a dos, y esto es geométricamente imposible.

Por tanto, su dual está formado por octaedros, es decir, es un tetraicosaedro. Como hemos dicho que solo hay uno, deducimos, por tanto, que debe ser autodual.

Además, como hay 6 octaedros por vértice, cada uno de ellos debe de compartir una cara de dimensión 2 con otro.

Con estas dos condiciones podemos analizar una posible estructura para el tetraicosaedro.

En primer lugar, consideramos un octaedro inicial. Adyacentes a cada una de sus caras debe haber, por lo anteriormente dicho otros 8 octaedros, y dado que con esa configuración solo se tienen 5 octaedros en cada vértice es necesario que haya otro octaedro más por cada vértice, que sea además adyacentes a cada uno de los correspondientes de las caras.

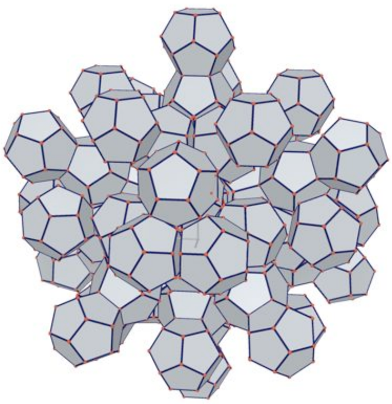
Operando de igual manera en cada uno de los vértices que vamos formando, encontramos una estructura posible para el tetraicosaedro formada por 5 anillos de octaedros:

- En el primer anillo, el octaedro inicial.
- Alrededor de este, adyacentes a sus lados, 8 octaedros.
- En los huecos del segundo anillo, y compartiendo un vértice con el octaedro inicial y cuatro de sus caras con octaedros del segundo anillo, 6 octaedros.
- Un tercer anillo con otros 8 octaedros que comparten tres de sus caras con los del tercer anillo, tres de sus caras entre ellos, una cara con los del segundo anillo y otra con el del quinto.
- En el quinto anillo, un octaedro de cierre que comparte todas sus caras con los octaedros del cuarto anillo.

El criterio de dualidad se cumple a la perfección, ya que nuestro sólido tiene 24 caras de dimensión 3, 36 caras de dimensión 2, 36 aristas y 24 vértices. Además, se comprueba de forma sencilla que cumple todos los criterios de regularidad propios de los sólidos platónicos, con lo que corresponde al tetraicosaedro.

HIPERDODECAEDRO

Definición:
Sólido platónico de dimensión n>3 cuyas caras son hiperdodecaedros de dimensión anterior.



Propiedades:
Al igual que con el tetraicosaedro, más adelante demostraremos que, en realidad, existe un único sólido de estas características, que aparece en dimensión 4 y cuyas caras son dodecaedros de dimensión 3. Partiendo de esta base vamos a deducir las características de este cuerpo.

En primer lugar, podemos ver que el número de dodecaedros por vértice debe ser exactamente cuatro, ya que este es el número máximo de dodecaedros iguales de dimensión 3 que pueden situarse de forma que sean disjuntos dos a dos y compartan un mismo vértice.

De esta manera, sabemos que su dual deberá ser un sólido formado a partir de tetraedros de dimensión 3. Por ello deducimos que los cuatro dodecaedros que se junten en cada vértice deberán ser adyacentes dos a dos.

De forma análoga al caso del tetraicosaedro encontramos una estructura posible para el hiperdodecaedro formada por 9 anillos de dodecaedros:

- En el primer anillo, un dodecaedro inicial
- Adyacentes a las caras del inicial, 12 dodecaedros
- En los vértices del inicial, y adyacentes a los del segundo anillo, 20 dodecaedros
- En los huecos dejados por el segundo y el tercer anillo, 12 dodecaedros más

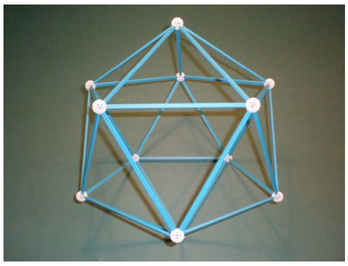
- Un anillo central formado por 30 dodecaedros, resultado de la siguiente relación:
    - Cada uno de los 20 dodecaedros de los vértices tiene 3 caras sin compartir
    - Colocamos un dodecaedro en el 5º anillo uniendo dos caras de dodecaedros del 3º, cubriendo, además, los huecos de los dodecaedros del 4º anillo
- Sexto anillo simétrico del 4º, con 12 dodecaedros
- Séptimo anillo cubriendo los huecos del sexto con 20 dodecaedros
- Octavo anillo de 12 dodecaedros simétrico del 2º
- Finalmente en el noveno anillo, el dodecaedro de cierre

Nuestra figura resultante tiene, por tanto, 120 caras de dimensión 3, 1200 caras de dimensión 2, 1200 aristas y 600 vértices.

Dada la complejidad de encontrar un patrón en las ecuaciones analíticas de los distintos elementos de este sólido, optamos por hallarlas mediante el programa informático indicado en el anexo correspondiente.

HIPERICOSAEDRO

Definición:
Sólido platónico dual del hiperdodecaedro.



Propiedades:
- Al igual que el hiperdodecaedro, solo existe uno, en dimensión 4
- Las caras de dimensión 3 de ese sólido son tetraedros
- Tiene 20 tetraedros por vértice
- N.º de caras de dimensión 3: 600
- N.º de caras de dimensión 2: 1200
- N.º de aristas: 1200
- N.º de vértices 120

Al igual que el hiperdodecaedro, debido a la complejidad de hallar los elementos, los hemos hallado a partir de los del hiperdodecaedro, usando el programa correspondiente indicado en el apartado de anexos.

DEMOSTRACIÓN DE QUE NO EXISTEN MÁS SÓLIDOS DE PLATÓN

En primer lugar, vamos a demostrar que para dimensión n, no existen sólidos que tengan menos de n caras por vértice.

Como estamos considerando poliedros no completos, tenemos que dos caras cualesquiera se encuentran en dos hiperplanos de dimensión n-1 distintos.

Analíticamente la ecuación de estos planos es una ecuación lineal de n incógnitas. El número mínimo de caras necesarias en cada vértice será el número mínimo de planos necesarios para definir el vértice mediante su intersección. De esta manera, las coordenadas del vértice serán las soluciones del sistema de ecuaciones formado por las k ecuaciones de los planos, es decir, un sistema de k ecuaciones con n incógnitas.

Como el vértice existe y es único, tenemos que el sistema debe ser compatible determinado, es decir, que $k \geq n$.

Además, como ya hemos visto, el número máximo de caras de dimensión n-1 viene dado por el número máximo de esas caras que pueden distribuirse alrededor de un vértice sin solapamientos en dimensión n-1. De esta manera, podemos realizar una acotación del número máximo de caras por vértice en función del estudio de las teselaciónes de las caras de dimensión anterior.

Por otro lado, el número de caras por vértice no puede tomar valores cualesquiera. Dado que su dual es otro sólido platónico, el número de caras por vértice será igual al número de vértices por cara de dimensión anterior, que solo puede tomar una serie de valores fijos.

En dimensión 4, por tanto, solo puede haber sólidos formados por 4, 6, 8, 12 o 20 caras por vértice.

