TRABAJOS FIN DE MÁSTER PROPUESTOS POR ANTONIO CUEVAS

Mayo, 2013

1. El eje medial de un conjunto y otros conceptos asociados. Aspectos estadísticos

Este trabajo se sitúa en la intersección entre la geometría computacional y la estadística. El *eje medial* (*medial axis)* se define como el conjunto de los puntos del conjunto que tiene más de dos proyecciones métricas sobre la frontera. La nociones de *skeleton* y de *cut locus* están muy próximas a la de eje medial (y en realidad coinciden con ella en la mayoría de los ejemplos prácticos). El eje medial fue introducido por Blum (1967) como una herramienta útil en la teoría matemática de análisis de imágenes. De hecho, una gran parte de la literatura sobre este tema se encuentra en revistas de ingeniería y de geometría computacional. Los aspectos estadísticos se han empezado a analizar más recientemente [ver Cuevas et al. (2013)].

A grandes rasgos, el trabajo a realizar seguiría el siguiente plan:

(a) Revisar y resumir la bibliografía sobre el eje medial y sus aplicaciones.
(b) Estudiar las conexiones del eje medial con otras nociones como el *inner parallel body* y las *curvas principales*.
(c) Analizar métodos para la aproximación del eje medial utilizando métodos estadísticos.

Referencias

Chazal, F. y Lieutier, A. (2005). The λ-medial Axis. *J. Graphical Models*, 67, 304-331.

Chazal, F. y Soufflet, R. (2004). Stability and finiteness properties of medial axis and skeleton. *J. Dynam. Control Systems*, 10, 149-170.

Cuevas, A., Llop, P. y Pateiro-López, B. (2013). On the estimation of the medial axis and inner parallel body. Bajo consideración editorial.

Federer, H. (1959). Curvature Measures. *Trans. Amer. Math. Soc*., 93, 418-491.

Ferry, S. (1975). When ε-boundaries are Manifolds. *Fund. Math*., 90, 199-210.

Fu, J.H.G. (1985). Tubular neighborhoods in Euclidean spaces. *Duke Math. J.* 52, 1025-1046.

2. Estadística en variedades (*manifold statistics*)

En los últimos años se ha producido un gran progreso en el estudio de problemas en que los datos proceden de observaciones aleatorias en las proximidades de una cierta variedad [Genovese et al. (2012), Chen y Müller (2012)]. El objetivo es reconstruir la variedad, estimar alguna de sus características o estimar algún parámetro de interés en la distribución subyacente que genera los datos. La teoría clásica de datos sobre la circunferencia unidad o sobre la esfera (*circular data, directional data*) puede considerarse como un precedente, y un caso particular, de este tipo de problemas.

El esquema desarrollar sería:

(a) Recopilar la bibliografía más relevante sobre el tema y esbozar un resumen de su desarrollo reciente.
(b) Analizar sus relaciones con la teoría de estimación de conjuntos y, muy especialmente, con las técnicas de estimación de la frontera de un soporte.
(c) Estudiar con mayor detalle algunos problemas particulares, como los relacionados con la estimación de la medida de Hausdorff, o del contenido de Minkowski, de una variedad compacta [Berrendero et al. (2013)].
(d) Esbozar algunas aplicaciones prácticas en problemas de análisis de imágenes.

Referencias

Berrendero, J., Cholaquidis, A., Cuevas, A. y Fraiman, R. (2013). A geometrically motivated parametric model in manifold estimation. *Statistics* (en prensa).

Chen D. y Müller, H.-G. (2012). Nonlinear manifold representations for functional data. *Ann. Statist.* 40, 1-29.

Genovese, C.R., Perone-Pacifico, M., Verdinelli, I. y Wasserman, L. (2012). The Geometry of nonparametric filament estimation. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 107, 788-799.

Mattila, P. (1995). *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*. Cambridge University Press, Cambridge.

3. Probabilidad en espacios de dimensión infinita: aplicaciones a la teoría estadística con datos funcionales

En lo fundamental, la teoría de probabilidad en espacios de Banach se construyó a lo largo de los años sesenta y setenta del pasado siglo [Hoffmann-Jorgensen y Pisier (1976)]. Sin embargo, la utilización plena de estos desarrollos teóricos al campo de la matemática aplicada y, muy en particular, a la teoría estadística con datos funcionales (llamada comúnmente *Functional Data Analysis,* FDA) empezó a producirse, mucho más lentamente, a partir de los años 90 [Bosq (2000), Bosq y Blanke (2007)].

El objetivo de este trabajo sería recopilar los principales resultados de la teoría probabilística en espacios de dimensión infinita, con especial énfasis en aquellos (no necesariamente los más sofisticados) que tienen aplicación directa a la estadística funcional [Cuevas (2013)]. En concreto, una parte sustancial del trabajo se dedicaría a recopilar los resultados disponibles sobre el cálculo de derivadas de Radon-Nikodym de un proceso gaussiano respecto a otro y mostrar sus aplicaciones en diferentes problemas estadísticos [Baíllo et al. (2011)].

Referencias

Baíllo, A., Cuevas, A. y Cuesta-Albertos, J. (2011). Supervised classification for a family of Gaussian functional models. *Scand. J. Stat.*, 38, 480-498.

Bosq, D. (2000). *Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications*. Lecture Notes in Statistics, 149. Springer, Berlin.

Bosq, D. and Blanke, D. (2007). *Inference and Prediction in Large Dimensions.* Wiley, Chichester.

Cuevas, A. (2013). A partial overview of the theory of statistics with functional data. *J. Stat. Plann. Inf.* (en prensa).

Hoffmann-Jorgensen, J. y Pisier, G. (1976). The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces. *Ann. Probab*. 4, 587-599.