Premios del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid para Estudiantes de Secundaria

Segunda Edición, 2007/2008

TRABAJO: Números y formas

GANADOR EN LA CATEGORÍA DE E.S.O.

AUTORES:

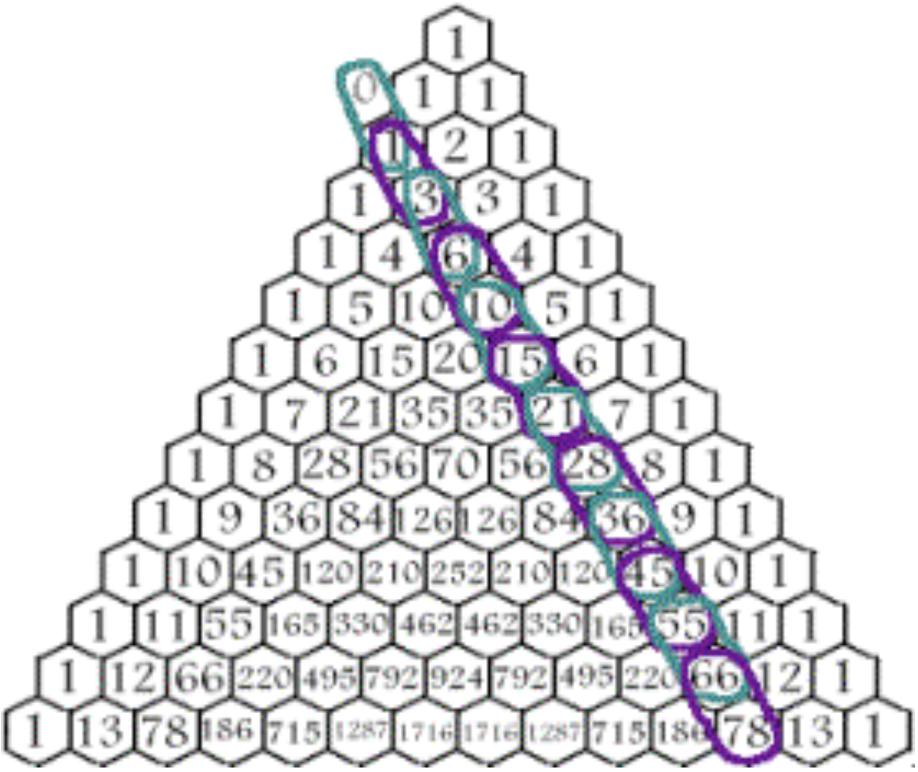
- Marina Aneiros Gayol
- Tania Blanco González
- Ignacio Fernández Inestal
- Héctor Fernández Teso

TUTORES:

- José Luis Álvarez García

CENTRO: IES nº 5 (Avilés, Asturias)

Números y formas



POLINUM

Índice:

1. INTRODUCCIÓN.

Un día en clase de matemáticas, cuando estábamos estudiando las sucesiones, el profesor nos planteó una serie de problemas basados en formas poligonales construidas con puntos. Fue algo que nos sorprendió y sobre todo una vez que empezamos a estudiar aquellas relaciones no nos imaginábamos tanta expansión. Además fuimos descubriendo que era algo ya estudiado desde la antigüedad y que fue objeto del trabajo de algunos de los más grandes matemáticos de la historia. Y particularmente nosotros pudimos comprobar que da mucho de sí.

Como ya apuntábamos, hace ya muchos años, en la antigua Grecia, la Geometría y la Aritmética estaban muy relacionadas entre sí. Pitágoras y sus discípulos utilizaban pequeñas piedrecillas para determinar formas geométricas y así observar las relaciones entre los números y sus formas. Estos resultados que os vamos a mostrar son con los que estos matemáticos consiguieron descubrir importantes teoremas y relaciones.