Consideremos ahora los cuerpos en dimensión 4:
- Formados por tetraedros:
    - Con 4: Hipertetraedro 4D
    - Con 6: En el apartado tetraicosaedro vimos la imposibilidad de este caso
    - Con 8: Hiperoctaedro 4D
    - Con 12: Se reduce al caso de que haya 4 icosaedros por vértice
    - Con 20: Hipericosaedro 4D
- Formados por cubos:
    - Con 4: Hipercubo 4D
    - Con 6: Implicaría que su dual tuviera 8 octaedros por vértice, y el máximo sin que se produzca teselación son 7
    - Con 8: Se produce una teselación
- Formados por octaedros:
    - Con 4: En el apartado tetraicosaedro vimos la imposibilidad de este caso
    - Con 6: Tetraicosaedro 4D
    - Con 8: Excede al número máximo de octaedros por vértice (7)

- Formados por dodecaedros:
    - Con 4: Hiperdodecaedro 4D
    - Más de 4: El número de dodecaedros supera al de teselación
- Formados por icosaedros:
    - Como el número de teselación es 3 no existen en 4D

<u>Para cuerpos de dimensión 5:</u>

- Formado por hipertetraedros:
    - Con 5: Hipertetraedro 5D
    - Con 8: Imposible, ya que su dual no puede existir
    - Con 16: Hiperoctaedro 5D
    - Con 24 o más: Imposible, ya que su dual no puede existir
- Formado por hipercubos:
    - Con 5: Hipercubo 5D
    - Con 8: El dual sería una figura que tuviera 16 hiperoctaedros por vértice. Dado que el hiperoctaedro tiene mayor ángulo entre caras que el cubo y que 16 de estos últimos teselan, es imposible que pueda haber 16 hiperoctaedros por cara y, por tanto, este sólido es igualmente imposible
    - Con 16: Teselación
- Formado por hiperoctaedros:
    - Con 5: Cada cara de dimensión n-1 del hiperoctaedro tendría que compartir todas las caras de dimensión n-2 de un vértice con otros hiperoctaedros. Las caras son hiperoctaedros de dimensión 4, que tienen como caras de 3D 8 tetraedros por vértice. Como tienen que compartirlos todos y no pueden compartir más de uno con otra cara (ya que entonces las caras serían paralelas) tiene que haber como mínimo 9 octaedros por cara.
    - Con 8: Mismo criterio que el caso anterior.
    - Con 16 o más: El ángulo entre caras es demasiado grande. No permite esta posibilidad.
- Formado por tetraicosaedros:
    - Con 5: El criterio es el mismo que para el hiperoctaedro. Tendría que haber, como mínimo, 8 hiperoctaedros por cara
    - Con 8: Su dual tendría 24 hiperoctaedros por vértice, lo cual ya hemos visto que es imposible
    - Con 16: Su dual tendría 24 hipercubos por cara. Imposible
    - Más de 16: Su dual tendría 24 sólidos con más de 16 vértices. Si no caben 24 hipercubos, no puede caber ninguno de estos sólidos
- Formado por hiperdodecaedros:
    - La demostración de este caso aparece en el apartado de los sólidos de Arquímedes
- Formado por hipericosaedros:
    - Cada cara de dimensión n-1 del hipericosaedro tendría que compartir todas las caras de dimensión n-2 de un vértice con otros hiperoctaedros. Cada cara de dimensión n-1 tiene 20 tetraedros por vértice. Como tienen que compartirlos todos y no pueden compartir más de uno con otra cara (ya que entonces las caras serían paralelas) tiene que haber como mínimo 21 hipericosaedros por cara, es decir, que su dual sería un sólido con más de 21 vértices por cara y que tuviera 120 caras por vértice. Pero las caras de tal vértice serían mayores que las de un cubo, y tendría más de 16 (que es el número de teselación de éste), con lo que no podría formarse. Dado que ninguno de los duales puede existir, no existe ningún sólido de estas características.

<u>Para dimensión mayor que 5:</u>

- Formado por hipertetraedros de dimensión n:
    - Con n+1 hipertetraedros de n-D: hipertetraedro de dimensión n+1
    - Con 2n hipertetraedros de n-D: Imposible, ya que no existe su dual
    - Con 2^n hipertetraedros de n-D: hiperoctaedro de dimensión n+1
- Formado por hipercubos de dimensión n:
    - Con n+1 hipercubos de n-D: hipercubo de dimensión n+1
    - Con 2n hipercubos de n-D: Imposible, ya que no existe su dual
    - Con 2^n hipercubos de n-D: Teselación
- Formado por hiperoctaedros de dimensión n:
    - Con n+1 hiperoctaedros de n-D: Cada hiperoctaedro de dimensión n tiene 2^{n-1} caras de dimensión n-1 por vértice que debe compartir con otros hiperoctaedros. Luego por lo menos tiene que haber $2^{n-1}+1$ hiperoctaedros por vértice. Luego la figura es imposible.
    - Con $2n$ hiperoctaedros de n-D: Como $n \geq 5 \Rightarrow 2^{n-1}+1 > 2n$
    - Con 2^n hiperoctaedros de n-D: Imposible, ya que el ángulo entre caras del hiperoctaedro de n-D es siempre mayor que el ángulo entre caras del hipercubo de n-D, y 2^n hipercubos de n-D teselan.

SÓLIDOS DE ARQUÍMEDES

Definición:
Denominamos sólido de Arquímedes, por extensión a los de dimensión 3, a todo aquel sólido n- dimensional, con n>2 que cumpla las siguientes condiciones:

- Está formado por sólidos de platón de dimensión anterior, no todos iguales
- Todas las distancias entre vértices unidos por aristas son iguales
- Todos los ángulos diedros entre dos caras de dimensión n-1 del mismo tipo son iguales
- Los vértices son indistinguibles, es decir, a cada vértice le llega el mismo número de caras de cualquier dimensión en el mismo orden

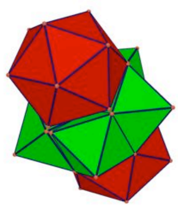
Propiedades:
Debido a las similitudes en la definición de la estructura de los sólidos de Arquímedes y los de Platón, se pueden probar, con demostraciones análogas a las de los sólidos regulares, las siguientes afirmaciones:

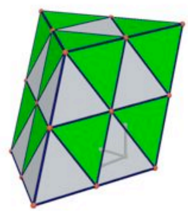
- Tiene simetría radial
- Es inscriptible en una esfera de dimensión n-1
- El baricentro y el circuncentro coinciden

Dada la gran cantidad de sólidos de Arquímedes presentes en dimensión mayor que 3, vamos a optar por hacer un análisis de los mismos únicamente cuantitativo, acotando el número de ellos que existe para cada dimensión y determinando algunas características básicas de los mismos. Por otro lado, usando el método general para obtener sólidos regulares y semirregulares que se describe al final del trabajo se pueden obtener más características de estos sólidos, así como discriminar aquellos que, pese a entrar teóricamente dentro de las acotaciones que vamos a realizar, no se consideran como sólidos de Arquímedes por no cumplir alguna de las características que lo definen (como, por ejemplo, la convexidad).

