

Propuesta 1 TFG (Javier Cárcamo)

1. Martingalas

Introducción: Las martingalas modelizan la evolución en el tiempo de un juego justo. La teoría de martingalas juega un papel fundamental en el estudio de muchos procesos estocásticos, como en movimiento browniano. Además, las martingalas aparecen de forma natural en matemática financiera y economía, integración estocástica y en análisis matemático. Asimismo, muchos de los resultados clásicos de probabilidad pueden ser demostrados con facilidad y elegancia utilizando martingalas.

Objetivos: En este trabajo se propone estudiar la teoría de martingalas. Repasaremos primeramente la esperanza condicional, que será una herramienta esencial para entender y formalizar el concepto de martingala. Posteriormente nos centraremos en la demostración del Teorema de convergencia para martingalas. Usando este resultado demostraremos la ley fuerte de los grandes números de Kolmogorov mediante el uso de martingalas invertidas. Finalmente, se considerarán algunas aplicaciones de esta teoría.

Herramientas: Se manejarán los conceptos estudiados en las asignaturas de cálculo de probabilidad del Grado (Probabilidad I y II), Teoría de la medida y Estadística.

Bibliografía inicial:

- Williams, David (1991). Probability with Martingales. Cambridge University Press.
- Grimmett, G., y Stirzaker, D. (2001). Probability and Random Processes (3rd ed.). Oxford University Press.

Propuesta 2 TFG (Javier Cárcamo)

2. Procesos de ramificación

Introducción: Los procesos de ramificación (*branching processes* en inglés) son un tipo de procesos estocásticos que sirven como modelo matemático para estudiar el crecimiento de una población. Cada individuo de la generación n -ésima produce un número aleatorio de descendientes en la generación $(n+1)$ -ésima, de acuerdo con una distribución de probabilidad. De esta forma, un proceso de ramificación se puede escribir como una suma aleatoria de variables aleatorias.

Objetivos: Dado un proceso de ramificación que acaba de comenzar, surgen muchas preguntas interesantes que se pueden intentar contestar: ¿podemos encontrar la distribución del proceso en la generación n -ésima?; ¿cuál es la probabilidad de que la población se extinga?; y si la población se extingue ¿qué podemos decir del tiempo T en el que se produce la extinción? En este trabajo proponemos dar solución a todas estas cuestiones en los procesos de ramificación más sencillos.

Herramientas: Se manejarán los conceptos básicos estudiados en las asignaturas de cálculo y probabilidad del Grado (Probabilidad I y II), así como algunas ideas de Estadística.

Bibliografía inicial:

- Athreya, K.B, y Jagers, P. (1973). *Branching Processes*. Springer.
- Lyons, R., y Peres, Y. (2016). *Probability on Trees and Networks*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics.