

Mini-curso Teoría de Modelos y Subgrupos Aproximados

Arturo Rodríguez Fanlo

Prerequisitos: El curso pretende ser autocontenido, sin embargo, el alumno debe estar familiarizado con los conceptos más básicos de teoría de grupos, topología y teoría de la medida. No es necesario ningún conocimiento previo sobre grupos de Lie, aunque sí es recomendable conocer la definición. El curso no asume ningún conocimiento previo en lógica matemática o teoría de modelos.

Introducción: Los subgrupos aproximados constituyen un concepto básico en combinatoria que permite capturar la idea de objetos semejantes a grupos, salvo por un error constante finito. Aunque su estudio en el contexto abeliano se remonta hasta la mitad del siglo XX, la definición actual fue definitivamente fijada por Tao en 2008 [Tao08]. El ejemplo más elemental de subgrupo aproximado es una progresión geométrica general, esto es, un conjunto de palabras de longitud acotada escritas usando un número finito de elementos que conmutan entre sí. Las técnicas más habituales utilizadas para el estudio de los subgrupos aproximados provienen de combinatoria, teoría de grafos y análisis armónico discreto.

En 2009, empleando teoría de modelos (lógica matemática), Hrushovski encontró una relación fundamental entre los subgrupos aproximados finitos y los grupos de Lie [Hru11]. Este resultado, ahora conocido como el teorema del modelo de Lie, fue clave para finalmente obtener en 2012 una clasificación completa de los subgrupos aproximados finitos por Breuillard, Green y Tao. El trabajo de Hrushovski introdujo los subgrupos aproximados en teoría de modelos y, desde entonces, el interés en ellos no ha dejado de crecer en el área.

Sumario del curso: El objetivo de este mini-curso es familiarizar a los estudiantes con los subgrupos aproximados y la teoría de modelos, y presentar la demostración del teorema del modelo de Lie, el cual ejemplifica bien las aplicaciones que provee la teoría de modelos a otras áreas de las matemáticas (en este caso combinatoria y teoría de grupos).

El primer día estará dedicado a los resultados básicos de combinatoria sobre subgrupos aproximados: veremos el lema del recubrimiento de Ruzsa, la desigualdad triangular de Ruzsa, la desigualdad de Petridis, la desigualdad de Plünnecke-Ruzsa y el teorema de caracterización de subgrupos aproximados (pequeña duplicación, pequeña triplicación y subgrupo aproximado son equivalentes).

El segundo día introduciremos los conceptos básicos de teoría de modelos necesarios para la demostración del teorema del modelo de Lie: daremos las definiciones de lenguaje, estructura, conjunto definible, conjunto infinitamente-definible, saturación, ultraproducto, conjunto pseudo-finito y ultralímite de medidas de conteo; así como el teorema de Łoś y la \aleph_1 -saturación de los ultraproductos.

El tercer día veremos la demostración del teorema del modelo de Lie, siguiendo la demostración simplificada presentada por Massicot y Wagner [MW15]. Veremos las definiciones de amenabilidad definible y la topología lógica, así como el lema de Sanders y la solución al quinto problema de Hilbert por Gleason y Yamabe (sin demostración). Si el tiempo lo permite, expondremos algunos corolarios del teorema del modelo de Lie. Concluiremos el curso con una breve descripción de la demostración del teorema de Breuillard-Green-Tao y la relación entre el teorema del modelo de Lie y el teorema de crecimiento polinomial de Gromov.

Bibliografía

- [Tao08] Terence Tao. “Product set estimates for non-commutative groups”. En: *Combinatorica* 28.5 (2008), págs. 547-594. DOI: 10.1007/s00493-008-2271-7.
- [TZ12] Katrin Tent y Martin Ziegler. *A course in model theory*. Vol. 40. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2012. ISBN: 9780521763240.
- [MW15] Jean-Cyrille Massicot y Frank Olaf Wagner. “Approximate subgroups”. En: *Journal de l'École polytechnique-Mathématiques* 2 (2015), págs. 55-63. DOI: 10.5802/jep.17.

Bibliografía Complementaria

- [Mar02] David Marker. *Model Theory: An Introduction*. Vol. 217. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002. ISBN: 9780387987606.
- [TV05] Terence Tao y Van H. Vu. *Additive Combinatorics*. Vol. 105. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2005. ISBN: 9780521136563.
- [Hru11] Ehud Hrushovski. “Stable group theory and approximate subgroups”. En: *Journal of the American Mathematical Society* 25.1 (2011), págs. 189-243. DOI: 10.1090/S0894-0347-2011-00708-X.
- [BGT12] Emmanuel Breuillard, Ben Green y Terence Tao. “The structure of approximate groups”. En: *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 116.1 (2012), págs. 115-221. DOI: 10.1007/s10240-012-0043-9.
- [Tao14] Terence Tao. *Hilbert's fifth problem and related topics*. Vol. 153. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2014. ISBN: 9781470415648.