Para estudiar los de dimensión 4, vamos a estudiar las teselaciones de los cuerpos de dimensión 3. Se puede comprobar fácilmente que como máximo en un vértice se pueden incluir:

- 3 icosaedros + 5 tetraedros → 5 sólidos
- 2 icosaedros + 8 tetraedros → 7 sólidos
- 2 icosaedros + 5 octaedros → 4 sólidos
- 2 icosaedros + 2 octaedros + 5 tetraedros → 5+4=9 sólidos
- 2 icosaedros + 1 octaedro + 7 tetraedros → 7 sólidos
- 1 icosaedro + 6 octaedros → 4 sólidos
- 1 icosaedro + 15 tetraedros → 13 sólidos
- 1 icosaedro + 5 octaedros + 5 tetraedros → 5+5+5+5+4=24 sólidos
- 6 octaedros + 8 tetraedros → 8+8+8+8+7+6=45 sólidos





A partir de todas las combinaciones posibles de sólidos provenientes de las estructuras anteriores deducimos que se pueden formar, como mucho, 118 sólidos de Arquímedes. Ahora habría que probar exactamente cuántos de estos cuerpos realmente cierran. Más adelante, cuando veamos el método general para describir sólidos regulares y semirregulares en dimensión n veremos que estos sólidos se pueden detectar mediante el criterio del ángulo. Dado que sería un arduo trabajo comprobar los 118 casos en busca de aquellos que no pasen esta prueba hemos optado por incluir únicamente esta cota en el trabajo.

Para acotar el número de sólidos de Arquímedes en dimensión n mayor que 5 también nos vamos a basar en los números de teselación de los sólidos platónicos de dimensión n-1. Se puede realizar un análisis métrico de estos sólidos, determinando el ángulo entre sus caras para encontrar este número, pero nosotros vamos a optar por otro tipo de acotación basada en el volumen que, pese a ser más grosera, resulta más adecuada para nuestros fines.

En primer lugar, vamos a considerar el volumen de la esfera en 4D:

$$V_4 = 2\cdot\int_0^R V_3(r)dt = 2\cdot\int_0^R \frac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3}dt = 2\cdot\int_0^R \frac{4\cdot\pi\cdot\sqrt{R^2-t^2}^{\,3}}{3}dt = \frac{8\cdot\pi\cdot R^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4(\alpha)d\alpha =$$

$$= \frac{8\cdot\pi\cdot R^4}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2\cdot R^4}{2}$$

En cuanto al tetraedro:

$$V_4 = \int_0^H V_3 dt = \int_0^H \frac{\sqrt{2}}{12}\cdot l^3 dt = \int_0^L \frac{\sqrt{2}}{12}\cdot l^3\cdot\sqrt{\frac{5}{8}}dl = \frac{\sqrt{5}}{96}\cdot L^4$$

Ahora, tomamos una esfera con vértice central O y radio L, e intentamos meter en ella el máximo número de tetraedros posibles, de forma que todos sus vértices estén en la superficie esférica menos uno, que esté en el centro. Este número, k, es el número de teselación del tetraedro para dimensión 4, y puede acotarse con la relación entre el volumen del tetraedro y el de la esfera:

$$V_{tetraedros} < V_{esfera}$$

$$K\cdot V_{tetraedro} < V_{esfera} \Rightarrow K < \frac{V_{esfera}}{V_{tetraedro}} = \frac{\frac{\pi^2}{2}\cdot L^4}{\frac{\sqrt{5}}{96}\cdot L^4} = \frac{48\cdot\pi^2\cdot\sqrt{5}}{5} < 600$$

De hecho:

$$\frac{48\cdot\pi^2\cdot\sqrt{5}}{5}\approx 211{,}86$$

Con lo que demostramos que es imposible que haya más de 211 tetraedros de dimensión 4 por vértice, es decir, que en dimensión 5 es imposible que existan el dual del sólido formado por hiperdodecaedros, ya que tendrían 600 tetraedros por vértice. Además, como el hipertetraedro es el sólido platónico de dimensión 4 con menor volumen, tenemos que es imposible que exista ningún sólido cuyas caras fueran hiperdodecaedros, ya que entonces su dual tendría 600 sólidos por vértice, y dado que cualquier sólido es mayor que el hipertetraedro eso resultaría imposible.

Ahora, vamos a generalizar para dimensión n. De esta forma tendremos un criterio para acotar el número de teselación de un determinado sólido.

Volumen de la hiperesfera:

Consideremos el volumen de la esfera:

$$V_n = 2\int_0^R V_{n-1}dx_n$$

Sabemos que el volumen es de la forma:

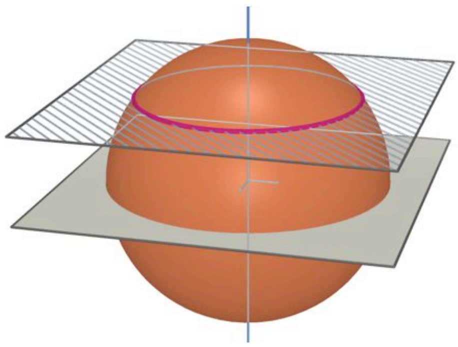
$$V_i = k_i\cdot R^i$$

Luego tenemos:

$$V_n = 2\int_0^R k_n\cdot r^{n-1}dx_n = 2k_n\int_0^R r^{n-1}dx_n = 2k_n\int_0^R \sqrt{R^2-x_n^2}^{\,n-1}dx_n$$

Haciendo el cambio:

$$\left.\begin{array}{l} x_n = R\cdot sen(\alpha) \\ dx_n = R\cdot\cos(\alpha)\cdot d\alpha \end{array}\right\}$$



Tenemos:

$$V_n = 2k_nR^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(\alpha)d\alpha$$

Ahora, aplicando la fórmula de Wallis:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(\alpha)d\alpha = I_n \Rightarrow V_n = 2\cdot k_{n-1}\cdot I_nR^n$$

Con lo que:

$$V_n = 2^n\cdot\prod_{i=1}^{n}(I_i)\cdot R^n$$

Ahora, I se define como:

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\ldots 1}{n\cdot(n-2)\cdot\ldots 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{n par} \\ \dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\ldots 2}{n\cdot(n-2)\cdot\ldots 1} & \text{n impar} \end{cases}$$

Es decir:

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{n!}{\left(2^{\frac{n}{2}}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{n par} \\ \dfrac{\left(2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2}{n!} & \text{n impar} \end{cases}$$

Si n es par, se demuestra por inducción que:

$$\prod_{i=1}^{n}(I_n)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

Desarrollamos n+2:

$$\prod_{i=1}^{n+2}(I_n)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!}\cdot I_{n+1}\cdot I_{n+2}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^n\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!}\cdot\frac{\left(2^{\frac{n}{2}}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+2)!}{\left(2^{\frac{n+2}{2}}\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)!\right)^2}\cdot\frac{\pi}{2}=$$

$$=\frac{\frac{\pi^{\frac{n+2}{2}}}{2}}{2^n\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)!}\cdot\left(\frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}+1}}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!\cdot(n+2)}{\left(\frac{n}{2}+1\right)!}=\frac{\frac{\pi^{\frac{n+2}{2}}}{2}}{2^n\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)!}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{n+2}{\frac{n+2}{2}}=\frac{\pi^{\frac{n+2}{2}}}{2^{n+2}\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)!}$$

Como queríamos demostrar.

