



Asignatura: Procesos Estocásticos  
Código: 30066  
Centro: Facultad de Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones  
Nivel: Máster (nivel M2)  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8 ECTS

## ASIGNATURA / **COURSE TITLE**

Procesos estocásticos / [Stochastic processes](#)

### 1.1. Código / **Course number**

30066

### 1.2. Materia / **Content area**

Probabilidad y Estadística / [Probability and Statistics](#)

### 1.3. Tipo / **Course type**

Formación optativa / [Elective subject](#)

### 1.4. Nivel / **Course level**

Máster (Nivel M2) / [Master \(Level M2\)](#)

### 1.5. Curso / **Year**

2012/[2013](#)

### 1.6. Semestre / **Semester**

Primero / [First \(Fall semester\)](#)

### 1.7. Número de créditos / **Credit allotment**

8 créditos ECTS / [8 ECTS Credits](#)

### 1.8. Requisitos previos / **Prerequisites**

Conocimientos básicos de probabilidad / [Basic knowledge of probability](#)



Asignatura: Procesos Estocásticos  
Código: 30066  
Centro: Facultad de Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones  
Nivel: Máster (nivel M2)  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8 ECTS

## 1.9. Requisitos mínimos de asistencia a las sesiones presenciales / **Minimum attendance requirement**

**La asistencia a las clases es muy recomendable.**  
**Attendance to the lectures is highly recommended.**

## 1.10. Datos del equipo docente / **Faculty data**

Docente: Jesús Munárriz Aldaz  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias  
Despacho 205 - Módulo 8  
Teléfono: (+34) 91 497 7041  
Correo electrónico: [jesus.munarriz@uam.es](mailto:jesus.munarriz@uam.es)  
Página web: <http://www.uam.es/jesus.munarriz>  
Horario de atención al alumnado: L-J de 13:30 a 14:30, y también mediante petición individual del alumno

## 1.11. Objetivos del curso / **Course objectives**

El objetivo del curso es proporcionar una perspectiva general de los procesos estocásticos más importantes y sus aplicaciones. Dada la amplitud del tema, no se incidirá en los detalles y evitaremos las demostraciones más técnicas. Nos concentraremos en la motivación de los resultados y en las ideas que subyacen a los principales conceptos.

Se comienza con un breve tema de carácter introductorio para explicar los conceptos básicos, las diferencias con lo visto en cursos previos de probabilidad y algunos ejemplos de procesos importantes. Posteriormente, se estudian cadenas de Markov (en tiempo discreto), martingalas y sus aplicaciones a problemas de ruina, el movimiento Browniano y la integración estocástica.

The aim of the course is to provide a general perspective of the most important stochastic processes and their applications. We do not focus on details and we avoid highly technical proofs. We concentrate on the motivation of the results and the ideas behind the main concepts.

We start with some introductory lectures to explain the basic concepts, the differences between previous courses in probability



Asignatura: Procesos Estocásticos  
Código: 30066  
Centro: Facultad de Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones  
Nivel: Máster (nivel M2)  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8 ECTS

and the new subjects and some examples of important processes. Afterwards, we analyze Markov chains (in discrete time), martingales and their applications to ruin problems, Brownian motion, and stochastic integration.

## 1.12. Contenidos del programa / Course contents

### **BLOQUE I: Introducción a los procesos estocásticos**

**Contenidos Teóricos y Prácticos:** Definición y conceptos básicos. Algunos tipos importantes de procesos: martingalas, de Markov y estacionarios. El problema de la ruina del jugador. Dos procesos importantes: el proceso de Poisson y el movimiento browniano.

**Objetivos y Capacidades a Desarrollar:** Familiarizarse con los conceptos básicos sobre procesos estocásticos que se manejarán a lo largo del curso. Se introducen aquí algunos procesos estocásticos y ejemplos importantes que aparecerán en posteriores bloques temáticos.

### **BLOQUE II: Cadenas de Markov en tiempo discreto**

**Contenidos teóricos y prácticos:** Definiciones y propiedades básicas. Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov. Clasificación de estados. Existencia de la distribución estacionaria y teoremas de convergencia. La condición de equilibrio detallado. Aplicaciones.

**Objetivos y capacidades a desarrollar:** Entender los procesos markovianos discretos y sus aplicaciones a modelos sencillos. Se pondrá especial énfasis en calcular la distribución estacionaria de los procesos ergódicos y entender su significado.

### **BLOQUE III: Esperanza condicionada y martingalas en tiempo discreto**

**Contenidos teóricos y prácticos:** Esperanza condicionada. Definición de martingala. Propiedades y ejemplos básicos. Teorema del tiempo de parada opcional. Algunos resultados sobre convergencia de martingalas.

**Objetivos y capacidades a desarrollar:** Entender las martingalas como procesos adecuados para modelizar el comportamiento de un juego



Asignatura: Procesos Estocásticos  
Código: 30066  
Centro: Facultad de Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones  
Nivel: Máster (nivel M2)  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8 ECTS

justo. Mostrar la potencia de la teoría de martingalas para obtener resultados de probabilidad.

#### **BLOQUE IV: El movimiento browniano. Aplicaciones**

**Contenidos teóricos y prácticos:** Motivación y definición. Propiedades básicas. Martingalas en tiempo continuo. Martingalas asociadas al movimiento browniano. Principio de reflexión. Aplicaciones.

**Objetivos y capacidades a desarrollar:** Ilustrar el manejo práctico y la utilidad del movimientos browniano, así como sus principales propiedades.

#### **BLOQUE V: Integración estocástica y fórmula de Itô**

**Contenidos teóricos y prácticos:** Definición de la integral de Itô. Propiedades básicas. Fórmula de Itô y aplicaciones.