2. OBJETIVOS.

Trataremos de estudiar algunas de las muchas y sorprendentes relaciones que hay entre los números poligonales, particularmente aquellas que nos permiten obtener un número poligonal a partir del número de lados del polígono y del orden que ocupa dicho número en la sucesión. Estas relaciones trataremos de demostrarlas tanto utilizando el álgebra como las sorprendentes divisiones que podemos hacer en las figuras, todo ello pretendemos hacerlo de una manera rápida y divertida. También veremos algunas ampliaciones, en particular la que relaciona los números poligonales con los piramidales.

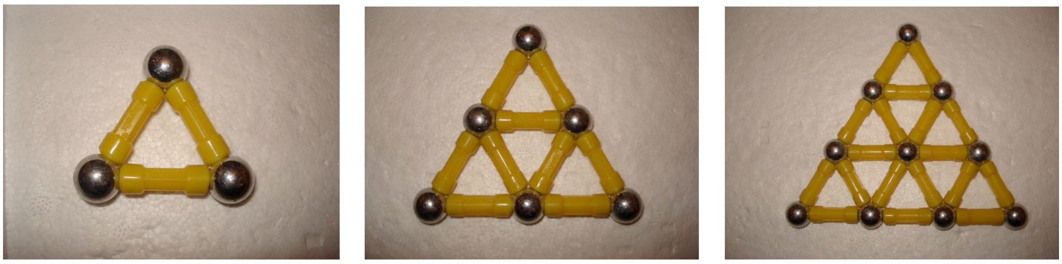
Os explicaremos esto ayudándonos de nuestras experiencias en clase, de nuestros propios métodos, de fotografías y también de la ayuda de nuestro profesor.

3. RESULTADOS.

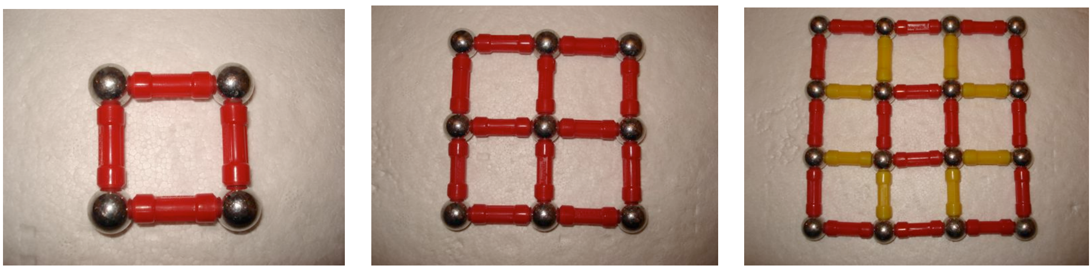
Los griegos fueron los primeros de los que se tiene noticias, en representar los números con formas geométricas. Estudiaron los números triangulares, cuadrangulares, rectangulares, … Nosotros hemos conseguido llegar a lo que nos mostraron ellos a partir de nuestros propios medios.

Para empezar, hemos hecho unas representaciones de los números triangulares, cuadrados y oblongos con pequeñas piezas magnéticas. Esto es lo que resultó:

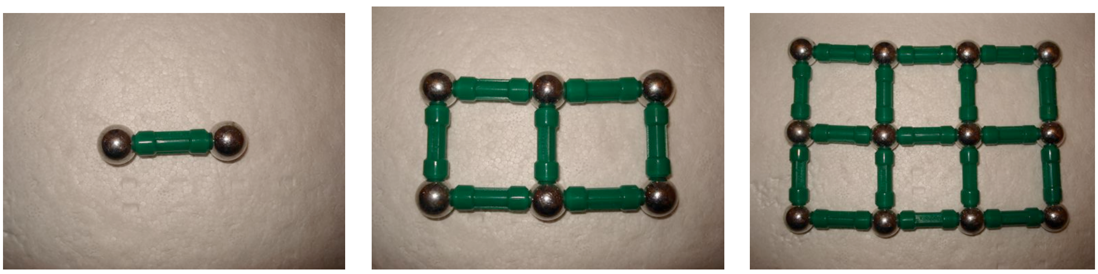
(orden 1)



Triangulares



Cuadrados



Oblongos

A continuación, el profesor nos sugirió organizar estos datos en una tabla para poder ver mejor las relaciones.

