

**Programa de Máster en
“Matemáticas y Aplicaciones”**
Departamento de Matemáticas (UAM)
Año académico 2010-2011

Procesos estocásticos

Tutor: Javier Cárcamo

OBJETIVOS DEL CURSO

El objetivo del curso es proporcionar una perspectiva general de los procesos estocásticos más importantes y sus aplicaciones. Dada la amplitud del tema, no se incidirá en los detalles y evitaremos las demostraciones más técnicas. Nos concentraremos en la motivación de los resultados y en las ideas que subyacen a los principales conceptos.

Se comienza con un breve tema de carácter introductorio para explicar los conceptos básicos, las diferencias con lo visto en cursos previos de probabilidad y algunos ejemplos de procesos importantes. Posteriormente, se estudian cadenas de Markov (tanto en tiempo discreto como continuo), martingalas y sus aplicaciones a problemas de ruina, el movimiento Browniano y finalmente integración estocástica y aplicaciones a modelos financieros.

PROGRAMA

1. Introducción a los procesos estocásticos

- 1.1 Definición y conceptos básicos.
- 1.2 Tipos básicos de procesos : martingalas, de Markov y estacionarios.
- 1.3 Dos procesos importantes: el proceso de Poisson y el movimiento browniano.

2. Cadenas de Markov en tiempo discreto

- 2.1 Definiciones y propiedades básicas. Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.
- 2.2 Clasificación de estados.
- 2.3 Existencia de la distribución estacionaria y teoremas de convergencia.
- 2.4 La condición de equilibrio detallado. Aplicaciones.

3. Cadenas de Markov en tiempo continuo

- 3.1 Definición de las cadenas en tiempo continuo.
- 3.2 Procesos de nacimiento y muerte.
- 3.3 Tasas instantáneas de salto y ecuaciones de Kolmogorov.
- 3.4 Comportamiento asintótico. Condición de equilibrio detallado.

4. Esperanza condicionada y martingalas en tiempo discreto

- 4.1 Esperanza condicionada.
- 4.2 Definición de martingala. Propiedades básicas.
- 4.3 Teorema del tiempo de parada opcional.
- 4.4 Algunos resultados sobre convergencia de martingalas.
- 4.5 Métodos de comparación para modelos estocásticos. El teorema de Strassen.

5. El movimiento browniano. Aplicaciones

- 5.1 Motivación y definición. Propiedades básicas.
- 5.2 Martingalas en tiempo continuo. Martingalas asociadas al movimiento browniano.
- 5.3 Principio de reflexión. Aplicaciones.

6. Integración estocástica y fórmula de Itô

- 6.1 Definición de la integral de Itô. Propiedades básicas.
- 6.2 Fórmula de Itô y aplicaciones.
- 6.3 Modelo de Black-Scholes.

Bibliografía

1. Durrett, R. (1999). *Essentials of Stochastic Processes*. Springer.
2. Grimmett, G.R. y Stirzaker, D.R. (2001). *Probability and Random Processes (3 ed.)*. Oxford University Press.
3. Karatzas, I. y Shreve, S.E. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag.
4. Mikosch, T. (1998). *Elementary Stochastic Calculus, with Finance in View*. World Scientific Publishing.
5. Müller, A. y Stoyan, D.. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley.
6. Ross, S.M. (1996). *Stochastic Processes (2 ed.)*. Wiley.
7. Steele, J.M. (2001). *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer-Verlag.
8. Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge University Press.