Para n impar, como n-1 es par podemos escribir:

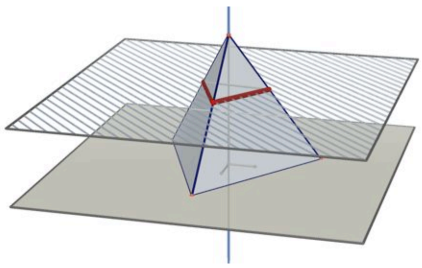
$$\prod_{i=1}^{n}(I_n)=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\cdot I_n=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\cdot\frac{\left(2^{\frac{n-1}{2}}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2}{n!}=\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!}$$

De esta forma tenemos:

$$V_n=\begin{cases}\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\cdot R^n & \text{n par}\\[2ex] \dfrac{2^n\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!}\cdot R^n & \text{n impar}\end{cases}$$

<u>Volumen del hipertetraedro:</u>

$$V_n=\int_0^{H_n}V_{n-1}dx_n$$



Ahora, V y H son de la forma:

$$V_i=k_i\cdot L^i$$

$$H_i=\sqrt{\frac{i+1}{2\cdot i}}$$

Con lo que:

$$V_n=\int_0^{H_n}V_{n-1}dx_n=\int_0^{L}k_{n-1}\cdot l^{n-1}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{2\cdot n}}\cdot dl=\frac{k_{n-1}\sqrt{\frac{n+1}{2\cdot n}}}{n}\cdot L^n$$

Así que:

$$V_n=\frac{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i+1}{2\cdot i}}}{n!}L^n=\frac{\sqrt{n+1}}{2^{\frac{n}{2}}\cdot n!}\cdot L^n$$

Volumen del hiperoctaedro:

$$V_n = 2\cdot\int_0^{H_n} V_{n-1}dx_n = 2\cdot\int_0^L k_{n-1}\cdot l^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot dl = \frac{k_{n-1}\cdot\sqrt{2}}{n}\cdot L^n$$

De donde:

$$V_n = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!}\cdot L^n$$

Volumen del hipercubo:
Trivialmente, por la definición de volumen:

$$V_n = L^n$$

Si consideramos la estructura anteriormente descrita para deducir el máximo número de tetraedros de 4D por vértice podemos describir una estructura similar que nos permita conocer una cota superior para el número de sólidos de cierto tipo por vértice.

Para ello vamos a establecer otro volumen, V', que será el que quede encerrado entre el sólido formado por n vértices del sólido inicial que estamos considerando, de forma que uno de los vértices esté unido por aristas con todos los otros.

Hipertetraedro: Todos los vértices están unidos con todos, por lo que:

$$V = V' = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{\frac{n}{2}}\cdot n!}L^n$$

Hiperoctaedro: Si tomamos un vértice, está unido con todos menos con su simétrico respecto a $O = (0,0,...,0)$, con lo que, dada la simetría de la figura con respecto a este punto:

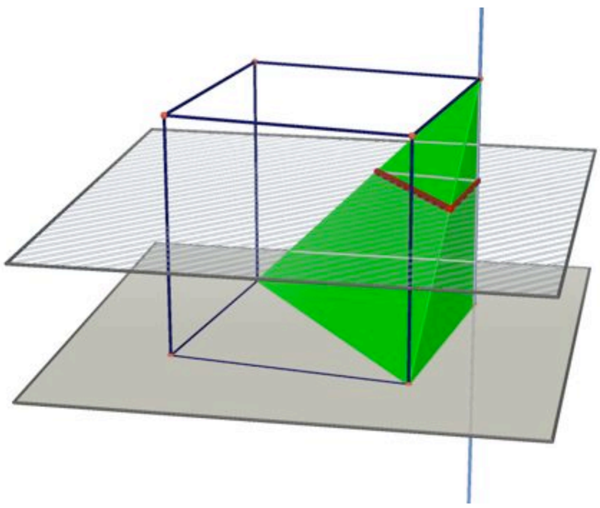
$$V = 2\cdot V' \Rightarrow V' = \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n!}\cdot L^n$$

Hipercubo: Para hallar el volumen tenemos que considerar el vértice $O = (0,0,...,0)$, que estará unido por aristas con los puntos $X_i = \left(\overbrace{0,...,0}^{i-1},1,\overbrace{0,...,0}^{n-i}\right)$, que estarán, a su vez, en el mismo hiperplano de dimensión n-1. Por lo tanto:

$$V'_n = \int_0^H V'_{n-1}\,dx_n = \int_0^H k_{n-1}\cdot L^{n-1}dx_n = \int_0^L k_{n-1}\cdot L^{n-1}dl = \frac{k_{n-1}}{n}\cdot L^n$$

Con lo que:

$$V'_n = \frac{1}{n!}\cdot L^n$$



De esta forma, si consideramos los números de teselación en dimensión n tenemos, si n es par:

$$\begin{cases} K_{tetraedro}(n) < \dfrac{V_{esfera}(n)}{V'_{tetraedro}(n)} = \dfrac{\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\cdot L^n}{\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{\frac{n}{2}}\cdot n!}\cdot L^n} = \dfrac{2^{\frac{n}{2}}\cdot n!\cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!\cdot\sqrt{n+1}} \\ K_{octaedro}(n) < \dfrac{V_{esfera}(n)}{V'_{octaedro}(n)} = \dfrac{\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\cdot L^n}{\dfrac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n!}\cdot L^n} = \dfrac{n!\cdot\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)!} \\ K_{cubo}(n) < \dfrac{V_{esfera}(n)}{V'_{cubo}(n)} = \dfrac{\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}\cdot L^n}{\dfrac{1}{n!}\cdot L^n} = \dfrac{n!\cdot\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \end{cases}$$

Y si n es impar:

$$\begin{cases} K_{tetraedro}(n) < \dfrac{V_{esfera}(n)}{V'_{tetraedro}(n)} = \dfrac{\dfrac{2^n\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!}\cdot L^n}{\dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{\frac{n}{2}}\cdot n!}\cdot L^n} = \dfrac{2^{\frac{3\cdot n}{2}}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n+1}} \\ K_{octaedro}(n) < \dfrac{V_{esfera}(n)}{V'_{octaedro}(n)} = \dfrac{\dfrac{2^n\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!}\cdot L^n}{\dfrac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n!}\cdot L^n} = 2^{\frac{n}{2}+1}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}} \\ K_{cubo}(n) < \dfrac{V_{esfera}(n)}{V'_{cubo}(n)} = \dfrac{\dfrac{2^n\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!}\cdot L^n}{\dfrac{1}{n!}\cdot L^n} = 2^n\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)!\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$$

En el caso del cubo, sin embargo, conocemos, por las características de perpendicularidad y paralelismo de sus caras, que su número de teselación es exactamente 2^n.

