

**CURSO AVANZADO DE EDP**  
**ALGUNOS PROBLEMAS RELACIONADOS CON DIFUSIÓN, CRECIMIENTO Y**  
**TRANSPORTE ÓPTIMO**

IRENEO PERAL

RESUMEN. El curso trata de poner al alumno frente a diferentes técnicas para resolver ecuaciones elípticas y parabólicas no lineales. Los modelos que se consideran son elementales pero los resultados que se obtienen son prototipos de comportamientos en situaciones más complicadas y generales.

Como segundo objetivo se tratará de ayudar al alumno a manejar la información bibliográfica necesaria y dispersa.

1. PROGRAMA

1. Un problema lineal: Regularidad precisa para las soluciones de  $-\Delta u = f$  en  $\Omega$ ,  $u = 0$  sobre  $\partial\Omega$  en términos de la sumabilidad de  $f$ . Resultados de De Giorgi y Stampacchia.
2. Problemas con formulación variacional para la ecuación de Laplace.
  - Autovalores del operador de Laplace. Problemas en resonancia.
  - Teoría de puntos críticos y aplicaciones.
  - Problemas críticos: idea del método de concentración-compacidad. Algunos problemas de la Geometría.
3. Problemas semilineales para el problema de Cauchy de la ecuación del calor.
  - Principios de comparación.
  - Existencia local en el tiempo.
  - El fenómeno de Fujita: el concepto de explosión en tiempo finito.
  - Existencia global para datos pequeños y conveniente regularidad.
4. Algunos problemas de crecimiento: problemas elípticos y parabólicos quasi-lineales.
  - La ecuación  $-\Delta u = |\nabla u|^2 + f$  y ecuaciones relacionadas.
  - Condiciones necesarias y suficientes para la existencia.
  - Resultado de no unicidad. La ecuación de Laplace con dato *medida buena*. Idea de solución de entropía o *solución obtenida como límite de aproximaciones (SOLA)*.
  - El modelo de Kardar-Parisi-Zhang: cambio de Hopf-Cole y modelo de crecimiento de tumores cerebrales.
  - Y ¿si no vale el cambio de función? Análisis del problema de la ecuación del calor con un dato *medida buena*.
  - Extensiones y no existencia del fenómeno de Fujita.
5. Problemas límite de EDP respecto a un parámetro y el principio de transporte óptimo de Monge-Kantorovich. Algunos modelos e ideas introductorias.
  - Estimaciones básicas y paso al límite.
  - El  $\Delta_\infty$ . Necesidad de modificar el concepto de solución: solución de viscosidad.
  - Algunos resultados sencillos.
6. Extensiones y problemas.

## 2. REQUISITOS

Se presupone al alumno haber cursado el curso de EDP del Primer Cuatrimestre del Master. Algunos resultados de Variable Real y Análisis Funcional serán de gran utilidad.

## 3. BIBLIOGRAFÍA

## ■ Libros

1. Ambrosetti, A.; Malchiodi, A. ; *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 104. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
2. Ambrosetti, A.; Malchiodi, A. ; *Perturbation methods and semilinear elliptic problems on  $R^n$* . Progress in Mathematics, 240. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
3. Ambrosetti, A. ; Prodi, G. ; *A primer of nonlinear analysis*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 34. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
4. Aubin, T. ; *A course in differential geometry*. Graduate Studies in Mathematics, 27. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
5. Brezis, H. ; *Analyse fonctionnelle. Théorie et Applications*, Masson, 1983.
6. Caffarelli, L. A.; Cabré, X. ; *Fully Nonlinear Elliptic Equations* American Mathematical Society, Colloquium Publications Vol 43, 1995.
7. Dacorogna, B.; *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, 1989.
8. Evans, L. C ; *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
9. Evans, L. C.; Gariepy, R. F.; *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
10. Evans, L. C.; *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 74. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
11. Giusti, E. ; *Metodi Diretti nel Calcolo delle Variazioni*, U.M.I. 1994.
12. Quittner, P.; Souplet, P. ; *Superlinear parabolic problems. Blow-up, global existence and steady states*. Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
13. Vazquez, J. L.; *The Porous Medium Equation. Mathematical Theory* Clarendon Press, Oxford, 2007.
14. Villani, Cédric; *Optimal transport. Old and new*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften , 338. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
15. Villani, Cédric; *Topics in optimal transportation*. Graduate Studies in Mathematics, 58. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

- Artículos. Se estudiarán partes de algunos artículos que se precisarán sobre la marcha y que formarán parte del material para la evaluación del alumno.