TRABAJOS DE FIN DE GRADO (2017-18)
Gabino González Diez

1) Teorema de Grothendieck-Belyi

El teorema de Belyi (o de Grothendieck-Belyi) establece que una curva C : $F(x, y) = 0$ con coeficientes complejos es isomorfa a una cuyos coeficientes son números algebraicos si y sólo si admite una función racional $f(x, y) = P(x, y)/Q(x, y)$ con tres puntos de ramificación (en cuyo caso los polinomios $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ pueden suponerse también con coeficientes en el cuerpo $\overline{\mathbb{Q}}$ de todos los números algebraicos).

Se trataría de entender una demostración de este teorema y de trabajar algunos ejemplos concretos. También se podría estudiar la acción del grupo absoluto de Galois $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en los grafos (*dessins d'enfants*, en la terminología de Grothendieck) de la forma $f^{-1}([0, 1]) \subset C$.

Bibliografía:

1. Girondo, Ernesto; González-Diez, Gabino. Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants. London Mathematical Society. Student Texts, 79. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

2) Funciones doblemente periódicas

Las funciones complejas doblemente periódicas aparecen históricamente al intentar calcular la función longitud de arco de la elipse, razón por lo cual son también conocidas como *funciones elípticas*.

Si los dos períodos w_1, w_2 son dos números complejos $\mathbb{R}$-linealmente independientes, entonces estas funciones permiten definir una biyección entre el toro complejo $\mathbb{C}/\mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$ y una cúbica plana. Esta biyección permite trasladar la estructura de grupo del toro complejo a la cúbica de forma que la "suma" de puntos con coordenadas en un cuerpo, digamos $\mathbb{Q}$, es un punto de la cúbica que tiene de nuevo coordenadas en ese cuerpo. Ello permite encontrar nuevos puntos con coordenadas racionales a partir de dos dados.

Bibliografía:

1. Ahlfors, Lars V. Complex analysis. McGraw-Hill Book Company. 1966
2. Lang, Serge. Elliptic curves. Diophantine analysis. Springer. 1970 (primer capítulo)