Para que se pueda formar un sólido en dimensión n debe darse el número de sólidos por vértice de cada tipo sea menor que sus respectivos números de teselación, es decir:

$$\kappa_{sólido}(n) \le K_{sólido}(n)$$

Si tenemos un sólido de Arquímedes de más de dimensión 5, sus caras solo pueden ser hipertetraedros e hiperoctaedros, ya que son los únicos sólidos platónicos cuyas caras de dimensión n-1 son iguales. Si ahora consideramos el número de hipertetraedros por vértice (A) y el número de hiperoctaedros por vértice (B) podemos establecer una estructura geométrica igual a la que usamos para obtener los números de teselación, y se tiene que:

$$A V'_{tetraedro} + B \cdot V'_{octaedro} < V_{esfera}$$

Es decir, para n par:

$$A \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot n!} \cdot L^n + B \cdot \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n!} \cdot L^n < \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} \cdot L^n \Leftrightarrow A \cdot \sqrt{n+1} + B \cdot 2^{n-1} < \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cdot n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

Y si n es impar:

$$A \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot n!} \cdot L^n + B \cdot \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n!} \cdot L^n < \frac{2^n \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)! \cdot \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!} \cdot L^n \Leftrightarrow A \cdot \sqrt{n+1} + B \cdot 2^{n-1} < 2^{\frac{3 \cdot n}{2}} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)! \cdot \pi^{\frac{n-1}{2}}$$

Para que un sólido de Arquímedes de dimensión mayor que 5 exista es necesario que se cumpla la correspondiente desigualdad anterior, con lo que podemos acotar el número de sólidos existente a partir del número de soluciones de la inecuación diofántica. Por otro lado, para acotar inferiormente este número tenemos en cuenta dos aspectos. Por un lado, el hecho de que todo cuerpo de dimensión n tiene al menos n caras por vértice.

El segundo se basa en el estudio del número de caras de dimensión n-2 por vértice de cada una de las caras de dimensión n-1. De esta manera, dado que cada cara de dimensión n-1 debe compartir estas caras de dimensión n-2 con caras del mismo vértice, resulta que en cada vértice debe haber, como mínimo, tantas caras de dimensión n-1 como caras de dimensión n-2 más 1. De esta manera, el mínimo número de caras por vértice para un sólido de nD que contenga estos sólidos es:

- Hipertetraedros: n
- Hiperoctaedros: $2^{n-2}+1$
- Hipercubos: n

SÓLIDOS DE POINSOT

Definición:
Denominamos sólido de Poinsot, por extensión a los de dimensión 3, a todo aquel sólido n- dimensional, con n>2 que cumpla las siguientes condiciones:

- Está formado por sólidos de platón de dimensión anterior iguales
- Todas las distancias entre vértices unidos por aristas son iguales
- Todos los ángulos diedros entre dos caras de dimensión n-1 son iguales
- Los vértices son indistinguibles, es decir, a cada vértice le llega el mismo número de caras de cualquier dimensión
- El sólido resultante es cóncavo.

Propiedades:
Debido a las similitudes en la definición de la estructura de los sólidos de Arquímedes y los de Platón, se pueden probar, con demostraciones análogas a las de los sólidos regulares, las siguientes afirmaciones:

- Tiene simetría radial
- Es inscriptible en una esfera de dimensión n-1
- El baricentro y el circuncentro coinciden

Debido a que los sólidos de Poisot tienen estructura de caras de dimensión n-1 cóncava a pesar de que sus caras sean convexas, su dual debe tener caras de dimensión n-1 cóncavas pero estructura convexa, es decir, deben ser, como luego veremos, sólidos de Kepler.

Por ser inscriptibles en una esfera y ser todas las aristas y ángulos iguales, tenemos que la disposición de sus vértices sobre la esfera debe ser la misma que la de un sólido platónico, con lo que el número y las características de los sólidos de Poinsot viene dado por los sólidos platónicos de la misma dimensión y la dimensión anterior. De esta manera, se puede demostrar que no existen sólidos de Poinsot de más de dimensión 5.

De la misma manera que hicimos para demostrar que no existían más sólidos de Platón, podemos demostrar que no hay sólidos de Poisot:

- Formado por hipertetraedros de dimensión n:
  - Con n+1 hipertetraedros de n-D: hipertetraedro de dimensión n+1 (sólido de platón, luego no puede ser de Poisot)
  - Con 2n hipertetraedros de n-D: Imposible, ya que el criterio para que no exista el sólido de Platón formado por n+1 hiperoctaedros sería aplicable a su dual (sólido de Kepler)
  - Con 2^n hipertetraedros de n-D: hiperoctaedro de dimensión n+1

- Formado por hipercubos de dimensión n:
    - o Dado que los ángulos entre caras del hipercubo son siempre 90º no puede existir ningún sólido con caras cúbicas cuyo ángulo entre caras sea un racional no entero (criterio de ángulos del método para describir sólidos regulares y semirregulares), con lo que no puede ser un sólido de Kepler ni de Poinsot
- Formado por hiperoctaedros de dimensión n:
    - o Con n+1 hiperoctaedros de n-D: Cada hiperoctaedro de dimensión n tiene 2^{n-1} caras de dimensión n-1 por vértice que debe compartir con otros hiperoctaedros. Luego por lo menos tiene que haber $2^{n-1}+1$ hiperoctaedros por vértice. Luego la figura es imposible.
    - o Con $2n$ hiperoctaedros de n-D: Como $n \geq 5 \Rightarrow 2^{n-1}+1 > 2n$
    - o Con 2^n hiperoctaedros de n-D: Su dual sería un sólido de Kepler cuyas caras estarían formadas por 2^n vértices. Debido a las regularidades de estos sólidos, los vértices estarían distribuidos de la misma forma que un hipercubo de dimensión n, pero, como ya hemos visto, no pueden existir sólidos de Poinsot que tengan como caras cubos, así que para que exista un sólido de estas características debe existir uno análogo en todas las dimensiones anteriores, pero dado que en dimensión 3 no se da tal estructura en los sólidos de Kepler tenemos que no se da en ninguna dimensión.

SÓLIDOS DE KEPLER

Definición:
Denominamos sólido de Kepler, por extensión a los de dimensión 3, a todo aquel sólido n- dimensional, con n>2 que cumpla las siguientes condiciones:

- Está formado por sólidos de Kepler o Poinsot de dimensión anterior iguales
- Todas las distancias entre vértices unidos por aristas son iguales
- Todos los ángulos diedros entre dos caras de dimensión n-1 son iguales
- Los vértices son indistinguibles, es decir, a cada vértice le llega el mismo número de caras de cualquier dimensión
- El sólido resultante es cóncavo.

Propiedades:
Debido a las similitudes en la definición de la estructura de los sólidos de Arquímedes y los de Platón, se pueden probar, con demostraciones análogas a las de los sólidos regulares, las siguientes afirmaciones:

- Tiene simetría radial
- Es inscriptible en una esfera de dimensión n-1
- El baricentro y el circuncentro coinciden

Dado que las caras pueden ser cruzadas en un poliedro de Kepler, debemos considerar si tomamos como vértices los puntos de intersección o no. Si lo hacemos hay que considerar que esos puntos están sobre otra esfera de dimensión n-1, concéntrica con la que incluye al resto de los vértices.