Esto fue lo que obtuvimos:

Orden	**Triangulares (Tn)**	**Cuadrados (Cn)**	**Oblongos (On)**
1	**1**	**1**	**2**
2	**3**	**4**	**6**
3	**6**	**9**	**12**
4	**10**	**16**	**20**
5	**¿?**	**¿?**	**¿?**
6	**¿?**	**¿?**	**¿?**

Necesitábamos encontrar los números con interrogantes y para eso deberíamos hallar relaciones en la tabla.

Una primera relación evidente es que el número cuadrado es el cuadrado del orden: ya lo sabíamos al ver la propia figura del número.

La siguiente relación que descubrimos en la tabla es que los números oblongos son el doble que los triangulares: 2·1=2; 2·3=6; 2·6=12; ... Por tanto escribimos la siguiente fórmula: $O_n= 2T_n$ y por consecuente también encontramos esta fórmula para los triangulares : $Tn = \frac{On}{2}$. A partir de ella somos capaces de encontrar algunos números oblongos y triangulares, pero para calcularlos tenemos que saber el número triangular y el número oblongo del mismo orden, respectivamente. Ese es un problema, ya que si el orden es muy alto será difícil encontrar el número y no es plan de estar todo el día buscando un numerito. Así que después buscaremos una fórmula para encontrar directamente ese número.

Otra relación que encontramos es que cuando sumamos los números cuadrados con el número de orden: 1+1=2; 4+2=6; 9+3=12; … nos dan los números oblongos. A partir de esta relación conseguimos sacar una fórmula para los oblongos: $O_n=n+C_n$.

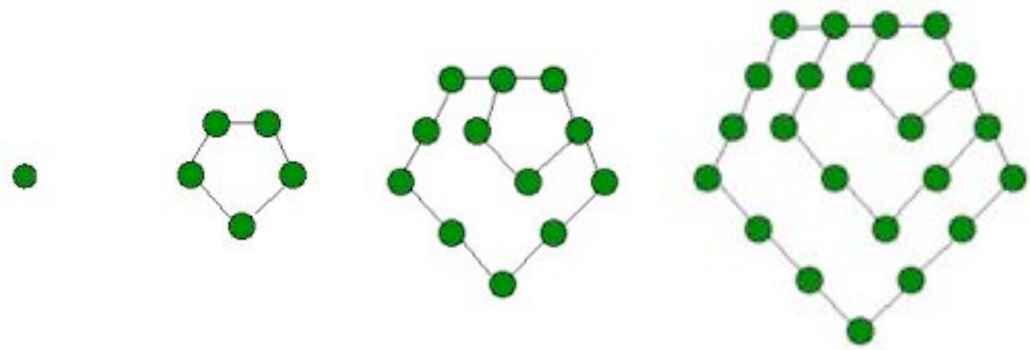
Cuando no conseguíamos ver más fórmulas, el profesor nos ayudó con unos pequeños dibujos parecidos a estos:

El primer caso representa la última fórmula que vimos. El segundo caso nos muestra como conseguir los números oblongos a partir de los triangulares ya que son dos triángulos iguales los que forman los oblongos. Es la misma relación que habíamos descubierto antes en la tabla: $O_n=2T_n$. El último caso nos representa como conseguir los cuadrados a partir de un triángulo y otro triángulo de una serie menor. Por tanto la fórmula que conseguimos es: $C_n=T_n+T_{n-1}$.

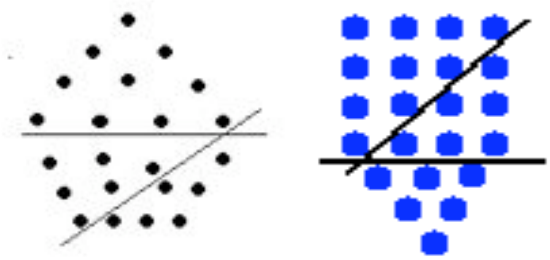
Obtuvimos todas estas fórmulas a través de observar las relaciones existentes en la tabla, después de obtener dichas fórmulas, las cotejamos y observamos que se cumplían en todos los casos.

