Propuesta de TFG, 2017-2018

La estructura de Cauchy-Riemann sobre el grupo de Heisenberg

Davide Barbieri

El grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$ es un grupo de Lie no abeliano definido por una sencilla ley de composición sobre $\mathbb{R}^{2n+1} = \{(p, q, t), p \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$:

$$(p, q, t) \odot (p', q', t') = (p + p', q + q', t + t' + \frac{1}{2}(p \cdot q' - q \cdot p')).$$

Su estructura aparece en varias áreas de las matemáticas, como la teoría de grupos, el análisis armónico, las ecuaciones diferenciales, la teoría de la aproximación, o la geometría diferencial, así como en los fundamentos de la física moderna. Los campos vectoriales de $\mathbb{R}^{2n+1}$ invariantes por esta ley de composición dan lugar a una noción de diferenciabilidad que permite tratar distintos problemas, como ecuaciones degeneradas o vínculos no holónomos, y se pueden representar como los operadores posición y momento de la mecánica cuántica.

Una perspectiva muy eficaz para estudiar la geometría de $\mathbb{H}^n$ es la de considerar ese grupo como una subvariedad real de codimensión 1 en $\mathbb{C}^{n+1}$. Su espacio tangente complejo se puede definir en términos de los campos vectoriales invariantes, y admite una descomposición natural que genera el prototipo de las llamadas estructuras CR. La noción de regularidad compleja asociada se presenta como una generalización de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para las funciones holomorfas, y las funciones complejas que la satisfacen se llaman funciones CR. En el caso de $\mathbb{H}^n$, las ecuaciones que definen esta regularidad son ecuaciones complejas de orden 1 asociadas a diferentes familias de operadores diferenciales modelo, como el Laplaciano de Kohn, y su representación cuántica está relacionada con las condiciones de mínimo del principio de incertidumbre. El estudio de estas ecuaciones permite atacar problemas como el de la extensión holomorfa de funciones CR.

El objetivo de este trabajo es el estudio del grupo de Heisenberg y de su estructura en variable compleja. En particular, se considerarán por un lado los resultados fundamentales de la teoría de las funciones CR, y por el otro se intentará mantener una visión interdisciplinar de este sujeto.

References

[1] E. M. Stein, *Harmonic analysis. Real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* Princeton University Press (1993).

[2] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt, L. P. Rothschild, *Real submanifolds in complex space and their mappings.* Princeton University Press (1999).

[3] A. Boggess, *CR manifolds and the tangential Caucy-Riemann complex.* CRC Press (1991).