Además, como ya vimos en los sólidos de Poinsot, el número de vértices de cada sólido de Kepler debe ser el mismo que el de un sólido platónico. Dependiendo de su estructura, el dual de un sólido de Kepler puede ser un sólido de Poinsot si su estructura es convexa o un sólido de Kepler si su estructura es cóncava.

De igual forma que hemos demostrado que no puede existir un sólido de Kepler cuyos vértices formen un hipercubo podemos demostrar que no puede existir ningún sólido de Kepler en más de dimensión 6. Como sabemos que a partir de dimensión 5 no hay sólidos de Kepler, las caras de estos sólidos deben ser también sólidos de Kepler. Es imposible que existan sólidos de Kepler con n+1 vértices en dimensión n, ya que a cada uno de los vértices le deben llegar n caras para que se pueda formar el sólido, es decir, le deben llegar por lo menos n aristas, con lo que todos los vértices deben estar unidos con todos y se forma un hipertetraedro de dimensión n, que es un sólido platónico y, por tanto, no puede ser un sólido de Kepler.

En cuanto a los sólidos de Kepler con los vértices con estructura de octaedro, sus caras deben ser, por lo que hemos visto, sólidos de Kepler, pero no pueden tener la estructura ni de hipertetraedros, ni de hipercubos, con lo que deben tener, de nuevo, estructura de hiperoctaedros. Análogamente al caso de los vértices en hipercubo, en este caso, para que exista un tal sólido deben existir sólidos análogos en todas las dimensiones anteriores, pero dado que no existe este sólido en dimensión 3 no puede existir en ninguna.

Tanto en los sólidos de Kepler como en los de Poinsot, pensamos que no pueden existir a partir de dimensión 5, pero no hemos podido hallar un método que nos permita demostrarlo. En cuanto a los de dimensión 4, hemos hallado varios sólidos de Kepler y Poinsot con la estructura de vértices del hiperdodecaedro y creemos que solo pueden existir estructuras similares a las obtenidas o a la del hipericosaedro, pero tampoco hemos conseguido una demostración lo suficientemente rigurosa.

En cuanto a los ya obtenidos, por un lado, parten de estrellar (ya sea con vértices hacia el interior o el exterior) el hiperdodecaedro con un cierto ángulo, de forma que las nuevas caras sean prolongaciones de las adyacentes. El resultado son dos sólidos de Kepler provenientes del gran dodecaedro y el dodecaedro estrellado. Sus duales correspondientes nos llevan a dos sólidos de Kepler Poinsot más (sabemos que estos no son autoduales ni duales entre si), pero no los hemos conseguido identificar.

Por otra parte, hemos estudiado la siguiente estructura. Tomamos el icosaedro de 3D y consideramos los 5 vértices a los que está unido uno de los vértices del icosaedro. Estos 5 puntos forman un pentágono regular. Ahora, consideramos la estructura formada por icosaedros en los que, en lugar de tomar como cara del mismo los triángulos, tomamos los pentágonos antes descritos. De esta manera, obtenemos un cuerpo de 4 dimensiones de características parecidas a las del gran dodecaedro, pero formado por icosaedros.

Análogamente, consideramos en un dodecaedro los tres vértices a los que está unido cada vértice, que forman un triángulo equilátero. Considerando que la cara del dodecaedro es ésta, formamos otra figura de 4D cuyas caras son dodecaedros y cuya estructura, intuimos, será similar a la que provenga del gran icosaedro, aunque no hayamos encontrado esta última.

Por último, considerando los duales de estos dos sólidos encontramos otros dos más, pero no hemos podido analizarlos con detenimiento.

MÉTODO GENERAL PARA DESCRIBIR SÓLIDOS REGULARES Y SEMIRREGULARES EN DIMENSIÓN N

En primer lugar, vamos a ver algunas herramientas que nos permitan definir un criterio analítico en función del cual podamos clasificar estos poliedros en función de la nube de puntos correspondiente a sus vértices.

Distancia entre dos puntos:
En primer lugar, la distancia entre dos puntos, A y B, en dimensión n la tenemos definida de este modo:

$$\left.\begin{array}{l} A=(a_1,a_2,\dots,a_n) \\ B=(b_1,b_2,\dots,b_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,\dots,b_n-a_n)$$

$$d(A,B)=\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\dots+(b_n-a_n)^2}$$

Inscriptibilidad del sólido en una esfera:
En segundo lugar, vamos a generar un procedimiento para ver si una nube de puntos está sobre una esfera. Como esto solo nos interesa para comprobar si la nube de puntos puede corresponder a un sólido regular o semirregular, podemos asumir la propiedad de estos sólidos de que el baricentro y el circuncentro coinciden.

De esta manera, considerando la distancia del baricentro a cada uno de los puntos de la nube, sean $X_1, X_2,\dots, X_m$ tenemos:

$$X_i=(x_{i,1},x_{i,2},\dots,x_{i,n})$$

$$d(X_i,G)=\sqrt{(x_{i,1}-g_1)^2+(x_{i,2}-g_2)^2+\dots+(x_{i,n}-g_n)^2}=R$$

Elevando al cuadrado cada ecuación y sumando las m ecuaciones obtenemos:

$$R^2=x_{i,1}^2-2x_{i,1}g_1+g_1^2+x_{i,2}^2-2x_{i,2}g_2+g_2^2+\dots+x_{i,n}^2-2x_{i,n}g_n+g_n^2$$

$$mR^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_{i,j}^2-2g_j\sum_{i=1}^{m}x_{i,j}+mg_j^2\right)$$

Dividiendo por m y teniendo en cuenta que:

$$g_j=\frac{\sum_{i=1}^{m}x_{i,j}}{m}$$

Tenemos:

$$R^2=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{x_{i,j}^2}{m}-2g_j\frac{\sum_{i=1}^{m}x_{i,j}}{m}+g_j^2\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{x_{i,j}^2}{m}-2g_jg_j+g_j^2\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{x_{i,j}^2}{m}-g_j^2\right)$$

Pero, ahora, aplicando la definición de la varianza:

$$\sigma_k(x)=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i^2}{k}-\bar{x}^2\Rightarrow R^2=\sigma_m(x_1)+\sigma_m(x_2)+\dots\sigma_m(x_n)$$

Criterio de convexidad:
Tomemos un sólido de dimensión n con m vértices. Si es convexo debe darse que todos sus vértices sean los límites de la envolvente convexa. Un punto $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ pertenece a la envolvente convexa si y solo si:

$$\exists t_i / \sum_{i=1}^{m} t_i x_{i,j} = p_j, \forall j \le n$$

Y además:

$$\sum_{i=1}^{m} t_i = 1; 1 \ge t_i \ge 0$$

Siendo $x_{i,j}$ la j-ésima coordenada del i-ésimo vértice del sólido.
Vamos a demostrar que si el sólido es convexo el siguiente sistema tiene una única solución, mientras que si es cóncavo, el sistema tiene más de una solución:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{m} t_{1,i} \cdot x_{i,1} = x_{1,1} \\
\sum_{i=1}^{m} t_{1,i} \cdot x_{i,2} = x_{1,2} \\
\ldots \\
\sum_{i=1}^{m} t_{1,i} \cdot x_{i,n} = x_{1,n} \\
\ldots \\
\sum_{i=1}^{m} t_{k,i} \cdot x_{i,j} = x_{k,j} \\
\ldots \\
\sum_{i=1}^{m} t_{m,i} \cdot x_{i,n} = x_{m,n}
\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
\text{sólido convexo} \Rightarrow \text{Solución única}: \left\{\begin{array}{l} t_{i,i} = 1 \forall i \le m \\ t_{i,j} = 0 \forall i \ne j \end{array}\right. \\
\text{sólido no convexo} \Rightarrow \text{Varias soluciones}
\end{array}\right.$$