Orden	**Triangulares (T_n)**	**Cuadrados (C_n)**	**Oblongos (O_n)**
1	**1**	**1**	**2**
2	**3**	**4**	**6**
3	**6**	**9**	**12**
4	**10**	**16**	**20**
5	**15**	**25**	**30**
6	**21**	**36**	**42**
Fórmula general	$T_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$	$C_n = n^2$	$O_n = n\cdot(n+1)$

Ahora hablaremos sobre los números pentagonales.



Para empezar a buscar relaciones nos ayudaremos de unos divisiones que hemos realizado:



Al observar este dibujo observamos que un pentágono está formado por un triángulo del mismo orden más otros dos de un orden inferior. Por lo que la fórmula sería: $P_n = T_n + 2T_{n-1}$

Para hallar la fórmula definitiva partimos de la fórmula anterior y la desarrollamos de tal manera que el resultado simplificado fue

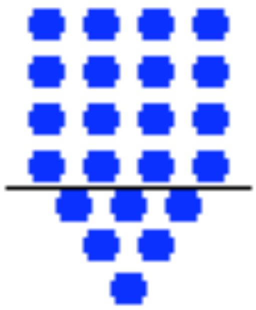
$$P_n = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

Orden	**Triangulares (T_n)**	**Cuadrados (C_n)**	**Pentagonales (P_n)**
1	**1**	**1**	**1**
2	**3**	**4**	**5**
3	**6**	**9**	**12**
4	**10**	**16**	**22**
5	**15**	**25**	**35**
6	**21**	**36**	**51**
Fórmula general	$T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$	$Cn = n^2$	$Pn = \frac{3n^2 - n}{2}$

Descubrimos también observando la tabla la relación existente entre los números pentagonales y los cuadrados: 1+4=5; 3+9=12; 6+16=22; …

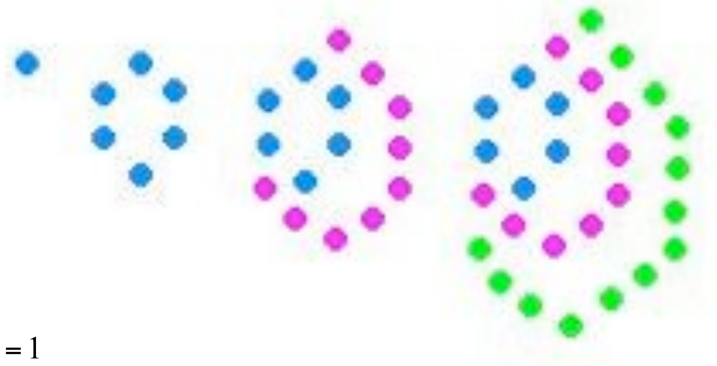
Esa relación podemos expresarla así: $P_n = C_n + T_{n-1}$

También podemos ver en un dibujo la relación anterior: un número poligonal lo podemos dividir en un cuadrado del mismo orden y un triangular de un orden inferior:



Después nos dedicamos a hallar fórmulas para los números hexagonales que explicamos a continuación.

Para conseguir la fórmula de los números hexagonales hicimos lo mismo que con los demás, es decir, empezar con un dibujo que nos ayudara a comprender mejor la situación:



$H_1 = 1$

$H_2 = 6$

$H_3 = 15$ $H_4 = 28$

Como ya habíamos sacado los cuadrados y los pentagonales a partir de los triangulares, intentamos hacer lo mismo con los hexagonales. Conseguimos ver que los hexagonales también los podemos descomponer en suma de triangulares y que podríamos sacar una formula fácilmente fijándonos en el número de puntos por lado menos los que comparten, lo cual nos daba lugar a una fórmula muy fácil de comprender :$H_n = T_n + 3T_{n-1}$ que simplificada nos daría: $P_n + T_{n-1}$ siendo $P_n = T_n + 2T_{n-1}$.
Con esta sencilla formula ya teníamos lo básico para entender mejor como eran los números hexagonales. Ahora sustituimos los números triangulares correspondientes en función de n, y una vez simplificada llegamos a esta otra expresión para los números hexagonales:

$$H_n = \frac{4n^2 - 2n}{2} = 2n^2 - n$$

Para terminar haremos una tabla resumen de todo lo que hemos trabajado por el momento. En la tabla añadiremos algunas filas más para los números poligonales de orden 7, 8, … generalizando ya los resultados que empezamos a ver: la obtención del poligonal correspondiente como suma de triangulares.

