TRABAJO FIN DE GRADO

Matteo Bonforte

Curso 2017-18

Cursos recomendados: los cursos de EDPs (cuantos más mejor). También es conveniente haber cursado Variable Real, Análisis Funcional, Modelización.

1. La ecuación del calor fraccionaria.

Estudiaremos las propiedades básicas de los flujos del calor fraccionarios, en los cuales la difusión es dada por un operador no-local, que tiene en cuenta la influencia de las iteraciones de larga distancia. Las soluciones son dadas por convolucion con el núcleo del calor, que en este caso no es explícito y tiene "fat-tails", diferentes de la clásica cola Gaussiana. Extendemos al caso fraccionario la teoría de Widder (2) optimal, para soluciones no-negativas: existencia y unicidad en la clase optimal de soluciones con datos iniciales medidas crecientes. También se estudiará el problema de las trazas iniciales.

Referencias.

- (1) M. Bonforte, Y. Sire, J. L. Vazquez, Optimal Existence and Uniqueness Theory for the Fractional Heat Equation. *Nonlin. Anal. TMA* 153, (2017) 142-168.
- (2) D. V. Widder. "The Heat Equation", Academic Press, New York, (1975).

2. Introducción a las ecuaciones de difusión no lineales.

Se estudiarán las propiedades básicas para ecuaciones de difusión no-lineales de tipo medios porosos o p -Laplaciano: existencia, unicidad, estimaciones a priori, comportamiento asintótico para tiempos grandes. Estos modelos tienen una gran importancia sea del punto de vista teórico sea del punto de vista aplicado y se explorarán varios aspectos en ambas direcciones, sea teóricas que más aplicadas.

Referencias.

- (1) J. L. Vazquez. "The porous medium equation. Mathematical theory". Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.

Cursos recomendados: los cursos de EDPs (cuantos más mejor). También es conveniente haber cursado Variable Real, Análisis Funcional, Modelización.

3. Introducción a la regularidad de ecuaciones elípticas y/o parabólicas: el método de Nash-Moser.

En los años '50-'60, el 19º problema de Hilbert (sobre la regularidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales o de los mínimos de funcionales de cálculo de variaciones) ha sido resuelto por De Giorgi, y sucesivamente por Nash y Moser, con métodos diferentes. Se han obtenido estimaciones a priori que hoy en día se consideran "clásicas" y que han resultado ser fundamentales para el desarrollo de las modernas teorías de ecuaciones en derivadas parciales. La propuesta parte con el estudio detallado de estas técnicas en el caso clásico lineal (ecuaciones elípticas con coeficientes medibles). Se podrá considerar también el caso de EDPs no-lineales, de tipo elíptico y/o parabólico, posiblemente degenerado y/o singular.

Referencias:

- (1) D. Gilbarg, N. S. Trudinger, "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", GMW 224, 1977, Springer Verlag, Heidelberg.
- (2) E. Giusti, "Direct methods in the calculus of variations", World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003. viii+403 pp. ISBN: 981-238-043-4.
- (3) O. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, "Linear and quasilinear elliptic equations". Translated from the Russian by Scripta Technica, Inc. Translation editor: Leon Ehrenpreis Academic Press, New York-London 1968 xviii+495 pp.
- (4) M. Bonforte, G. Grillo, J. L. Vazquez, Quantitative Local Bounds for Subcritical Semilinear Elliptic Equations, Milan J. Math. 80, (2012) n.1, 65-118 .

4. Espacios funcionales, sus desigualdades y aplicaciones a EDPs elípticas y/o parabólicas

Existe una conexión muy profunda entre espacios funcionales, sus desigualdades funcionales (Poincaré, Hardy, Sobolev, Gagliardo-Nirenberg, Log-Sobolev, Caffarelli-Kohn-Nirenberg, ...) y las EDPs de tipo elíptico o parabólico.

Las aplicaciones de dichas desigualdades a EDPs de tipo parabólico permiten caracterizar propiedades de regularidad de soluciones en términos de desigualdades funcionales, y también permiten encontrar el comportamiento asintótico optimal (con métodos de entropía), estableciendo relaciones entre la mejor constante en las desigualdades funcionales y la tasa de convergencia optima al perfil estacionario. En el caso de la ecuación del calor, el comportamiento asintótico optimal, se puede interpretar como un teorema del límite central cuantitativo, mediante la correspondencia entre las soluciones de la ecuación del calor y el movimiento Browniano.

Referencias. Contactar con el profesor.