En forma matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \ldots & t_{1,m} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \ldots & t_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m,1} & t_{m,2} & \ldots & t_{m,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$T_{m \times m} \cdot X_{m \times n} = X_{m \times n}$$

Multiplicando a ambos lados por $X^T_{n \times m}$ tenemos:

$$T_{m \times m} \cdot X_{m \times n} \cdot X^T_{n \times m} = X_{m \times n} \cdot X^T_{n \times m}$$
$$T_{m \times m} \cdot X'_{m \times m} = X'_{m \times m}$$

Si un sólido de dimensión n es convexo cada vértice x_i está en el límite de la envolvente convexa. Ahora consideramos la envolvente convexa de todos los puntos salvo x_i. Si x_i pudiera ponerse con una combinación de t_j distinta de la trivial entonces existiría una combinación tal que $t_i = 0$, con lo que x_i estaría dentro de la envolvente de los otros puntos, lo que contradice que el sólido sea convexo.

De la misma manera, si el poliedro no es convexo, existirá al menos un punto x_i que esté dentro de la envolvente convexa de los otros, con lo que la ecuación tendrá por lo menos dos soluciones. La primera es la trivial:

$$\begin{cases} t_i = 1 \\ t_j = 0 \forall j \neq i \end{cases}$$

La segunda parte de que por pertenecer a la envolvente convexa de los otros puntos tiene una combinación de t_j con $t_i = 0$.

De esta manera, podemos determinar si un sólido es convexo determinando el número de soluciones de la ecuación matricial anteriormente dicha.

Dado que el sistema contiene únicamente matrices cuadradas, podemos considerar los determinantes de las mismas, con la ecuación correspondiente:

$$|T_{m\times m}| \cdot |X'_{m\times m}| = |X'_{m\times m}|$$

De donde:

$$\begin{cases} |X'_{m\times m}| \neq 0 \Rightarrow |T_{m\times m}| = 1 \\ ó \\ |X'_{m\times m}| = 0 \end{cases}$$

Además, si $|X'_{m\times m}| \neq 0$ la matriz es invertible, con lo que:

$$T_{m\times m} = X'_{m\times m} \cdot X'^{-1}_{m\times m} = I$$

Así obtenemos que si $|X'_{m\times m}| \neq 0$ la solución del sistema de matrices es única y el sólido es convexo.

De esta manera, el sólido es cóncavo si y solo si:

$$|X'_{m\times m}| = 0$$

Con estas herramientas y las deducciones que ya teníamos sobre los sólidos que estamos tratando, podemos establecer una lista de condiciones que nos sirva tanto para clasificar los poliedros como para generar un algoritmo que nos permita obtenerlos todos. En este caso, y dado que es lo que estamos aplicando, daremos el procedimiento desde el punto de vista algorítmico, es decir, tal como se da para hallar una lista con todos los sólidos regulares y semirregulares.

1. Primer paso, comprobar que las distancias son iguales:

Se comprueba la siguiente igualdad:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (x_{i,\alpha} - x_{j,\alpha})^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} (x_{i,\alpha} - x_{k,\alpha})^2$$

Para cualesquiera i, j, k tales que X_i, X_j y X_i, X_k estén unidos por aristas.

Si una sola de estas igualdades no fuera cierta, el sólido no sería uniforme.
En caso contrario, continuamos el proceso.

2. Comprobar si las caras son regulares:

En nuestro caso, esto se comprueba por construcción. Solo tomamos como base del algoritmo para formar sólidos de dimensión n los sólidos platónicos de dimensión n-1 y, excepcionalmente para formar Kepler, los sólidos de Kepler y Poinsot de esta dimensión.

3. Criterio de la teselación:

Una vez determinado el número y tipo de caras por vértice que vamos a utilizar para definir la estructura de nuestro sólido, es necesario comprobar si es posible que exista tal sólido con esas características.

Para ello, si queremos dar un sólido en dimensión n, tomamos las caras que queremos estudiar en dimensión n-1 y estudiamos su número de teselación. Ningún sólido de dimensión n podrá tener más caras por vértice de un tipo que las que determina este número. Por tanto, si hallamos los números de teselación de los sólidos en una cierta dimensión, limitamos el número de posibles cuerpos de dimensión n. Esto último se puede conseguir tanto por la vía analítica (considerando los ángulos entre caras) como combinatoria (contando las combinaciones de caras posibles), aunque nosotros hemos preferido utilizar para dimensión mayor que 4 el método del volumen descrito para los sólidos de Arquímedes.

4. Criterio de dualidad:
Este criterio depende del tipo de sólidos que estamos buscando. Si tanto un sólido como su dual están en los grupos estudiados, la existencia de uno implica la del otro. Por tanto, podemos descartar todos aquellos cuerpos cuyos duales no pertenezcan al grupo que debieran.

En nuestro caso, este criterio se puede aplicar al estudiar los sólidos platónicos (el dual es otro platónico), sólidos de Kepler (el dual es un Kepler o un Poinsot), y sólidos de Poinsot (el dual es un Kepler). No sirve, sin embargo, para los sólidos de Arquímedes, ya que su dual es un sólido de Catalán, grupo que no vamos a considerar.

5. Comprobar que el sólido es convexo:
Se aplica el criterio de convexidad a la nube de puntos. Los sólidos que no pasen este punto son sólidos con puntos internos. Si consideramos que los vértices de los puntos de intersección de las caras de Kepler y Poinsot son vértices de la nube, cualquiera de estos cuerpos tendría $\left|X'_{m\times m}\right| = 0$, mientras que si no lo consideramos, el determinante sería 1. Si pasa este punto, se continúa con el siguiente. Si no, hay que considerar mediante otras herramientas si el sólido es de Kepler o Poinsot o simplemente no corresponde a los que buscamos.

6. Criterio de esfericidad:
Calculamos el radio de la supuesta esfera circunscrita a los puntos de la nube.

$$R^2 = \sigma_m(x_1) + \sigma_m(x_2) + \ldots \sigma_m(x_n)$$

Y consideramos la siguiente lista de igualdades:

$$(x_{i,1} - g_1)^2 + (x_{i,2} - g_2)^2 + \ldots + (x_{i,n} - g_n)^2 = R^2 \quad \forall i \le m$$

Si alguna de las igualdades falla, entonces nuestro sólido no entra dentro de los grupos que estamos estudiando. Si todas son verdaderas, entonces se pasa al siguiente criterio.