Lados polígono	**Número poligonal**	**A partir de triangulares**	**Término general**
3	**Triangular**	T_n	$\frac{n^2+n}{2}$
4	**Cuadrado**	T_n+T_{n-1}	$\frac{2n^2-0n}{2}=n^2$
5	**Pentagonal**	T_n+2T_{n-1}	$\frac{3n^2-n}{2}$
6	**Hexagonal**	T_n+3T_{n-1}	$\frac{4n^2-2n}{2}=2n^2-n$
7	**Heptagonal**	T_n+4T_{n-1}	$\frac{5n^2-3n}{2}$
8	**Octogonal**	T_n+5T_{n-1}	$\frac{6n^2-4n}{2}$
20	**20-gonal**	T_n+18T_{n-1}	$\frac{18n^2-16n}{2}$
p	**p-gonal**	$N_n=T_n+(p-3)T_{n-1}$	$N_n=\frac{(p-2)n^2-(p-4)n}{2}$

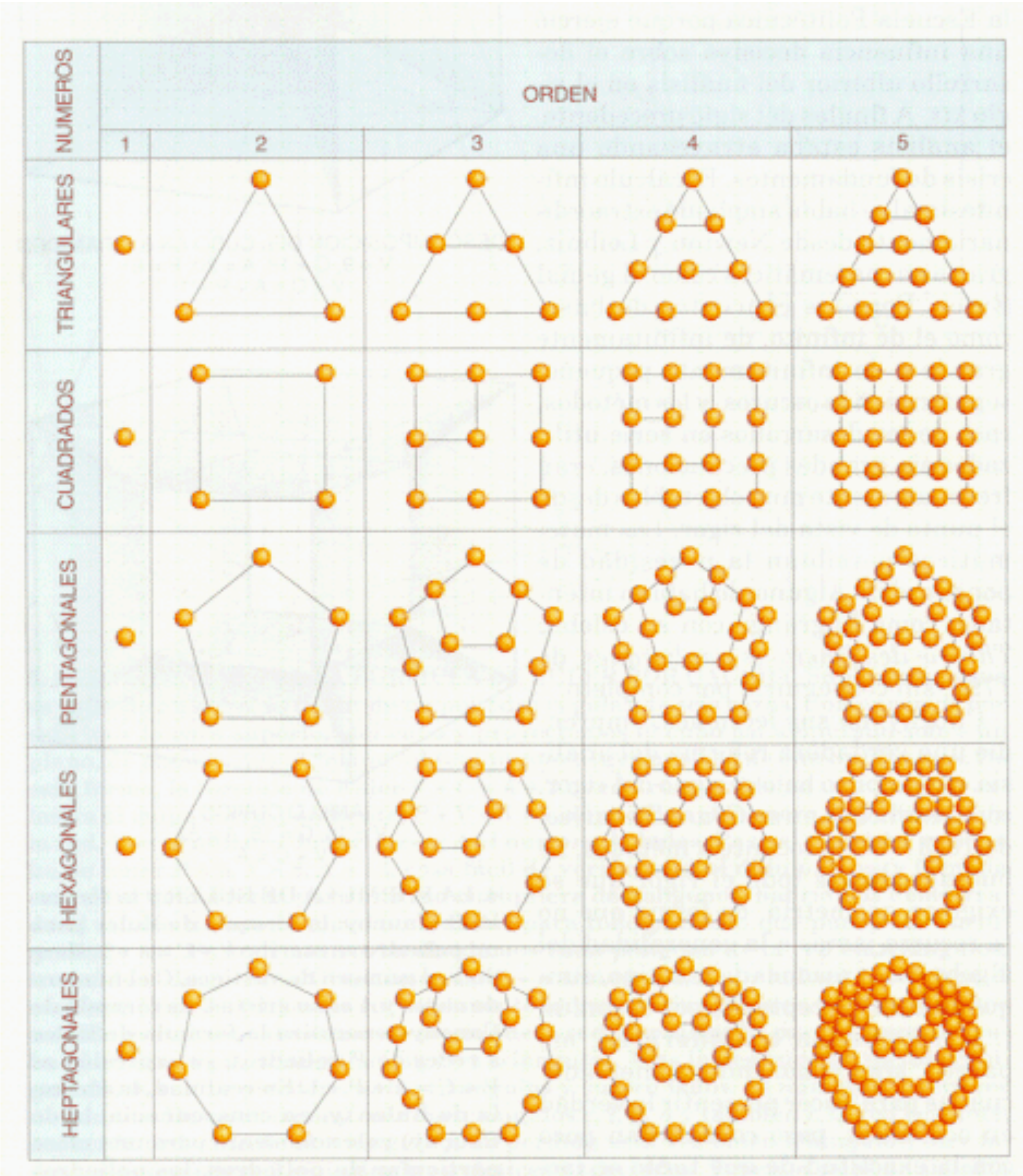
En la tabla anterior hemos incluido fórmulas para los números poligonales de un orden p cualquiera. Las hemos deducido a partir de la observación de las anteriores, primero como suma de triangulares y luego en función de n. Nos fijamos en que el número poligonal siempre resulta de sumar el triangular del mismo orden y n-3 triangulares de un orden inferior. Así que sustituyendo esos triangulares en función de n y simplificando un poco el resultado encontramos