**Objetivos y capacidades a desarrollar:** Presentar las nociones básicas del cálculo estocástico.

#### **BLOCK I: Introduction to stochastic processes**

**Theoretical and Practical Contents:** Definition and basic concepts. Types of processes: martingales, Markovian and stationary. Gambler's ruin problem. Two important processes: the Poisson process and the Brownian motion.

**Aims and abilities to develop:** To familiarise oneself with the basic concepts about the main stochastic processes we will consider throughout the course. We will introduce some important processes and examples that appear in other blocks.

#### **BLOCK II: Markov chains in discrete time**

**Theoretical and Practical Contents:** Definitions and basic properties. Chapman-Kolmogorov's equations. States classification. Existence of the stationary distribution and limits theorems. Applications.

**Aims and abilities to develop:** To understand discrete Markovian processes and their applications to simple models. Special emphasis will be placed on the computation of the stationary distribution of ergodic processes and understanding its meaning.



Asignatura: Procesos Estocásticos  
Código: 30066  
Centro: Facultad de Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones  
Nivel: Máster (nivel M2)  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8 ECTS

### **BLOCK III: Conditional expectation and martingales in discrete time**

**Theoretical and Practical Contents:** Conditional expectation. Definition of a martingale. Basic properties. Optional stopping theorem. Some results about convergence of martingales.

**Aims and abilities to develop:** To understand martingales as suitable processes to model fair games. We will show the power of the theory of martingales to obtain results of probability.

### **BLOCK IV: Brownian motion. Applications**

**Theoretical and Practical Contents:** Definition and motivation. Basic properties. Martingales in continuous time. Martingales associated to the Brownian motion. Reflection principle. Applications.

**Aims and abilities to develop:** To illustrate the usefulness of the Brownian motion, as well as its main properties.

### **BLOCK V: Stochastic integration and Itô's formula**

**Theoretical and Practical Contents:** Definition. Basic properties. Itô's formula and applications.

**Aims and abilities to develop:** To present the theory of stochastic calculus.

## **1.13. Referencias de consulta / Course bibliography**

- Durrett, R. (1999). Essentials of Stochastic Processes. Springer.
- Grimmett, G.R. y Stirzaker, D.R (2001). Probability and Random Processes (3 ed.). Oxford University Press.
- Karatzas, I. y Shreve, S.E. (1991). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer-Verlag.
- Müller, A. y Stoyan, D. (2002). Comparison Methods for Stochastic Models and Risks. Wiley.
- Ross, S.M. (1996). Stochastic Processes (2 ed.). Wiley.



Asignatura: Procesos Estocásticos  
Código: 30066  
Centro: Facultad de Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones  
Nivel: Máster (nivel M2)  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8 ECTS

- Steele, J.M. (2001). Stochastic Calculus and Financial Applications. Springer-Verlag.
- Williams, D. (1991). Probability with Martingales. Cambridge University Press.

## 2. Métodos docentes / Teaching methodology

### ACTIVIDADES PRESENCIALES

**Clases presenciales en aula.** Se combinará la presentación de los aspectos teóricos con ejemplos, la resolución de problemas concretos y la descripción de aplicaciones. Se dispondrá de una página electrónica de la asignatura y se facilitará a los estudiantes el material necesario para la marcha del curso: el programa de la asignatura, las relaciones de ejercicios propuestos, transparencias utilizadas en clase, guías de las prácticas, etc.

### ACTIVIDADES DIRIGIDAS

Realización de ejercicios propuestos por el profesor.  
Tutorías presenciales o mediante consultas por correo electrónico.

## 3. Tiempo de trabajo del estudiante / Student workload

Actividad	Horas presenciales	Horas no presenciales	TOTAL
CLASES MAGISTRALES DE TEORÍA	48 (24%)	90 (44%)	138 (69%)
SEMINARIOS Y PROBLEMAS	10 (5%)	40 (22%)	50 (25%)
CLASES PRÁCTICAS	4 (1%)	4 (1%)	8 (4%)
EXÁMENES	4 (2%)		4 (2%)
Carga total de horas de trabajo:	66 (33%)	134 (67%)	200 (100%)



Asignatura: Procesos Estocásticos  
Código: 30066  
Centro: Facultad de Ciencias  
Titulación: Máster en Matemáticas y Aplicaciones  
Nivel: Máster (nivel M2)  
Tipo: Optativa  
Nº de créditos: 8 ECTS

#### 4. **Métodos de evaluación y porcentaje en la calificación final / Evaluation procedures and weight of components in the final grade**

En la evaluación se tendrá en cuenta el resultado del examen, la calificación de los ejercicios propuestos y la asistencia y el grado de participación en las clases.

La calificación obtenida en los problemas propuestos y las prácticas entregadas, junto con la participación en las clases y la asistencia, tendrán un peso del 50% de la calificación final. La nota final será la media ponderada entre la evaluación continua (peso 50%) y el examen final (peso 50%).

La calificación de las prácticas y los problemas entregados no se conservará para el examen extraordinario, ni años para posteriores.

Aquellos alumnos que no hayan satisfecho más de un 20% de las actividades evaluables principales serán calificados en la convocatoria ordinaria como "No evaluado".

EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA / [Make up exam](#):  
Examen ante tribunal de Máster / [Examination by a committee](#).

#### 5. **Cronograma\* / Course calendar**

<b>Seman a Week</b>	<b>Contenido Contents</b>	<b>Horas presenciales Contact hours</b>	<b>Horas no presenciales Independent study time</b>
1-3	Bloque I	12	25
3-4	Bloque II	16	31
5-10	Bloque III	9	20
11-14	Bloque IV	16	33
15-16	Bloque V	13	25

\*Este cronograma tiene carácter orientativo