7. Criterio de ángulo:
Este es el último criterio de nuestra lista se utiliza para comprobar que el poliedro cierra a la perfección. Se consideran los vectores perpendiculares a las caras de dimensión n-1 de uno de los vértices del cuerpo de dimensión n. Se toman dos caras opuestas del vértice, es decir, tales que sus respectivos vectores perpendiculares y el vértice estén en el mismo plano de dimensión 2. Si esto no fuera posible, se tomarían también las caras de los vértices adyacentes, hasta que se encontraran dos vectores perpendiculares a esas caras y un vértice que cumplieran nuestras condiciones, con el vértice entre los dos vectores.

Una vez hecho esto, se comprueba que no exista ningún otro vector en el mismo plano que quede entre dos de nuestros tres elementos. Si esto es así, se desecha uno de los vectores y se toma el nuevo, siempre que al hacerlo no quede el punto en el exterior de los vectores.

A continuación, se halla el ángulo que forman nuestros dos vectores, sea φ en grados sexagesimales, y se calcula el siguiente cociente:

$$\lambda = \frac{360}{\varphi}$$

Una vez hallado, podemos hacer las siguientes afirmaciones:

$$\lambda \in \mathrm{N} \Rightarrow \text{El sólido cierra de forma convexa (si las caras son convexas)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda \notin \mathrm{N} \\ \lambda \in Q\end{array}\right\} \Rightarrow \text{El sólido cierra de forma cóncava (las caras se cruzan)}$$

$$\lambda \notin Q \Rightarrow \text{El sólido no llega a cerrar nunca}$$

La demostración parte de dos premisas. La primera es que hemos visto que el sólido es inscriptible en una esfera, y por tanto, las perpendiculares a las caras por su punto medio pasan por su centro.

La segunda es que al tomar dos vectores y un vértice que estén en el mismo plano, este plano corta a la esfera circunscrita dando como resultado una circunferencia.

Para que el cuerpo cierre, es necesario que:

$$m \cdot \varphi = n \cdot 360 \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \lambda \in Q$$

Para algunos m y n enteros primos entre si. Si m y n no existen, entonces no existiría un número entero de caras con las cuales se pudiera construir el sólido, lo cual es imposible en geometría euclídea de dimensión entera. De esta manera, el sólido cierra si y solo si $\lambda \in Q$.

Por otro lado, si $n = 1$ el poliedro puede cerrar de forma que las caras den una única vuelta a la esfera, es decir, que el poliedro es convexo y si $n = 1$ resulta $\lambda \in N$, como queríamos demostrar.

CONCLUSIONES

En primer lugar, hemos descrito de forma exhaustiva las características de los principales tipos de sólidos regulares y semirregulares: de Platón, Arquímedes, Poinsot y Kepler.

En los sólidos de Platón, hemos conseguido elaborar una lista completa en la que se incluyen descritos de forma analítica y cualitativa todos los sólidos de este tipo existentes en cualquier dimensión. Hemos visto, además, ciertas propiedades de estos sólidos necesarias para profundizar en nuestra investigación de otros cuerpos derivados de estos, como los sólidos de Arquímedes o Poinsot.

En cuanto a los sólidos de Arquímedes, cuando comenzamos a investigar llegamos a la conclusión de que un análisis como el realizado para los sólidos de Platón resultaría tremendamente costoso, con lo que optamos por investigar únicamente la manera de describir sus características principales y acotar su número para dimensión n.

Finalmente conseguimos ambos objetivos, obteniendo una ecuación cuyas soluciones enteras determinan los posibles sólidos de Arquímedes para dimensión n.

Los sólidos de Kepler y Poinsot resultaron más difíciles de investigar, debido a sus características de no convexidad que los hacen distintos de los otros grupos. Pese a esto, hemos conseguido elaborar una teoría sobre su comportamiento en dimensión n, probando algunas de sus propiedades (como las referentes a la dualidad) y acotando su número al demostrar que no existe ninguno de estos sólidos más allá de dimensión 6.

Además, hemos obtenido una lista de sólidos de Kepler y Poinsot de dimensión 4 a partir de la cual se podría continuar para obtener la lista completa de estos cuerpos, que nosotros no hemos podido hallar por falta de tiempo.

Por último, hemos desarrollado un conjunto de herramientas analíticas que permiten, tanto clasificar un poliedro dado en alguno de los grupos en los que estamos trabajando, como generar un algoritmo para hallar todos los poliedros de una determinada clase. De hecho, a lo largo del trabajo hemos usado el algoritmo anteriormente descrito para obtener las diversas características de los sólidos estudiados, modificando y ampliando las herramientas de que disponíamos para adaptarlas a nuestras necesidades de análisis.

BIBLIOGRAFÍA

La única bibliografía relevante utilizada a lo largo del trabajo corresponde a una serie de libros de programación en Pascal y MatLab que hemos necesitado para poder realizar el programa de cálculo de vértices necesario para obtener los vértices del hiperdodecaedro y el hipericosaedro de 4D.

ANEXOS

El único anexo que presentamos es el programa generado para calcular los vértices del hiperdodecaedro de 4D. Aunque fue creado con ese fin, puede aplicarse a cualquier cuerpo de dimensión 4 cuyos vértices sigan una estructura predefinida. Aunque el programa inicial lo realizamos en Pascal, la versión que se presenta es la correspondiente a MatLab.

```
p=input('introducir el número de vértices iniciales ');
l=1;
while l<p+1
   disp(l);
   V(l,1)=input('introducir x ');
   V(l,2)=input('introducir y ');
   V(l,3)=input('introducir z ');
   V(l,4)=input('introducir t ');
    l=l+1;
end
disp (V)
m=input('introducir el número de nuevos vértices ');
k=0;
while k<m
   a=input('introducir vértice 1 ');
   dist1=input('introducir distancia 1 ');
   if dist1==1
      d1=sym(1);
   elseif dist1==2
         d1=sym((1+sqrt(5))/2);
      else
         d1=dist1;
      end
   b=input('introducir vértice 2 ');
   dist2=input('introducir distancia 2 ');
   if dist2==1
      d2=sym(1);
   elseif dist2==2
         d2=sym((1+sqrt(5))/2);
      else
         d2=dist2;
      end
   c=input('introducir vértice 3 ');
   dist3=input('introducir distancia 3 ');
   if dist3==1
      d3=sym(1);
   elseif dist3==2
         d3=sym((1+sqrt(5))/2);
      else
         d3=dist3;
      end
   f=input('introducir vértice 4 ');
   dist4=input('introducir distancia 4 ');
   if dist4==1
      d4=sym(1);
   elseif dist4==2
         d4=sym((1+sqrt(5))/2);
      else
         d4=dist4;
      end
   n=input('introducir número de vértice ');
   [X,Y,Z,T] = solve('(x-V(a,1))^2+(y-V(a,2))^2+(z-V(a,3))^2+(t-V(a,4))^2-
d1^2','(x-V(b,1))^2+(y-V(b,2))^2+(z-V(b,3))^2+(t-V(b,4))^2-d2^2','(x-
V(c,1))^2+(y-V(c,2))^2+(z-V(c,3))^2+(t-V(c,4))^2-d3^2','(x-V(f,1))^2+(y-
V(f,2))^2+(z-V(f,3))^2+(t-V(f,4))^2-d4^2');
   V(n,1)=X;
   V(n,2)=Y;
   V(n,3)=Z;
   V(n,4)=T;
   i=i+1;
end
disp (V);
```