$$N_n=\frac{(p-2)n^2-(p-4)n}{2}$$

Ahora vamos a utilizar los números triangulares para calcular diferentes términos generales para diferentes números poligonales. Vamos a calcular el orden 3 de los números pentagonales que es: T_n+2T_{n-1}. Sustituyendo el Tn por el número correspondiente que en este caso es Tn= 6 y Tn_{-1}= 3. El pentagonal de orden 3 da como resultado 12. Otro caso para poner como ejemplo es el de el octogonal de orden 3 cuya fórmula sería: T_n+5T_{n-1} y sustituyendo como en el caso anterior y da 21.

Nuestro siguiente objetivo es plantear la fórmula de los números dodecagonales que siguiendo los mismos pasos de antes resulta fácil. La fórmula sería: T_n+9T_{n-1}. Lo que sacamos en claro es que para calcular el orden de cualquier número poligonal será sumándole al triangular del mismo orden, el triangular de un orden menos multiplicado por un número que va a ser 3 veces menor que el número de orden.

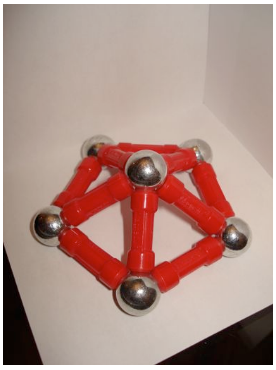
A partir de la siguiente tabla vamos a comprender de modo visual el la diferencias entre los distintos ordenes de un mismo número poligonal.



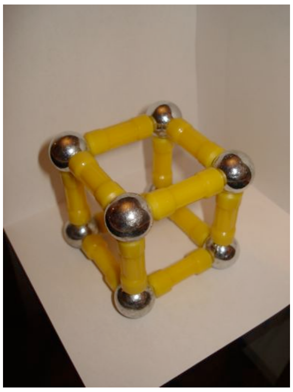
-*-

A raíz de lo estudiado en clase nos apeteció observar también algunos de los números poliédricos y decidimos construirlos:

→ Pirámide de base cuadrada



→ Pirámide base pentagonal



→ Cubo

También hicimos una tabla con los números poliédricos. En concreto los piramidales de base triangular (tetraédricos), cuadrada y pentagonal y también los cúbicos:

Orden	**Números piramidales**			**Cúbicos**
	Base triangular	**Base cuadrada**	**Base pentagonal**	
1	1	1	1	1
2	4	5	6	8
3	10	14	18	27
4	20	30	40	64
5	35	55	75	125
6	56	91	126	226

Descubrimos que cada número piramidal es suma poligonales del orden de la base. Por ejemplo, los de base triangular los podemos obtener a partir de los triangulares: 1; 1+3=4; 1+3+6=10; 1+3+6+10=20; … Los de base cuadrada los obtenemos a partir de los números cuadrados: 1; 1+4=5; 1+4+9=14; …. Los de base pentagonal lo mismo con los números pentagonales.

La explicación que encontramos es que los números poligonales nos indican en cada caso el número de objetos de cada piso del número piramidal. Por ejemplo, si construimos el número piramidal de base triangular de orden 4 tendremos 10 bolas en el primer piso, 6 en el segundo, 3 en el tercero y 1 en el cuarto y último piso.

Gracias a las primeras observaciones de unos grandes matemáticos nosotros podemos estudiar estas relaciones y estos tipos de números. A continuación y para terminar con los resultados os mostraremos algunos datos sobre algunos matemáticos de los que hemos aprendido muchas cosas en la realización de este trabajo.

- **FIBONACCI**

El matemático Fibonacci ha construido una sucesión que hemos encontrado en muchas situaciones. Nos llamó mucho la atención sobre todo verla en la naturaleza: girasoles, margaritas, piñas, etc. La descubrió mientras intentaba encontrar la solución a un problema sobre la cría de conejos y la cantidad de crías que podían tener estos y sus descendientes. La sucesión era así.

1-1-2-3-5-8-13-21…

La fórmula que nos permite encontrar los términos de esta sucesión, por recurrencia, será esta, siendo n el orden y a los números de la sucesión.

$$a_{n} = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Kepler también ha descrito los números de Fibonacci en su época.

→ Fibonacci (1170 - 1250)

- **GAUSS**

Es un matemático alemán y uno de los tres mayores junto con Arquímedes y Newton.

Un episodio ocurrido en clase cuando era pequeño permitió descubrir su gran talento hacia las matemáticas. Lo que ocurrió fue lo siguiente:

Un día el profesor quería mantener ocupados a los alumnos y les mandó sumar todos los números del 1 al 100. Casi inmediatamente Gauss le dio la respuesta al maestro. La respuesta era la correcta. Había sido capaz de resolver el problema mentalmente. Se había dado cuenta de que la suma del primer término con el último, la del segundo con el penúltimo y así sucesivamente, era constante:

1, 2, 3, 4… 97, 98, 99, 100

1+100=2+99=3+98=4+97=…=101

Con los 100 primeros se pueden formar 50 pares, de forma que la solución final se consigue por el producto:

101 x 50 = 5050

Precisamente esta sucesión es la que está presente en los números triangulares: lo que hizo Gauss fue calcular de una manera muy inteligente el número triangular de orden 100.

Gauss (1777-1855) →

4. CONCLUSIONES

Este trabajo nos permitió conocer algunas relaciones sorprendentes entre los números. Cuando empezamos a estudiar este problema en clase no imaginábamos que pudiera dar tanto de sí.

También nos resultó muy interesante la relación entre números y formas, y nos hemos dado cuenta de que algo tan simple como los triángulos o los cuadrados tienen muchas cosas detrás.

Otra de las cosas que destacamos es cómo hemos ido encontrando las distintas relaciones: analizando las tablas que construíamos encontrábamos relaciones entre los números. Esas relaciones además podíamos plasmarlas en un dibujo, dividiendo figuras, recomponiéndolas, ... Y, por último, el álgebra nos iba sirviendo para demostrarlas.

Nos lo hemos pasado bien trabajándolo y seguramente algunos de nosotros seguiremos en contacto con estos números durante algún tiempo más.

5. BIBLIOGRAFÍA

a. Wikipedia. (wikipedia.org)
b. Libro: M3, Matemáticas. Ed. Anaya
c. Demostraciones sin palabras. Roger B. Nelson. Ed. Proyecto Sur
d. Página web del profesor D. Antonio Pérez Sanz
e. Nuestros cuadernos de clase sobre números poligonales